代数曲線

2010 年度後期特論特選

石田 正典

東北大学大学院理学研究科

2010 年 1 月 25 日

1　リーマン面と有理型関数

リーマン面 X は高々可算無限個の開集合 U_i で被覆されるハウスドルフ空間で，各 U_i が複素平面の開集合と同じ複素構造を持つものとして定義される．コンパクトリーマン面の場合は有限個の U_i で十分である．任意の $P \in X$ はある U_i に含まれるので，平行移動により $z(P) = 0$ となる局所座標 z が存在する．P が別の U_j に含まれれば別の局所座標 w が得られるが，$w = w(z)$ と $z = z(w)$ はそれぞれ正則関数で $w(z) = a_1z + a_2z^2 + \cdots$ $(a_1 \neq 0)$ および $z(w) = b_1w + b_2w^2 + \cdots$ $(b_1 \neq 0)$ と冪級数で表示できる．もっと一般にこの形の正則関数 $w(z)$ があれば，w を P での局所変数とすることができる．

X をコンパクトリーマン面とする．

X 上の複素数または ∞ を値に持つ関数 f は X のすべての点の局所変数について正則であるかまたは極を持つとき有理型関数という．ここで f が $P \in X$ で極を持つとは，ある $n > 0$ と $z(P) = 0$ なる局所変数について

$$f = a_{-n}z^{-n} + a_{-n+1}z^{-n+1} + \cdots$$

とローラン展開されることを意味する．$a_{-n} \neq 0$ であるとき f は P で n 位の極を持つという．P で正則で値が 0 の場合は，ある $n > 0$ について

$$f = a_nz^n + a_{n+1}z^{n+1} + \cdots$$

で $a_n \neq 0$ であれば f は P で n 位の零を持つという．

f を恒等的に 0 でない有理型関数としたとき，n 位の極については $\nu_P(f) = -n$, n 位の零については $\nu_P(f) = n$, その他の点については $\nu_P(f) = 0$ と定義する．極や零は X の孤立点であり集積点は持たないので，X のコンパクト性からいずれも有限個となる．X 上の有理型関数全体を $\mathbf{C}(X)$ で表す．$\mathbf{C}(X)$ は体である．

任意の $P \in X$ について，上記の $\nu_P : \mathbf{C}(X) \setminus \{0\} \to \mathbf{Z}$ は条件
(1) $\nu_P(fg) = \nu_P(f) + \nu_P(g)$,
(2) $\nu_P(f+g) \geqq \min\{\nu_P(f), \nu_P(g)\}$
を満たす．これは ν_P が非アルキメデス的付値であることを示している．$\nu_P(0) = \infty$ と考えて ν_P が $\mathbf{C}(X)$ で定義されているとしても良い．

X の有限個の点 $P_1, \ldots, P_s$ に整数係数をつけた形式的な和

$$D = a_1 P_1 + \cdots + a_s P_s$$

を X の因子という．因子の和は自然に定義され，因子の全体 $\mathrm{Div}(X)$ は X の点全体を基底とする自由加群である．0 でない有理型関数 f について $(f) = \sum_{P \in X} \nu_P(f) P$ と置くと，有限個の P を除き $\nu_P(f) = 0$ であることから，(f) は因子と考えられる．$(f) = a_1P_1 + \cdots + a_sP_s$ で $a_1, \ldots, a_l > 0, a_{l+1}, \ldots, a_s < 0$ であるとき，$(f)_0 = a_1P_1 + \cdots + a_lP_l$, $(f)_\infty = (-a_{l+1})P_1 + \cdots + (-a_s)P_s$ とおく．$(f) = (f)_0 - (f)_\infty$ である．

因子 D の係数がすべて 0 以上のことを $D \geqq 0$ と書く．一般に $D_1 - D_2 \geqq 0$ のとき $D_1 \geqq D_2$ と書く．因子 D について

$$L(D) = \{f \in \mathbf{C}(X) \setminus \{0\}\ ;\ (f) + D \geqq 0\} \cup \{0\}$$

と定義する．$L(D)$ は $\mathbf{C}(X)$ の部分ベクトル空間である．$D_1 \geqq D_2$ ならば $L(D_2) \subset L(D_1)$ であることも定義から明らかである．因子 $D = a_1P_1 + \cdots + a_sP_s$ の次数 $\deg D$ を $\deg D = a_1 + \cdots + a_s$ で定義する．すべての係数が 0 の因子を単に 0 と書く．コンパクトリーマン面上の正則関数は最大値の原理により定数しかないので $L(0) = \mathbf{C}$ である．

X 上の因子 D_1, D_2 がある $f \in \mathbf{C}(X)$ について $D_2 = D_1 + (f)$ であるとき D_1 と D_2 は線形同値と言い $D_1 \sim D_2$ と書く．このとき，この f について写像 $g \mapsto g/f$ が $L(D_1)$ から $L(D_2)$ へのベクトル空間の同型となる．線形同値性が同値関係であることも容易に確かめられる．$D_1 \sim D_2$ であれば $\deg D_1 = \deg D_2$ が後の定理 1.3 から出る．

$L(D)$ の次元を $l(D)$ と書く．

補題 1.1 任意の因子 D と $P \in X$ について $l(D) \leqq l(D+P) \leqq l(D) + 1$ となる．$\deg(D) = n \geqq 0$ とすると $l(D)$ は $n+1$ 以下，$\deg(D) < 0$ なら $l(D) = 0$ である．

証明　$D \leqq D + P$ であるから $l(D) \leqq l(D+P)$ である．$L(D+P) \setminus L(D) \neq \emptyset$ であるとし $f_0 \in L(D+P) \setminus L(D)$ を取る．このとき，任意の $f \in L(D+P)$ についてある定数 $a \in \mathbf{C}$ で $f - af_0 \in L(D)$ となることが P でのローラン級数展開を考えるとわかる．したがって $l(D) < l(D+P)$ なら $l(D+P) = l(D) + 1$ となる．

後半を示す．$L(D)$ の次元が 0 であれば主張は自明なので $L(D) \neq \{0\}$ と仮定する．このとき D はある $E \geqq 0$ に線形同値なので $\deg(D) \geqq 0$ である．$f \in L(D) \setminus \{0\}$ を取って，D を線形同値な $D + (f)$ と置き換えることにより $D \geqq 0$ と仮定できる．$n = \deg(D)$ についての数学的帰納法で証明する．$\deg(D) = 0$ であれば $D = 0$ であるから $L(0) = \mathbf{C}$

は 1 次元で正しい．$\deg(D) \geqq 1$ のときは $D' \geqq 0$ と $P \in X$ があって $D = D' + P$ となる．$\deg(D') = \deg(D) - 1$ なので帰納法の仮定から $l(D') \leqq n$ であり，前半から $L(D) \leqq L(D') + 1 \leqq n + 1$ であるのでこの場合も正しい．　証明終わり

この補題により $L(D)$ は常に有限次元であることがわかる．D_1 と D_2 が線形同値であれば $l(D_1) = l(D_2)$ となる．

X 上の微分形式 ω とは，局所変数 z を持つ X の開集合 U ごとに U 上の有理型関数 $u(z)$ により $\omega = u(z)dz$ の形で与えられ，他の局所変数 w と開集合 V についての $\omega = v(w)dw$ が $U \cap V$ で $v\,dw/dz = u$ の関係を持つとき，X 全体に局所的に $\omega = u(z)dz$ で表される有理型微分形式 ω があると考える．なお，通常は単に微分形式という．dw/dz は $z = 0$ で可逆なので，微分形式 $\omega = u\,dz$ に対しても，z が P での局所変数であれば $\nu_P(\omega) = \nu_P(u)$ と定義することにより因子 $(\omega) = \sum_{P \in X} \nu_P(\omega)P$ が定義される．

f を X 上の有理型関数とすると，各局所変数 z について $(df/dz)dz$ を考えると，これは X 上の微分形式となる．この微分形式を df と書く．0 でない有理型関数 g を一つ取れば，任意の微分形式はある有理型関数 f により $f\,dg$ と書ける．微分形式の因子を K_X あるいは単に K と書いて X の標準因子という．K は微分形式の取り方に依存するが，取り方を変えても線形同値である．

