2014 年度前期講義 代数幾何学 (ver. 1.8)

石田 正典

1　環付き空間

環はすべて単位元 1 を持つ可換環とする．ただし，$1 = 0$ で 0 のみからなる環も考える．

X を位相空間とする．X の各開集合 U に環 $\mathcal{A}(U)$ が与えられ，開集合の各包含関係 $V \subset U$ に対して環の準同型

$$\rho^U_V : \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{A}(V)\ ,\ \ x \mapsto x|V\ ,$$

が定まり次の条件を満たすとき，$\mathcal{A} = (\{\mathcal{A}(U)\}, \{\rho^U_V\})$ を**可換環の層**という．なお，ここでは $x|V$ は $\rho^U_V(x)$ を略記したものという以上の意味は無いが，この準同型は**制限写像**と呼ばれる．

(1) 任意の開集合 U に対して ρ^U_U は $\mathcal{A}(U)$ の恒等写像である．

(2) $W \subset V \subset U$ である開集合 U, V, W に対して準同型の合成 $\rho^V_W \cdot \rho^U_V$ は ρ^U_W に等しい．

(3) $\{U_\lambda\,;\lambda \in \Lambda\}$ が X の開集合の族で U をそれらの和集合とする．$a \in \mathcal{A}(U)$ が，すべての $\lambda \in \Lambda$ について $\rho^U_{U_\lambda}(a) = 0$ であれば $a = 0$ である．

(4) $\{U_\lambda\}$ および U を (3) と同様とする．各 λ について $a_\lambda \in \mathcal{A}(U_\lambda)$ が与えられていて，任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ について

$$\rho^{U_\lambda}_{U_\lambda \cap U_\mu}(a_\lambda) = \rho^{U_\mu}_{U_\lambda \cap U_\mu}(a_\mu)$$

となるとき，ある $a \in \mathcal{A}(U)$ が存在して $\rho^U_{U_\lambda}(a) = a_\lambda$ が任意の λ について成り立つ．

容易にわかるように，(3) は「$a, b \in \mathcal{F}(U)$ で，すべての $\lambda \in \Lambda$ について $\rho^U_{U_\lambda}(a) = \rho^U_{U_\lambda}(b)$ であれば，$a = b$ となる」と同値である．なお，準同型 ρ^U_V はもちろん層ごとに異なるが，記号を複雑にしないためにいつもこの記号で済ませる．これらの条件のうちで (1), (2) のみを与えたものを**前層**という．

位相空間 X とその上の可換環の層 $\mathcal{A}$ の組 $(X, \mathcal{A})$ を**環付き空間**と呼ぶ．

例 1.1 M を n 次元 C^∞ 多様体とする．各開集合 $U \subset M$ に対して $\mathcal{A}(U)$ を U 上の実数値 C^∞ 関数全体とし，$V \subset U$ について $\rho^U_V : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$ は U 上の関数 f に対し V への制限 $f|V$ を与える写像とすれば，$\mathcal{A}(U)$ は環で ρ^U_V は準同型となり条件 (1) から (4) を満たす．例えば $M = \mathbf{R}^n$ とすれば，$\mathcal{A}(U)$ は U 上の n 変数 C^∞ 関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 全体からなる可換環である．

$(X, \mathcal{A})$ を環付き空間とし，X' を X の開部分集合とする．X' の任意の開集合 U は X の開集合でもあるので，$\mathcal{A}'(U) = \mathcal{A}(U)$ と定義し，準同型 ρ_V^U も同じものと定義することにより X' 上の環の層 $\mathcal{A}'$ が得られる．これを $\mathcal{A}$ の X' への**制限**といい $\mathcal{A}|X'$ と書く．

上記の層の定義において，$\mathcal{A}(U)$ を加群 $\mathcal{F}(U)$ で置き換え，$V \subset U$ に対する $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ を加群の準同型とすることにより X 上の**加群の層**，あるいは条件 (1), (2) だけを仮定するなら前層の定義が与えられる．さらに，$(X, \mathcal{A})$ が環付き空間で $\mathcal{F}$ が X 上の加群の層で次の条件を満たすとき，$\mathcal{F}$ を $\mathcal{A}$ 加群と言う．