微分を $z(P) = 0$ となる局所座標で $f(z)dz$ と表したときの $f(0)$ は局所座標の取り方に依存する．一方，$\lim_{z \to 0} zf(z)$ は局所座標の取り方に依存しない．これが $f(z)dz$ の P での留数である．

補題 1.2 任意の 0 でない有理型関数 f について，微分形式 df/f は f の零と極だけで 1 位の極を持ち，$P \in X$ での留数は $\nu_P(f)$ に等しい．すなわち，Γ を点 P まわりの正の向きの積分路とすると

$$\nu_P(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{df}{f}$$

が成り立つ．

証明　$f = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots \ (a_n \neq 0)$ とすれば，$z = 0$ の近傍で f'/f が n/z と正則関数の和となることによる．　証明終わり

定理 1.3 X をコンパクトリーマン面とする．任意の $f \in \mathbf{C}(X) \setminus \{0\}$ について $\deg(f)_0 = \deg(f)_\infty$ すなわち $\deg(f) = 0$ が成り立つ．

証明は微分 df/f に留数定理を適用して証明される．向き付け可能なコンパクト曲面の分類から，X の種数が g, すなわち球面 S^2 に g 個のハンドルを付けて得られる曲面に同相であれば，X に $2g$ 個の閉曲線の切り目を入れて $4g$ 角形に展開し，微分形式 df/f を周を経路として正の向きに積分すれば，X 上では切り目の $2g$ 個の閉曲線について両方の向きに積分して足し合わせることになり，積分値は 0 である．留数定理から内部の留数の和は 0 となり，$\deg(f) = 0$ がわかる．

X, Y をコンパクトリーマン面とする．写像 $f : X \to Y$ が正則写像とは，任意の $P \in X$ について P の局所座標 t と $f(P) \in Y$ の局所座標 z により P の近傍で $t(Q) \mapsto z(f(Q))$ が正則関数となることと定義する．X のすべての点を Y の一点に対応させる写像は正則写像である．

$t(P) = 0, z(f(P)) = 0$ となるように局所座標をとれば，像が一点でない f は局所的に $f(t) = a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} + \cdots \ (n \geqq 1, a_n \neq 0)$ と表される．$u = f(t)/t^n = a_n + a_{n+1} t + \cdots$ は 0 の近傍で 0 でない正則関数なのでその n 乗根も 0 でない正則関数となる．その一つを v とすれば vt も P の局所座標となるので，vt を t と置き直せば f は局所的に $z = t^n$ となる．この n が 1 なら局所的に逆写像があることがわかる．$n \geqq 2$ のとき f は P で，場合によっては $f(P)$ で，分岐するといい，$e_P = n$ を P での分岐指数という．なお，$n = 1$ の場合は分岐はしていないが $e_P = 1$ と定義する．

補題 1.4 $f : X \to Y$ を像が一点でない正則写像とする．f の分岐点は有限個である．

証明　分岐点は f を局所座標で表して微分が 0 となる点であるから集積点を持たない．X はコンパクトなので有限集合である．　証明終わり

補題 1.5 $f : X \to Y$ を像が一点でない正則写像とする．分岐点の像でない $Q \in Y$ について $f^{-1}(Q)$ の点の数は有限で一定である．この数を d とすると任意の $R \in Y$ について $\sum_{P \in f^{-1}(R)} e_P = d$ となる．

証明　f の連続性から $f^{-1}(Q)$ は X の閉集合であるから集積点の像も Q となるが，$f(P) = Q$ とすると，f は P の近傍から Q の近傍への全単射を与えるので $f^{-1}(Q)$ は集積点を持たない．X はコンパクトなので $f^{-1}(Q)$ は有限集合である．$f^{-1}(Q) = \{P_1, \ldots, P_d\}$ とすると，Q の近傍 U と P_i の近傍 U_i があって f によりすべての i について $U_i \simeq U$ となる．$X \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_d)$ はコンパクトで $f(X \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_d))$ は Q を含まない Y の閉集合となる．したがって Q のある近傍 V で $f^{-1}(V) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_d$ となり，V の各点の引き戻しは d 個の点となる．これで各整数 d について $f^{-1}(Q)$ が d 個の点となる Q 全体は開集合であることがわかる．分岐点の像でない点全体は連結なので d は一定であることがわかる．

一般の $R \in X$ については $f(P) = R$ となる P について $e_P > 1$ であれば，R に十分近い別の点 Q の引き戻しが P の近くに e_P 個の点を持つので，Q は分岐点の像でないとすれば引き戻しが d 個の点を持つことから等式 $\sum_{P \in f^{-1}(R)} e_P = d$ が得られる．　証明終わり

2　リーマン・ロッホの定理

次のリーマン・ロッホの定理は証明なしに認める．

定理 2.1 X をコンパクトリーマン面とすると，種数と呼ばれる 0 以上の整数 g が存在して次を満たす．K を X の標準因子，D を X 上の任意の因子とする．$l(D) = \dim_{\mathbf{C}} L(D)$, $l(K-D) = \dim_{\mathbf{C}} L(K-D)$ について等式

$$l(D) = \deg(D) + 1 - g + l(K-D)$$

が成り立つ．

この定理で $D = 0$ とすれば $l(D) = 1$, および $\deg(D) = 0$ より $l(K) = g$ がわかる．次に $D = K$ とすれば $l(K-D) = 1$ より $\deg(K) = 2g-2$ がわかる．ただし，種数 g のコンパクトリーマン面の位相的オイラー数が $2-2g$ であることを含めて種数の定義を何にするの問題なので，これらの等式がリーマン・ロッホの定理から得られると言うのは適当でない．

D をコンパクトリーマン面 X の因子で $D \geqq 0$ とし，D の $P \in X$ についての係数を $n_P(D)$ で表す．$Z \subset X$ を

$$\min\{\nu_P(f)\ ;\ f \in L(D)\} > -n_P(D)$$

となる点 $P \in X$ 全体としたとき，$l(D) = N$ について，射影空間 $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$ への写像

$$\Phi_{|D|} : X \setminus Z \to \mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$$

を次のように定義する．

$\{s_1, \ldots, s_N\}$ を $L(D)$ の基底とする．$L(D)$ の元はすべて $s_1, \ldots, s_N$ の一次結合となるので，$P \in X \setminus Z$ であれば, ある i について $\nu_P(s_i) = -n_P(D)$ となる．z を $z(P) = 0$ となる X の局所座標をとし，$n = n_P(D)$ とすれば，P の近傍での $\Phi_{|D|}$ を

$$\Phi_{|D|}(Q) = (z(Q)^n s_1(z(Q)) : \cdots : z(Q)^n s_N(z(Q)))$$

で定義する．$z^n s_i$ が P の近傍で 0 でない正則関数となることから，これは射影空間への写像となる．この写像 $\Phi_{|D|}$ は基底 $\{s_1, \ldots, s_N\}$ の取り方に依存する形だが，基底を取り替えても変換行列による $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$ の線形変換の違いしかない．なお，$|D|$ は D と線形同値な因子全体の集合で $E \in |D|$ なら $|E| = |D|$ であるが，$f_0 \in L(D)$ により $E = D + (f_0)$ とすれば，$L(E)$ の基底 $\{s_1/f_0, \ldots, s_N/f_0\}$ により $\Phi_{|E|}$ は $\Phi_{|D|}$ と同じ $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$ への写像を与える．記号 $\Phi_{|D|}$ はこのことを先取りした記号である．各 $P \in X \setminus Z$ に対して D を線形同値なものと取り替えて $n_P(D) = 0$ と考えるのが便利な場合もある．

$P \in X$ について $l(D-P) = l(D)$ または $l(D) - 1$ である．$l(D-P) = l(D)$ であれば $L(D) = L(D-P)$ なので，任意の $f \in L(D)$ について $\nu_P(f) \geqq -n_P(D) + 1$ であり $P \in Z$ ととなる．逆に $P \in Z$ であれば明らかに $L(D) = L(D-P)$ である．これから次の補題が得られる．

補題 2.2 $Z=\emptyset$ となること，すなわち $\Phi_{|D|}$ が X 全体で定義されるための必要十分条件は，任意の $P \in X$ について $l(D-P)=l(D)-1$ となることである．

$(X_1:\cdots:X_N)$ を $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$ の斉次座標とする．各 i について $X_i \neq 0$ で定義される $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$ の開部分集合 U_i は X_j/X_i $(j \neq i)$ を座標関数とする複素空間 $\mathbf{C}^{N-1}$ である．記号の定義のしやすさから U_N を考えることにすると，$z_i = X_i/X_N$ $(i=1,\ldots,N-1)$ として $(z_1,\ldots,z_{N-1})$ が座標系となる．$\Phi_{|D|}$ は $X \setminus Z$ の $\nu_P(s_N) > -n_P(D)$ となる有限個の P 以外の点では $(s_1/s_N,\ldots,s_{N-1}/s_N)$ で定義される U_N への正則写像となる．

$\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$ の超平面 H は全部が 0 でない $a_1,\ldots,a_N \in \mathbf{C}$ による斉次 1 次式

$$a_1X_1+\cdots+a_NX_N=0$$

で定義される．開集合 U_N では $a_1z_1+\cdots+a_{N-1}z_{N-1}+a_N=0$ で定義されるアフィン超平面である．この定義方程式を $\Phi_{|D|}^{-1}(U_N)$ に引き戻せば

$$(a_1s_1+\cdots+a_{N-1}s_{N-1}+a_Ns_N)/s_N=0$$

となり，この開集合上に超平面の引き戻しの因子を定める．$Z=\emptyset$ の場合は，$U_1,\ldots,U_{N-1}$ についても同様の引き戻しを考えることにより X 上への引き戻しの因子 $E=\Phi_{|D|}^{-1}(H)$ が得られる．$P \in \Phi_{|D|}^{-1}(U_N)$ であれば

$$n_E(P)=\nu_P(a_1s_1+\cdots+a_Ns_N)-\nu_P(s_N)=\nu_P(a_1s_1+\cdots+a_Ns_N)+n_P(D)$$

であり，その他の U_i でも同様であるから，$E=D+(a_1s_1+\cdots+a_Ns_N)$ となる．したがって，$Z=\emptyset$ の場合，因子 E が D と線形同値である必要十分条件は E が $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$ の超平面の $\Phi_{|D|}$ による引き戻しとなることである．

定理 2.3 $\Phi_{|D|}$ が X の $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$ への埋め込みとなるための必要十分条件は，任意の $P,Q \in X$ について $l(D-P-Q)=l(D)-2$ となることである．

まず十分条件であることを示す．$l(D-P)-l(D-P-Q) \leqq 1$ であるから，$l(D-P-Q)=l(D)-2$ から $l(D-P)=l(D)-1$ がわかる．したがって $\Phi_{|D|}$ は X 全体で定義される．$l(D-P)-l(D-P-Q)=1$ もわかるので，$P \neq Q$ の場合 $\nu_P(f) > -n_P(D)$ かつ $\nu_Q(f)=-n_Q(D)$ を満たす $f \in L(D)$ が存在する．$f=a_1s_1+\cdots+a_Ns_N$ とすれば $\Phi_{|D|}(P)$ は超平面 $a_1X_1+\cdots+a_NX_N=0$ に含まれるが $\Phi_{|D|}(Q)$ はこの超平面に含まれないので $\Phi_{|D|}(P) \neq \Phi_{|D|}(Q)$ である．したがって $\Phi_{|D|}$ は単射となる．$P=Q$ とした場合の式 $l(D-P)-l(D-2P)=1$ は $\nu_P(f)=-n_P(D)+1$ を満たす $f \in L(D)$ の存在を示す．$\Phi_{|D|}(P) \in U_N$ とすれば f/s_N の P での微分が 0 でないことになり，f/s_N は $s_1/s_N,\ldots,s_{N-1}/s_N$ と 1 の一次結合であることから，これらのいずれかの微分が 0 でない．$\Phi_{|D|}(P)$ が U_N に含まれない場合も，ある U_i に含まれるので同様にいずれかの座標について微分が 0 でない．したがって $\Phi_{|D|}$ は埋め込みである．

必要性は，$P \neq Q$ なら $\Phi_{|D|}(P)$ を含んで $\Phi_{|D|}(Q)$ を含まない超平面から $\nu_P(f) > -n_P(D)$ かつ $\nu_Q(f) = -n_Q(D)$ を満たす $f \in L(D)$ を作り，$P = Q$ なら $\Phi_{|D|}(X)$ と $\Phi_{|D|}(P)$ で横断的に交わる超平面から $\nu_P(f) = -n_P(D) + 1$ を満たす $f \in L(D)$ を作ればよい． 証明終わり

複素平面 $\mathbf{C}$ の座標を z とすると，$R^* = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ は ∞ の近傍の局所座標を $t = 1/z$ としてコンパクトリーマン面となる．これは $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ で $z = X_1/X_2$ と置いたものと同じである．リーマン面上の有理型関数 f は極での値を ∞ と考えれば R^* への正則写像となる．ただし，これはリーマン面の有理型関数の場合だけで，2 次元以上の複素多様体や代数多様体については正しくない．例えば (z_1, z_2) を座標とする $\mathbf{C}^2$ で関数 z_1/z_2 を考えると，$(0, 0)$ での極限値は近づく方向によって異なるので値を ∞ とすることはできない．

$\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ を $z = X_1/X_2$ の関係によりリーマン球面 R^* と考える．任意の $a \in \mathbf{C}$ に対して $z - a$ は a で 1 位の零，∞ で 1 位の極を持つ有理型関数である．$(z - a)/(z - b)$ は a で 1 位の零，b で 1 位の極を持つ．一般に，任意に $\deg(D) = 0$ となる因子に対して，この形の有理型関数をいくつかかけ合わせることにより $(f) = D$ となるように有理関数 f を構成できる．コンパクトリーマン面上の有理型関数は因子が同じなら定数倍の違いしかないので，$\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ 上の有理型関数はすべて有理関数である．これから $\mathbf{C}(R^*) = \mathbf{C}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})) = \mathbf{C}(z)$ がわかる．右辺は 1 変数有理関数体である．また，R^* の任意の因子 D について $\deg(D) = d$ であれば $D \sim d\infty$ であり，$d \geqq 0$ であれば $l(D) = l(d\infty) = d + 1$, $d < 0$ であれば $l(D) = l(d\infty) = 0$ であることがわかる．ここで $L(d\infty)$ は z についての d 次以下の多項式全体であることに注意する．

定理 2.4 X をコンパクトリーマン面とする．f を $\mathbf{C}(X) \setminus \{0\}$ の元とし $d = \deg(f)_0$ とする．R^* を z を変数とするリーマン球面とし，f をリーマン球面への正則写像 $f : X \to R^*$ と考える．f による有理型関数の引き戻しにより有理関数体 $\mathbf{C}(z)$ を $\mathbf{C}(X)$ の部分体と考えれば，$\mathbf{C}(X)$ は $\mathbf{C}(z)$ の d 次の代数拡大となる．

証明　分岐点の像でない Q について $f^{-1}(Q) = \{P_1, \ldots, P_d\}$ として，$g \in \mathbf{C}(X)$ について $g(P_1), \ldots, g(P_d)$ の基本対称式を $s_1(Q), \ldots, s_d(Q)$ とする．このとき，$s_1, \ldots, s_d$ は R^* 上の関数と考えられ，f の分岐点の像以外の点では明からに有理型関数である．分岐点の像でも局所変数の適当な冪乗をかければ連続となるので正則で，これらが有理型関数であることがわかる．したがって，$s_1, \ldots, s_d \in \mathbf{C}(z)$ であって

$$g^d - s_1 g^{d-1} + s_2 g^{d-2} - \cdots + (-1)^d s_d = 0$$

となるので g の $\mathbf{C}(z)$ 上の最小多項式は高々 d 次である．これで $[\mathbf{C}(X) : \mathbf{C}(z)] \leqq d$ がわかる．$h \in \mathbf{C}(X)$ を $\mathbf{C}(X) = \mathbf{C}(z, h)$ となるようにとる．$[\mathbf{C}(X) : \mathbf{C}(z)] = m$ とすると h の最小多項式は m 次なので，ある $\phi_1, \ldots, \phi_m \in \mathbf{C}(z)$ について

$$h^m + \phi_1 h^{m-1} + \phi_2 h^{m-2} + \cdots + \phi_m = 0$$

となる．f の分岐点の像や $\phi_1, \dots, \phi_m$ の極でない Q について $f^{-1}(Q) = \{P_1, \dots, P_d\}$ とすると，$h(P_i)$ はこの等式の各 ϕ_i の変数に Q を代入してえられる同一の m 次方程式を満たすことになるので，$m < d$ であれば m 個の値しか可能でない．特にある $i \neq j$ で $h(P_i) = h(P_j)$ となる．$\mathbf{C}(X)$ の元はすべて h の $\mathbf{C}(z)$ 係数の多項式となるので常に P_i と P_j で同じ値となる．一方，相異なる点 $P, Q \in X$ に対して，P, Q 以外の点 R をとればリーマン・ロッホの定理から容易にわかるように $l((2g+1)R-P) > l((2g+1)R-P-Q)$ であるから P では 0 で Q では 0 とならない有理型関数が存在する．これは矛盾なので $m \geqq d$ であり $[\mathbf{C}(X) : \mathbf{C}(z)] = d$ がわかる． 証明終わり