(1) 各開集合 U について $\mathcal{F}(U)$ は $\mathcal{A}(U)$ 加群である．

(2) $V \subset U$ に対して，環の準同型 $\mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$ により $\mathcal{F}(V)$ を $\mathcal{A}(U)$ 加群と考えると，制限写像 $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ は $\mathcal{A}(U)$ 準同型である．

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が $\mathcal{A}$ 加群であるとき，加群層の $\mathcal{A}$ 準同型 $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とは，各開集合 U での $\mathcal{A}(U)$ 準同型 $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ の集まり $\{\phi(U)\}$ で，$V \subset U$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \rho_V^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

を可換とするものとする．

$\mathcal{A}$ 準同型 ϕ に対して核 $\operatorname{Ker} \phi$ と余核 $\operatorname{Coker} \phi$ が $\mathcal{A}$ 加群として定義される．ここで $\operatorname{Ker} \phi$ は各 U について

$$\operatorname{Ker} \phi(U) = \operatorname{Ker}(\phi(U))$$

と置いて層として定義される．一方，U に $\operatorname{Coker}(\phi(U)) = \mathcal{G}(U)/\phi(U)(\mathcal{F}(U))$ を対応させると前層となるが層にはならないので，これを $\operatorname{Coker} \phi$ とは書けない．この前層に後で述べる**層化**を行って $\operatorname{Coker} \phi$ が得られる．

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を $\mathcal{A}$ 加群としたとき，各 $U \subset X$ に $\mathcal{A}(U)$ 加群 $\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathcal{G}(U)$ を対応させることは前層であるが層とは限らない．これを層化したものを $\mathcal{A}$ 加群のテンソル積と言い，$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}$ と書く．$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が環の層の準同型で，$\mathcal{F}$ が $\mathcal{A}$ 加群であれば，$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ は $\mathcal{B}$ 加群となる．また，各開集合 U について $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$ は $\mathcal{A}(U)$ 加群であるが，この対応も前層で，層化を行って層 $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ が得られる．

$\mathcal{A}_x$ を可換環の前層とする．各点 $x \in X$ について，**ストーク** $\mathcal{A}_x$ が x を含むすべての開集合 U についての帰納極限

$$\mathcal{A}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{A}(U)$$

として定義される．$\mathcal{A}_x$ は可換環である．x を含む任意の開集合 U について，可換環 $\mathcal{A}(U)$ から帰納極限 $\mathcal{F}_x$ への自然な準同型がある．すべての x について $\mathcal{A}_x$ が局所環であるとき $(X, \mathcal{A})$ を局所環付き空間という．例 1.1 はその例となっている．一般の加群前層や $\mathcal{A}$ 加群の $x \in X$ におけるストークも同様に定義される．

$\mathcal{F},\mathcal{G}$ を $\mathcal{A}$ 加群としたとき，テンソル積とストークの関係では，任意の $x\in X$ について $(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{G})_x$ と $\mathcal{F}_x\otimes_{\mathcal{A}_x}\mathcal{G}_x$ は自然に同型である．一方，$\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{G})_x$ は $\mathcal{A}_x$ 加群で自然な $\mathcal{A}_x$ 準同型 $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{G})_x\to\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_x}(\mathcal{F}_x,\mathcal{G}_x)$ は存在するが，これは単射とも全射とも限らない．$\mathcal{F}$ が局所的に有限表示を持てばこの準同型が同型となる（[EGA, I, 5.2] 参照）．