R^* の微分 dz は $z = 1/t$ と置いて $dz = -t^{-2}dt$ となるので ∞ で 2 位の極を持つ．

定理 2.5 コンパクトリーマン面 X について $g(X) = 0$ であることと $X \simeq R^* = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ であることは同値である．

証明　$X \simeq \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ であれば $2g - 2 = \deg(dz) = -2$ より $g = 0$ となる．

$g = 0$ とする．$P_0 \in X$ を任意に取ると，リーマン・ロッホの定理より $l(P_0) = 2$ となる．任意の $P, Q \in X$ について $\deg(P_0 - P - Q) = -1 < 0$ から $l(P_0 - P - Q) = 0$ なので $L(P_0)$ により埋め込み $\Phi_{|P_0|} : X \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ が定義される．$\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ は 1 次元であるから開写像となり，これから全射であるから同型である． 証明終わり

なお，この証明で $l(P_0) = 2$ から $X \simeq \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ を得る部分は $g = 0$ の仮定は必要としない．

以下では $g \geqq 1$ を仮定する．上の注意から任意の $P_0 \in X$ について $l(P_0) = 1$ である．$\deg(D) = 1$ であれば $l(D) \leqq 1$ であることもわかる．

$l(P_0) = 1$ より $l(2P_0) \leqq 2$ であるが，これが 2 となる場合を考える．

定理 2.6 $g \geqq 1$ で $P_\infty \in X$ について $l(2P_\infty) = 2$ とすると $\Phi_{|2P_\infty|}$ は固定点を持たず，$\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ への $2g + 2$ 個の点で分岐する 2 重被覆となる．

証明　任意の $P \in X$ について $\deg(2P_\infty - P) = 1$ より $l(2P_\infty - P) \leqq 1$ であるから $l(2P_\infty) = 2$ の仮定により $l(2P_\infty - P) = 1$ となる．したがって補題 2.2 により固定点を持たない．

$l(P_\infty) = 1$ であるから $f \in L(2P_\infty) \setminus L(P_\infty)$ が存在する．$\{1, f\}$ が $L(2P_\infty)$ の基底となることがわかる．$(f)_\infty = 2P_\infty$ であるから，任意の $a \in \mathbf{C}$ に対して $(f - a)_0$ は次数 2 である．$f : X \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ と考えれば，$(f - a)_0 = P + Q$ なら $f^{-1}(a) = \{P, Q\}$ である．ここで微分 df が 0 となる P については $a = f(P)$ で $P = Q$ となるが，このような P および a は有限個である．

f は P_∞ で 2 位の極を持つので df は P_∞ で 3 位の極を持つ．P_∞ 以外では df は正則であり，分岐する点で 1 位の零をもつ．1 位の零の数を n とすると $n-3 = \deg(K) = 2g-2$ より $n = 2g + 1$ を得る．結局 f は ∞ を含めて $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ の $2g + 2$ 個の点上で分岐していることがわかる． 証明終わり

定理 2.6 の条件を満たすコンパクトリーマン面を $g=1$ のとき楕円曲線，$g \geqq 2$ のとき超楕円曲線という．楕円曲線の場合，$\deg(K)=0$ で $l(K)=1$ であるから $K \sim 0$ である．

X を種数 g の超楕円曲面とする．定理 2.6 の証明で構成した $f: X \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ が $Q_1, \ldots, Q_{2g+1}$ と ∞ で分岐しているとする．このとき X には微分

$$\omega = \sqrt{\frac{(x-Q_1)\cdots(x-Q_{g-1})}{(x-Q_g)\cdots(x-Q_{2g+1})}}\,dx$$

が定義できて $K=(\omega)=2P_1+\cdots+2P_{g-1}$ となる．これは $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ の因子 $E=Q_1+\cdots+Q_{g-1}$ の f による引き戻しに等しく，$l(E)=l(K)=g$ であるから有理型関数の引き戻しによる同型 $L(E) \simeq L(K)$ が得られる．したがって，$\Phi_{|E|} \cdot f = \Phi_{|D|}$ であり $\Phi_{|D|}: X \to \mathbf{P}^{g-1}$ による X の像は $\Phi_{|E|}: \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}^{g-1}$ による $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ の像に等しい．

定理 2.7 (フルビッツ) $\phi: X \to Y$ をコンパクトリーマン面の正則写像で $\phi(X)$ は一点ではないとする．g を X の種数，g' を Y の種数とする．ϕ の被覆の次数を d とし $P_1, \ldots, P_s$ で分岐するとすれば等式

$$2g-2 = d(2g'-2) + \sum_{i=1}^{s}(e_{P_i}-1) \tag{2.1}$$

が成り立つ．

証明　Y の微分形式 fdg を (fdg) の台が $\phi(\{P_1, \ldots, P_s\})$ と交わらないようにとる．この微分形式の引き戻し $\phi^* fdg$ は各 P_i で位数 $e_{P_i}-1$ 位の零を持つので，因子 $(\phi^* fdg)$ 次数は (2.1) の右辺となる．これは X の微分の因子の次数 $2g-2$ に等しい．　証明終わり

系 2.8 コンパクトリーマン面 X の種数を g とすると，X の位相的オイラー数 $\chi(X)$ は $2-2g$ である．

証明　X の定数でない有理型関数 f をとれば正則写像 $f: X \to R^*$ が得られる．f の次数を d とし，$P_1, \ldots, P_s$ で分岐しているとする．R^* は球面 S^2 と同相なのでオイラー数は 2 である．R^* の三角形分割を f のすべての分岐点の像が頂点の一部となるようにとる．これを f により引き戻すことにより X の三角形分割が得られるが，面と辺の数が元の三角形分割の d 倍であるのに対して，頂点の数は d 倍より $\sum_{i=1}^{s}(e_{P_i}-1)$ だけ少ない．したがって X のオイラー数は

$$\chi(X) = 2d - \sum_{i=1}^{s}(e_{P_i}-1)$$

となる．これは $g'=0$ とした定理の等式により $2-2g$ に等しい．　証明終わり

3　$\wp$ 関数

τ を $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ となる複素数とする．$L = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$ は加法的位相群 $\mathbf{C}$ の離散的な部分群となる．商空間 $X = \mathbf{C}/L$ は有界閉集合 $\{a + b\tau\,;\, 0 \leqq a, b \leqq 1\}$ を被覆空間の基本領域として持つのでコンパクトである．また $\mathbf{C}$ の複素構造が商空間に降りて X もリーマン面となる．

$L' = L \setminus \{0\}$ と置くと，$\sum_{\omega \in L'} \omega^{-2}$ は収束しないが，$n > 2$ については $\sum_{\omega \in L'} \omega^{-n}$ は絶対収束する．n が奇数の場合は $\omega^{-n} + (-\omega)^{-n} = 0$ より，この総和は 0 である．

L についての $\wp$ 関数を

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L'} \left\{ \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\}$$

で定義する．複素数 z が $z \notin L$ であれば右辺は広義一様絶対収束することが確認できる．$z = 0$ では 2 位の極を持つ．絶対収束性より項別微分が可能なので，$\wp(z)$ の導関数は

$$\wp'(z) = \sum_{\omega \in L} \frac{-2}{(z-\omega)^3}$$

となる．任意の $\omega \in L$ について $\wp'(z+\omega) = \wp'(z)$ となることはこの級数表示から明らかである．$\wp'(z)$ は奇関数で $z \in L$ で 3 位の極を持ち，その他の点では正則である．

$\tau_1 = 1/2, \tau_2 = \tau/2, \tau_3 = (1+\tau)/2$ とおく．各 τ_i について

$$\wp'(z+\tau_i) = -\wp'(-z-\tau_i) = -\wp'(-z+\tau_i)$$

より $\wp'(z+\tau_i)$ も奇関数である．特に $\wp'(\tau_i) = 0\ (i = 1, 2, 3)$ となる．

$\wp(z)$ については

$$\wp(z) = \wp(\tau_2) + \int_{\tau_2}^{z} \wp'(t)dt$$

であるが，$\wp'(z)$ の周期性から

$$\wp(z+1) = \wp(z) + \int_{\tau_2}^{\tau_2+1} \wp'(t)dt$$

となる．ここで右辺の積分の部分は $\wp'(z+\tau_3) = \wp'(z+\tau_2+1/2)$ が奇関数であることから 0 となる．したがって $\wp(z+1) = \wp(z)$ である．τ_1 を積分の始点にとれば，同様に $\wp(z+\tau) = \wp(z)$ がわかるので，$\wp(z)$ も L について周期性をもつ．

$\wp(z)$ と $\wp'(z)$ から得られる X 上の有理型関数をそれぞれ同じ記号 $\wp(z), \wp'(z)$ で書くことにする．$0 \in L$ の同値類が表す X の点を P_0 とする．また，τ_i の同値類が表す X の点を P_i とする．

偶数 $n \geqq 4$ について $b_n = \sum_{\omega \in L'} \omega^{-n}$ とおく．

定理 3.1 等式

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60b_4\wp(z) - 140b_6 \tag{3.1}$$

が成り立つ．$\alpha_i = \wp(\tau_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ と置くと，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は相異なる複素数で，上の等式の右辺は

$$4\wp(z)^3 - 60b_4\wp(z) - 140b_6 = 4(\wp(z) - \alpha_1)(\wp(z) - \alpha_2)(\wp(z) - \alpha_3) \tag{3.2}$$

と因数分解される．

証明　$\wp(z)$ と $\wp'(z)$ を $\mathbf{C}$ の有理型関数として $z = 0$ でのローラン級数を考える．$\omega \in L'$ について

$$\frac{1}{z-\omega} = \frac{-1}{\omega}\left(1 - \frac{z}{\omega}\right)^{-1} = \frac{-1}{\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\omega^n}$$

であるから，両辺の 2 乗を計算することにより

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^n}{\omega^{n+2}}$$

がわかる．したがって

$$\sum_{\omega\in L'}\left\{\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\omega\in L'}\frac{(n+1)z^n}{\omega^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)b_{2n+2}z^{2n}$$

となる．これからローラン級数の低い次数の項を計算すると

$$\wp(z) = z^{-2} + 3b_4z^2 + 5b_6z^4 + \cdots$$

と，これを微分して

$$\wp'(z) = -2z^{-3} + 6b_4z + 20b_6z^3 + \cdots$$

がわかる．$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3$ を計算すると

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 = -60b_4z^{-2} - 140b_6 + \cdots$$

となる．これから $\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60b_4\wp(z)$ は $z = 0$ で正則で値は $-140b_6$ となることがわかる．これは L を周期に持つ正則関数となるので基本領域に絶対値が最大となる点がある．したがって，最大値の原理によりこの関数は定数 $-140b_6$ となる．以上で等式 (3.1) が得られた．

各 i について $\wp(z) - \alpha_i$ は $z = \tau_i$ で値が 0 であるが，微分も 0 となるので 2 位以上の零点である．まず $i \neq j$ について $\alpha_i \neq \alpha_j$ となることは，$\wp(z) - \alpha_i$ の極が $\wp(z)$ と同じで $2P_0$ なので，零も次数 2 で $2P_i$ となることによる．(3.2) の右辺と $\wp'(z)^2$ の差が 0 でないとすると P_0 での極が打ち消し合って位数が 5 以下となる一方，P_1, P_2, P_3 でそれぞれ 2 位以上の零点となるので，有理型関数の零の因子と極の因子の次数が等しいこと，すなわち定理 1.3 に矛盾する．　証明終わり

4　3 次曲線

$\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ の 3 次曲線 C はある斉次 3 次式 $F(X_1, X_2, X_3)$ で定義される曲線であり，非特異となるための条件として

$$\partial F/\partial X_1 = \partial F/\partial X_2 = \partial F/\partial X_3 = 0 \tag{4.1}$$

が $F = 0$ と共通解を持たない．F が既約でなければ，既約成分同士の交点が特異点となるので，C が非特異であるには F が既約多項式であることが必要である．非特異 3 次曲線を定義する $F(X_1, X_2, X_3)$ が $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ の座標変換により

$$X_2^2X_3 - X_1^3 - aX_1^2X_3 - bX_1X_3^2 - cX_3^3 \tag{4.2}$$

の形に出来ることを示したい．これは $x = X_1/X_3, y = X_2/X_3$ とすれば曲線が方程式

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c \tag{4.3}$$

で定義されることを意味する．座標は固定して $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ の線形変換により C をこの形の方程式を満たす位置に移動すると考えても同じことである．

$\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ の線形変換により一直線上にない任意の 3 点はそれぞれ $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ に変換できる．C の任意の点 P_∞ をとり，これを $(0, 1, 0)$ に移動させれば X_2^3 の係数は 0 となる．P_∞ での非特異性から $X_1X_2^2$ と $X_2^2X_3$ のいずれかの係数は 0 でない．この部分を $(aX_1 + bX_3)X_2^2$ とすれば，$ad - bc = 1$ となるように c, d をとり，X_1 を $-bX_1 + dX_3$ に，X_3 を $aX_1 - cX_3$ に変換すれば $X_1X_2^2$ の係数は 0 で $X_2^2X_3$ の係数は 1 となる．

しかし，このあと $X_1^2X_2$ の係数を 0 にすることが出来ないことに気づく．実は P_∞ を任意に取った場合は無理で，最初に P_∞ をヘッシアン，すなわちヘッシアン行列の行列式 $\det(\partial^2F/\partial X_i\partial X_j)$ が 0 となる C の点から取っていれば，この段階で $X_1^2X_2$ の係数は 0 となっている．F のヘッシアンは斉次 3 次式なので，0 となる点は必ず C に存在する．

あとは，また X_1, X_3 の線形変換で $X_1X_2X_3$ に係数を 0 にして，次に X_2, X_3 の線形変換で $X_2X_3^2$ に係数を 0 にすることにより，$X_2^2X_3$ と $X_1^3, X_1^2X_3, X_1X_3^2, X_3^3$ 以外の係数は 0 となる．このとき F の既約性から X_1^3 の係数は 0 でない．X_1 を定数倍で調節すれば求める形 (4.2) になる．

(4.3) の右辺は $c = 0$ となるように変換してから因数分解し，必要なら x と y をそれぞれ定数倍で置き換えて

$$y^2 = x(x - 1)(x - \lambda) \tag{4.4}$$

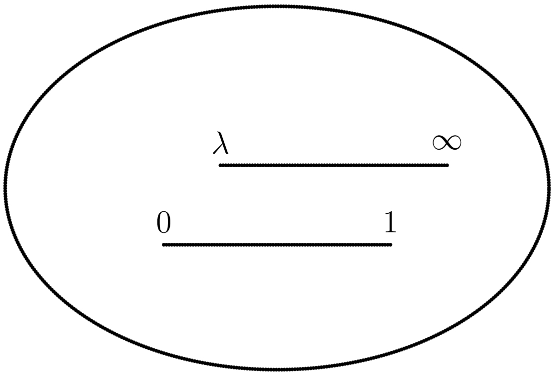
の形にできる．ここまで来ると 10 個の単項式の和であった斉次 3 次式が $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ の線形変換で移り合うものを同じとすれば一つのパラメーター λ だけで表示できることがわかる．すなわち非特異 3 次曲線全体の記述が手に届くところに来ている感じがする．あとは異なる λ がいつ同じ 3 次曲線を与えるかという問題となる．