前層の層化　X 上の加群前層 $\mathcal{F}$ について**層空間** F と層化について説明しておこう．F は集合としてはストークの直和

$$F=\coprod_{x\in X}\mathcal{F}_x$$

で，これに位相を次のように入れる．開集合 $U\subset X$ と $s\in\mathcal{F}(U)$ に対して $U_s=\{(x,s_x)\,;\,x\in U\}$ とする．ここで (x,s_x) は F の部分集合である $\mathcal{F}_x$ に含まれる s の像 s_x である．この形の部分集合 U_s を開集合の基とする位相を F に入れることになるが，そのためには，同様の $V\subset X$ と $t\in\mathcal{F}(V)$ について $U_s\cap V_t$ がこの形の部分集合の和となることを示せば良い．$(x,u)\in U_s\cap V_t$ とする．このとき $u=s_x=t_x$ であるから $x\in W\subset U\cap V$ があって $s|W=t|W$ となる．したがって $v=s|W=t|W$ とおけば $(x,u)\in W_v\subset U_s\cap V_t$ となる．(x,u) は任意なので，$U_s\cap V_t$ はこの形の部分集合の和となる．この位相で当然 U_s は F の開集合となるが，射影 $\pi:F\to X$ の U_s への制限は U への同位相写像となることが容易にわかる．特に $x\mapsto(x,s_x)$ で定義される逆写像 $U\to U_s$ は連続である．層 $\tilde{\mathcal{F}}$ は

$$\tilde{\mathcal{F}}(U)=\{\alpha:U\to F\,;\,\alpha\text{ は連続で }\pi\cdot\alpha=1_U\}$$

で定義される．$V\subset U$ の場合，$\alpha\in\tilde{\mathcal{F}}(U)$ は連続写像としての V への制限を層での制限 $\alpha|V$ と定義する．この定義では $\tilde{\mathcal{F}}(U)$ は U からの連続写像の集まりとして定義されており，制限写像の意味も文字通りなので，層の公理である (3), (4) が満たされることも明らかである．すべての U について $\mathcal{F}(U)\to\tilde{\mathcal{F}}(U)$ が自然に定義され，前層の準同型 $\mathcal{F}\to\tilde{\mathcal{F}}$ が得られる．この準同型を含めて $\tilde{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{F}$ の層化という．$\alpha,\beta\in\tilde{\mathcal{F}}(U)$ と $x\in U$ について $\alpha(x)=\beta(x)$ であれば，$\alpha(U)$, $\beta(U)$ が開集合であることから，ある開近傍 $x\in V\subset U$ で $\alpha|V=\beta|V$ である．また，$\tilde{\mathcal{F}}$ の $x\in X$ でのストーク $\tilde{\mathcal{F}}_x$ は $\mathcal{F}_x$ に同型である．

$u:X\to Y$ が位相空間の連続写像で，$\mathcal{A}$ が X 上の環の層とする．このとき Y 上の環の層 $u_*\mathcal{A}$ が，各 $U\subset Y$ について $u_*\mathcal{A}(U)=\mathcal{A}(u^{-1}(U))$ と置いて定義される．Y の開集合 $V\subset U$ についての制限写像 $u_*\mathcal{A}(U)\to u_*\mathcal{A}(V)$ は X での開集合の包含関係 $u^{-1}(V)\subset u^{-1}(U)$ による $\mathcal{A}(u^{-1}(U))\to\mathcal{A}(u^{-1}(V))$ として定義される．これを $\mathcal{A}$ の**順像**という．加群層の順像も同様に定義される．$\mathcal{F}$ が $\mathcal{A}$ 加群であれば，$u_*\mathcal{F}$ は自然に $u_*\mathcal{A}$ 加群となる．

一方，$\mathcal{B}$ を Y 上の環の層とすると，引き戻し $u^*\mathcal{B}$ が次のように定義される．X 上の前層 $u^{-1}\mathcal{A}$ を X の開集合 U に対して $u^{-1}\mathcal{A}(U)$ を $u(U)$ を含む Y の開集合についての