次に 3 次曲線を複素平面の商空間と出来ることを示したい z を座標とするリーマン球面で 0 と 1 および λ と ∞ をそれぞれ交わらないように線で結び，これらの線に沿って切り目を入れる．方程式 (4.4) で定義された曲線は，この同じ切り目を入れたリーマン球面二つを切り目にそってつなぎ合わせた X で $x = z$ とすれば 3 次曲線と同じリーマン面の構造を持つ．二つのリーマン球面の $0, 1, \lambda, \infty$ はそれぞれ同一視されそれぞれリーマン面 X 上の点 $P_0, P_1, P_\lambda, P_\infty$ を与える．X のこの 4 点以外の点ではリーマン球面の座標 x をそのまま局所座標とすることができる．P_0 での局所座標としては，まず $t^2 = x$ である t を考える．$y^2 = t^2(t^2-1)(t^2-\lambda)$ で $(t^2-1)(t^2-\lambda)$ は P_0 の近傍で 0 でない正則関数なので P_0 での局所座標として $y = t\sqrt{(t^2-1)(t^2-\lambda)}$ をとることができる．P_1, P_λ についても同様に y が局所変数となる．

P_∞ については $x = 1/s,\ y = u/s^2$ とおくと (4.4) から類似の等式

$$u^2 = s(1-s)(1-\lambda s) \tag{4.5}$$

が得られ，この $(s,u) = (0,0)$ が P_∞ なので $u = y/x^2$ が局所変数となる．なお，ここで使われた座標 (s,u) は $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ 内に取れる座標ではない．詳しくは説明しないが，$\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ を 2 回ブローアップして 1 回ブローダウンして得られる次数 2 のヒルツェブルフ曲面上の局所座標である．



補題 4.1 微分形式 dx/y は X のすべての点で正則で零点を持たない．

証明　P_∞ 以外の点は (x,y) を座標とする $\mathbf{C}^2$ に含まれ，P_0, P_1, P_λ 以外の点では x が局所変数で $y \neq 0$ なので，これら 4 点以外では正則で零でない．P_0 では

$$\frac{dx}{y} = \frac{2dt}{\sqrt{(t^2-1)(t^2-\lambda)}}$$

であるから正則で零点でない．P_1, P_λ も同様である．P_∞ では

$$\frac{dx}{y} = \frac{-ds}{u}$$

であるから，ここも同様に正則で零でない．　証明終わり

$\omega_0 \in X$ を固定して各 $\omega \in X$ に対して積分

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{dx}{y}$$

を考える．値は積分の経路に依るので，普遍被覆空間 $\widetilde{X}$ からの写像 $\phi : \widetilde{X} \to \mathbf{C}$ が得られる．X はトーラスと同相なので基本サイクルを γ_1, γ_2 とし，

$$\delta_1 = \int_{\gamma_1} \frac{dx}{y}\ ,\ \ \delta_2 = \int_{\gamma_2} \frac{dx}{y}$$

する．

補題 4.2 ϕ はリーマン面の同型であり，コンパクトリーマン面の同型

$$X \simeq \mathbf{C}/(\mathbf{Z}\delta_1 + \mathbf{Z}\delta_2)$$

を引き起こす．

証明　0 にならない微分形式の積分なので ϕ は局所的に複素解析的同型で，特に開写像である．

$F \subset \widetilde{X}$ を連結でコンパクトな基本領域とすると $\phi(F)$ はコンパクトで

$$\phi(\widetilde{X}) = \bigcup_{a,b\in\mathbf{Z}} (\phi(F) + a\delta_1 + b\delta_2) \tag{4.6}$$

となる．

δ_1, δ_2 が $\mathbf{R}$ 上一次独立でなければ，この方向の原点を通る実直線を ℓ とする．このとき $\phi(F)+\ell$ は 2 つの ℓ に平行な直線 ℓ_1, ℓ_2 で囲まれる閉領域で $\phi(\widetilde{X})$ を含む．$\phi(F)\cap\ell_1$ は空ではなく $\phi(\widetilde{X})$ の境界点が含まれることになるが，ϕ は開写像なのでそれがあり得ない．

これより δ_1, δ_2 が $\mathbf{R}$ 上一次独立であることがわかるので，$\phi(\widetilde{X})$ は局所的に $\phi(F)$ の平行移動の有限和であり閉集合であることが記述 (4.6) からわかる．ϕ は開写像なので全射である．以上から ϕ は被覆写像となるが $\mathbf{C}$ が単連結なので同相写像である．

X は構成から位相的には 2 次元トーラスであるから，基本群は加群 $\mathbf{Z}\gamma_1 + \mathbf{Z}\gamma_2$ であり，$\widetilde{X}$ への基本群の作用は $\mathbf{C}$ の $\mathbf{Z}\delta_1 + \mathbf{Z}\delta_2$ による平行移動と可換になる．したがって $X \simeq \mathbf{C}/(\mathbf{Z}\delta_1 + \mathbf{Z}\delta_2)$ である．　証明終わり

$g = 1$ のコンパクトリーマン面は R^* の $0, 1, \lambda, \infty$ で分岐する 2 重被覆となるが，λ が違ったときにいつ同じリーマン面を与えるかは，別の $0, 1, \lambda', \infty$ について R^* の同型で $0, 1, \lambda, \infty$ が同時にこれら 4 点に移るかの問題となる．R^* の同型が $(az+b)/(cz+d)$ の形の変換であることがわかっているので，これは比較的容易に

$$\lambda' = \lambda,\ 1-\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{1-\lambda},\ \frac{\lambda-1}{\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1} \tag{4.7}$$

が条件であることがわかる．すなわち，$0,1,\infty$ をこれら 3 点に移す R^* の変換が $1-z$ と $1/z$ で生成される位数 6 の 3 次対称群であるが，この群の作用で λ の移る先だけである．λ を $0,1,\infty$ のいずれかに移してみても同じ形のものしか出てこない．これらを一つの複素数で表す工夫として

$$j = 256\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2} \tag{4.8}$$

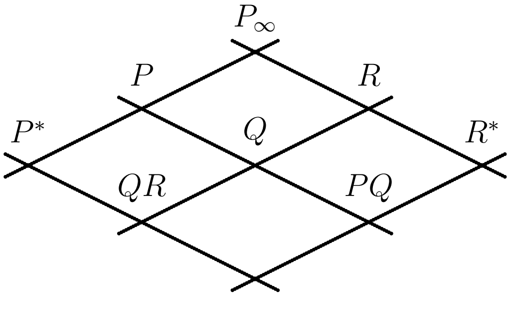
がある．定理 3.1 の $\wp$ 関数の等式に使われた $60b_4$ を g_2, $140b_6$ を g_3 とすると

$$j = \frac{1728g_2^3}{g_2^3-27g_3^2} \tag{4.9}$$

となることが知られている．

C を (4.4) で定義される $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ の 3 次曲線とする．代数曲線としての C に加群の構造が入ることを見る．(x,y) を座標とする $\mathbf{C}^2$ に含まれない C の点は $P_\infty=(0:1:0)$ だけである．$P=(a,b)\in C$ であれば $(a,-b)\in C$ であるので，この点を一般に P^* と書く．当然 $P^{**}=P$ である．$P=P_0,P_1,P_\lambda$ について $P^*=P$ であるが，P_∞ についても $P_\infty^*=P_\infty$ と定義する．

$P,Q\in C$ に対して，P,Q を通る $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ の直線は 3 次曲線 C ともう 1 点で交わるので，その点を PQ と書く．C に群の構造を入れるため $P\dot{+}Q$ を $(PQ)^*$ で定義する．定義から明らかに $PQ=QP$ であるから演算の可換性 $P\dot{+}Q=Q\dot{+}P$ が成り立つ．また P,Q を通る直線を $y=ax+b$ とすると P^*,Q^* を通る直線は $y=-(ax+b)$ であるから，$P^*Q^*=(PQ)^*$ および $P^*\dot{+}Q^*=(P\dot{+}Q)^*$ がわかる．P_∞ を通る直線は $x=a$ と書けるので $PP_\infty=P^*$ や $PP^*=P\dot{+}P^*=P_\infty$ がわかる．特にこの可換な演算について P_∞ が単位元，P の逆元が P^* となる．



最後に結合法則

$$(P\dot{+}Q)\dot{+}R = P\dot{+}(Q\dot{+}R)$$

を示したい．

$$(P\dot{+}Q)\dot{+}R = ((P\dot{+}Q)R)^* = ((PQ)^*R)^* = (PQ)R^*$$

および

$$P \dot{+} (Q \dot{+} R) = (P(Q \dot{+} R))^* = (P(QR)^*)^* = P^*(QR)$$

が成り立つので $(PQ)R^* = P^*(QR)$ を示せばよい．ここで $(PQ)R^*$ は R^* と PQ を通る直線上にあり，$P^*(QR)$ は P^* と QR を通る直線上にある．C と射影平面の直線の交わりである 3 点が因子として $3P_\infty$ に線形同値であることから，因子の線形同値の計算として

$$\begin{aligned} & (P_\infty + P + P^*) + (R + Q + QR) + (R^* + PQ + (PQ)R^*) \\ \sim\ & (P_\infty + R + R^*) + (P + Q + PQ) + (P^* + QR + P^*(QR)) \\ \sim\ & 9P_\infty \end{aligned}$$

となる．かっこを外して比べることにより $(PQ)R^* \sim P^*(QR)$ となることがわかるが，$\deg(D) = 1$ なら $l(D) = 1$ より C 上の異なる 2 点は線形同値でないので $(PQ)R^* = P^*(QR)$ がわかる．

以上で 3 次曲線 C が加群の構造を持つことがわかった．すでにリーマン面として $C \simeq \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau)$ の形であることがわかっているが，群構造はこの商加群の構造と同じである．なお，代数曲線は $\mathbf{C}$ 以外の一般の代数的閉体上でも定義される．その場合でも 3 次曲線は上記と同じ決め方で加群の構造を持つ．

5 モジュライ空間

モジュライ (moduli) は単語としてはモジュラス (modulus) の複数形である．モジュラスとは (4.4) の λ のような変数のことをいう．ある特定の不変量を持つ代数曲線や代数曲面全体，あるいは代数多様体を固定してその上のベクトル束全体などを分類する空間をモジュライ空間と言い，その構成方法や代数多様体としての性質を調べることが代数幾何学の大きな研究目標となっている．その明らかな原点が種数 1 のコンパクトリーマン面，すなわち楕円曲線の分類である．

楕円曲線 X, Y について X と Y が同型となるのは $j(X) = j(Y)$ が必要十分条件なので，楕円曲線の同型類は j 不変量で表される $\mathbf{C}$ 上の点として分類されると考えられる．このことを $\mathbf{C}$ が楕円曲線のモジュライ空間と言う．しかし，一般にはモジュライ空間にはさらに期待されることがある．モジュライ空間の各点に対応する多様体などが族としてその上に構成されていることである．

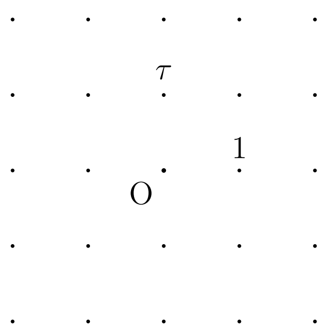
(4.4) の λ は $\mathcal{T} = \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ のすべての値をとるが，$\mathcal{T}$ では対応する楕円曲線を

$$\mathcal{E} = \{(t, (x_1 : x_2 : x_3))\ ;\ x_2^2 x_3 - x_1(x_1 - x_3)(x_1 - t x_3) = 0\} \subset \mathcal{T} \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$$

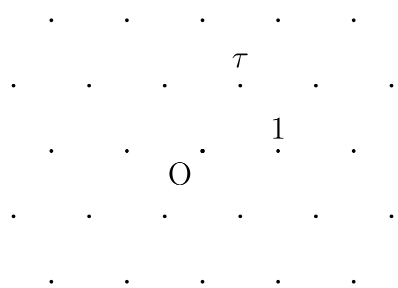
と族として構成できる．ここで $\mathcal{E}$ は 3 次元空間 $\mathcal{T} \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ に含まれる 2 次元の複素多様体となっている．第 1 成分への射影 $p_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{T}$ は複素多様体から複素領域への正

則写像であり，各 $\lambda \in \mathcal{T}$ についてファイバー $p_1^{-1}(\lambda)$ は (4.4) で定義されるコンパクトリーマン面である．

このような族が構成できるとわかりやすいが，j 不変量が値をとる $\mathbf{C}$ 上では不可能である．(4.8) で与えられる写像 $\lambda \mapsto j(\lambda)$ は一般には 6 対 1 の対応であるが，$j = 1728 = 12^3$ には $\lambda = -1, 1/2, 2$ の 3 点，$j = 0$ には $\lambda = (1+\sqrt{3}i)/2, (1-\sqrt{3}i)/2$ の 2 点しか対応しない．すなわち，この λ から j への写像はこれらの点でそれぞれ分岐指数 2 と 3 で分岐している．これらの場合対応する楕円曲線も特殊で，$X = \mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau)$ と書いた場合，前者は $\tau = i$ の場合であり，後者は $\tau = (1+\sqrt{3}i)/2$ の場合となる．X の群構造の単位元を固定した自己同型群は通常は位数 2 であるが，これらの場合はそれぞれ 4 と 6 になる．対象の自己同型群が大きくなる点があると族の構成の妨げになる．



$\tau = i$



$\tau = (1+\sqrt{3}i)/2$

3 次曲線の美しい族としてはヘッセによる

$$X^3 + Y^3 + Z^3 - 3\mu XYZ = 0 \tag{5.1}$$

がある（井草 [I1] 参照）．$(X : Y : Z)$ は $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ の斉次座標である．μ は $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ の元と考える．$\mu = \infty$ の場合は $XYZ = 0$ であり，定義される曲線は 3 直線 $X = 0, Y = 0, Z = 0$ の和となる．$\mu = 1$ の場合は ω を 1 の 3 乗根 $(-1+\sqrt{3}i)/2$ として

$$X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ = (X+Y+Z)(X+\omega Y+\omega^2 Z)(X+\omega^2 Y+\omega Z)$$

となるので，これも 3 直線の和である．同様に $\mu = \omega, \omega^2$ で (5.1) の左辺が 1 次式の積となり 3 直線の和であるが，その他の μ では非特異となり楕円曲線である．(5.1) の左辺のヘッシアンは

$$-54\mu^2(X^3 + Y^3 + Z^3 - (4/\mu^2 - \mu)XYZ)$$

となる．これから，すべての μ について曲線が 9 点

$$\begin{array}{lll} (0,-1,1), & (0,-\omega,1), & (0,-\omega^2,1), \\ (1,0,-1), & (1,0,-\omega), & (1,0,-\omega^2), \\ (-1,1,0), & (-\omega,1,0), & (-\omega^2,1,0) \end{array}$$

を通り，楕円曲線の場合はこれらがすべての変曲点となっていることがわかる．これらの一つ $(0,-1,1)$ を P_∞ として加群構造を入れると，他の 8 点については $3P \sim 0$ より $P \dot{+} P = (PP)^* = P^* = -P$ となり，$P \dot{+} P \dot{+} P = P_\infty$ がわかる．すなわち，これらの点は 3 等分点である．μ にも j 不変量を対応させることができる．その式は

$$j = \frac{27\mu^3(\mu^3+8)^3}{(\mu^3-1)^3} \tag{5.2}$$

で，ほとんどの μ について 12 対 1 の写像となる．

代数曲面の非特異点にはブローアップというその点を $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ で置き換える操作がある．このヘッセの 3 次曲線族の乗った $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ をこれら 9 点でブローアップして得られる代数曲面を $\mathcal{E}$ とすると，これはコンパクトな非特異代数曲面で $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ への正則写像 $\mu : \mathcal{E} \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ が定義される．つまり μ で定義される 3 次曲線上の点をすべて $\mu \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ に対応させる写像である．4 点 $1, \omega, \omega^2, \infty$ 以外ではファイバーは楕円曲線で，これら 4 点では退化した 3 次曲線としての 3 直線の和となっている．この例はモジュライ空間のコンパクト化への動機を与えている．

6 複素多様体

講義ではほとんど説明する時間はなかったが，一般次元の複素多様体の理論について少し紹介しておこう．代数多様体の場合は可換環論に基づくスキーム理論での記述が普通であるが，複素数体上定義された非特異な代数多様体は複素多様体となるので，複素多様体として調べることが可能である．

X を n 次元コンパクト複素多様体とする．リーマン面との違いは被覆する開集合 U_i の複素構造が $\mathbf{C}$ の開集合から $\mathbf{C}^n$ のそれに変わる点だけである．リーマン面は 1 次元複素多様体に他ならない．

X は位相多様体としての次元は $2n$ なのでホモロジー群 $\mathrm{H}_i(X, \mathbf{Z})$ は $0 \leqq i \leqq 2n$ について考えられ，コホモロジー群も同様である．$b_i = \dim_{\mathbf{R}} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{R})$ はベッチ数と呼ばれ重要な不変量である．種数 g のリーマン面の場合は $b_0 = 1, b_1 = 2g, b_2 = 1$ である．

話を進めるには層と層係数のコホモロジー群の用語が必要となる．コホモロジー群は $\mathbf{Z}$ や $\mathbf{R}$ などの係数加群を指定して定義されるが，この係数加群の部分を層に置き換えたのが層係数のコホモロジー群である．層は X の各開部分集合に加群を与えることにより定義されるが，一番基本的なものとしては開部分集合 U に対して U 上の正則関数全体のなす環 $\mathcal{O}_X(U)$ を対応させる構造層 $\mathcal{O}_X$ がある．また，$1 \leqq p \leqq n$ として，U に U 上の p 次正則微分形式（正則 p 形式）全体 $\Omega^p_X(U)$ を対応させる Ω^p_X などがある．この場合，$\Omega^p_X(U)$ は $\mathcal{O}_X(U)$ 加群となっているので，Ω^p_X を $\mathcal{O}_X$ 加群層という．局所的に構造層 $\mathcal{O}_X$ による有限性を持つ連接加群層 $\mathcal{F}$ を考えるのが普通で，その場合コホモロジー群 $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F})$ は有限次元 $\mathbf{C}$ ベクトル空間で，$0 \leqq i \leqq n$ 以外では 0 次元である．任

意の p について Ω_X^p は局所自由層あるいはベクトル束と呼ばれる連接加群層である．なお，一般に $\mathrm{H}^0(X,\mathcal{F})=\mathcal{F}(X)$ である．

X は $2n$ 次元の向き付け可能な位相多様体なので，ポアンカレ双対性により

$$\dim_{\mathbf{R}} \mathrm{H}^i(X,\mathbf{R}) = \dim_{\mathbf{R}} \mathrm{H}^{2n-i}(X,\mathbf{R}) \quad (0 \leqq i \leqq 2n) \tag{6.1}$$

であるが，これの類似の定理として

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{H}^q(X,\Omega_X^p) = \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{H}^{n-q}(X,\Omega_X^{n-p}) \quad (0 \leqq p,q \leqq n) \tag{6.2}$$

がある．複素多様体の各点の接空間は $\mathbf{C}$ ベクトル空間であるが，これにエルミート計量を導入することにより調和解析が可能となる．この定理の証明は調和解析による．なお，代数多様体としては，この定理はセールの双対性定理を使って証明される．

X のエルミート計量から定義されるラプラス作用素が複素空間のラプラス作用素に近い場合 X をケーラー複素多様体という．複素射影空間 $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ が標準的なエルミート計量によりケーラー複素多様体であり，$\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ に埋め込まれる代数多様体もケーラーということになる．ケーラー複素多様体であることは代数多様体に近いと言う意味で，良い複素多様体と考えられる．X がケーラー複素多様体の場合はホッジ理論の結果として

$$\mathrm{H}^k(X,\mathbf{R}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \simeq \bigoplus_{p+q=k} \mathrm{H}^q(X,\Omega_X^p) \quad (0 \leqq k \leqq 2n) \tag{6.3}$$

および

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{H}^q(X,\Omega_X^p) = \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{H}^p(X,\Omega_X^q) \quad (0 \leqq p,q \leqq n) \tag{6.4}$$

が成り立つ．ここで $\Omega_X^0=\mathcal{O}_X$ としている．これは (6.4) がもっと正確にはベクトル空間の複素共役であることを含めて $\mathrm{H}^k(X,\mathbf{R})$ のホッジ分解あるいはホッジ構造といい，X を含む多様体の族のモジュライ空間の構成に希望を与える重要な線形空間によるデータとなる．これはトレリ問題と呼ばれ多くの研究がある．なお，リーマン面はすべてケーラーであり，X がリーマン面の場合

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{H}^0(X,\Omega_X^1) = \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{H}^1(X,\mathcal{O}_X) = g \tag{6.5}$$

である．

複素多様体上の有理型関数は局所的に二つの正則関数 g,h により $f=g/h$ と表される関数として定義される．正則関数のなす環は局所的には一意分解環なので，1 点の近傍に注目すれば g,h は素因子分解可能である．g と h が共通因子を持たないとすれば h の零が f の極で g の零は f の零となる．極と零が交わる部分もあるが，そこは不確定点として値は考えない．このように X の開部分集合 U_i 上の有理型関数 f_i は U_i に極と零を定義するが，開集合族 $\{U_i\}$ が X を被覆していて $\{f_i\}$ が共通部分で重複度を込めて同じ極と零を与える場合に X 上の因子 D が定まる．$\mathbf{C}(X)$ を X 上の有理型関数全体とする．リーマン面の場合と同様に $L(D)=\{f\in\mathbf{C}(X)\,;\,(f)+D\geqq 0\}$ が定義され

る．層を使った言い方をすると，開集合 U に対して $(f)+D|U \geqq 0$ となる U 上の有理型関数 f 全体 $\mathcal{O}_X(D)(U)$ を対応させる加群層 $\mathcal{O}_X(D)$ について $L(D)=\mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X(D))$ となる．$\mathcal{O}_X(D)$ のように局所的に $\mathcal{O}_X$ と同型な層を可逆層と言う．

高次元のリーマン・ロッホの定理はヒルツェブルフ・リーマン・ロッホの定理と呼ばれ，連接層 $\mathcal{F}$ のオイラー数 $\chi(\mathcal{F})=\sum_{i=0}^n \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{H}^i(X,\mathcal{F})$ を与える公式である．以下 $h^i(X,\mathcal{F})=\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{H}^i(X,\mathcal{F})$ とする．リーマン面の場合はオイラー数の基本性質から $\chi(\mathcal{O}_X(D))=\deg(D)+\chi(\mathcal{O}_X)$ となるので，

$$h^0(X,\mathcal{O}_X(D))-h^1(X,\mathcal{O}_X(D))=\deg(D)+h^0(X,\mathcal{O}_X)-h^1(X,\mathcal{O}_X)=\deg(D)+1-g$$

とセールの双対性定理による $h^1(X,\mathcal{O}_X(D))=h^0(X,\mathcal{O}_X(K-D))$ を組み合わせるとリーマン・ロッホの定理なる．高次元リーマン・ロッホの定理は 1 次元の場合の X の位相的オイラー数 $c_1=2-2g$ への等式 $\chi(\mathcal{O}_X)=1-g=c_1/2$ の拡張と考えられる．一般の形は書かないが，2 次元の場合はネーターの公式と呼ばれる $\chi(\mathcal{O}_X)=(c_1^2+c_2)/12$ が本質的な部分である．なお，ここの c_1^2 は第 1 チャーン類 c_1 の自己交点数である．

参考文献

[K1] 岩澤 健吉，代数関数論，岩波書店，1952 年

[K1] 小平 邦彦，複素解析，岩波講座基礎数学，岩波書店，1978 年

[S1] 清水 英男，保型関数，岩波講座基礎数学，岩波書店，1978 年

[F1] W. Fulton, Algebraic Curves – An Introduction to Algebraic Geometry, 2008. http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf

[GH] P. Griffiths and J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, John Wiley & Sons, 1978.

[I1] J.-I. Igusa, Fibre systems of Jacobian varieties (III. Fibre systems of elliptic curves), American J. Math., **81**, (1959) 453–476.

[M1] D. Mumford, The Red Book of Varieties and Schemes, 2nd edition, Appendix: Curves and Their Jacobians, Lecture Notes in Math. 1358, Springer-Verlag, 1999.