極限

$$u^{-1}\mathcal{A}(U) = \varinjlim_{u(U)\subset V} \mathcal{B}(V)$$

として定義する．$u^{-1}\mathcal{A}$ は層になるとは限らない．これを層化したものを $u^*\mathcal{B}$ と定義する．加群層の引き戻しも同様に定義される．$\mathcal{G}$ が $\mathcal{B}$ 加群であれば，$u^*\mathcal{F}$ は自然に $u^*\mathcal{B}$ 加群となる．

環付き空間 $(X, \mathcal{A})$ から別の環付き空間 $(Y, \mathcal{B})$ への射は連続写像 $\bar{f} : X \to Y$ と環の層の準同型 $\phi : \mathcal{B} \to \bar{f}_*\mathcal{A}$ の組 $f = (\bar{f}, \phi)$ として定義される．このとき，まず $\bar{f}$ により引き戻し $\bar{f}^*\mathcal{B}$ が X 上の環の層として定義され，さらに ϕ に随伴的な環の層の準同型 $\bar{f}^*\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ が一意的に定まる．f が与えられると，X 上の $\mathcal{A}$ 加群 $\mathcal{F}$ に対して順像 $\bar{f}_*\mathcal{F}$ が ϕ を通じて $\mathcal{B}$ 加群となる．これを $f_*\mathcal{F}$ と書く．また，Y 上の $\mathcal{B}$ 加群 $\mathcal{G}$ に対して引き戻し $f^*\mathcal{G}$ が $\mathcal{A}$ 加群として定義される．引き戻し $\bar{f}^*\mathcal{G}$ は $\bar{f}^*\mathcal{B}$ 加群であるが，$f^*\mathcal{G}$ は $\bar{f}^*\mathcal{G} \otimes_{\bar{f}^*\mathcal{B}} \mathcal{A}$ として定義される．特に $f^*\mathcal{B} = \mathcal{A}$ であることに注意する．

$x \in X$ で $y = \bar{f}(x)$ の場合，Y 上の加群層 $\mathcal{G}$ について $(\bar{f}^*\mathcal{G})_x$ は $\mathcal{G}_y$ に同型で，$(f^*\mathcal{G})_x$ は $\mathcal{G}_y \otimes_{\mathcal{B}_x} \mathcal{A}_x$ に同型となる．

f_* や f^* の定義に用いた u^{-1} や $\bar{f}^*$ はこれ以降は出てこない．環付き空間の射 $f = (\bar{f}, \phi)$ については，通常は連続写像 $\bar{f}$ も f と書く．

帰納極限と射影極限　順序集合 Λ の元で添字づけられた集合族 $\{A_\lambda\ ;\ \lambda \in \Lambda\}$ が $\lambda \leqq \mu$ のとき写像 $\phi^\lambda_\mu : A_\lambda \to A_\mu$ が与えられ，条件 (1) 任意の λ について $\phi^\lambda_\lambda = 1_{A_\lambda}$, (2) $\lambda \leqq \mu \leqq \nu$ のとき $\phi^\mu_\nu \cdot \phi^\lambda_\mu = \phi^\lambda_\nu$ を満たすとき**帰納系**という．Λ が有向集合，すなわち任意の λ, μ に対して $\lambda \leqq \nu$ かつ $\mu \leqq \nu$ となる ν が存在することを仮定することが多い．有向集合の場合は，これが集合の帰納系でも加群や環の帰納系でも下記の同じ構成で帰納極限が定義出来る．

$$\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda / \sim$$

ここで $a \in A_\lambda$ と $b \in A_\mu$ は $\lambda \leqq \nu$ かつ $\mu \leqq \nu$ となる ν が存在して $\phi^\lambda_\nu(a) = \phi^\mu_\nu(b)$ となるとき同値とする．

射影系 $\{B_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ は矢印が逆で，$\lambda \leqq \mu$ のとき写像 $\psi^\mu_\lambda : B_\mu \to B_\lambda$ が与えられ，条件 (1) 任意の λ について $\psi^\lambda_\lambda = 1_{B_\lambda}$, (2) $\lambda \leqq \mu \leqq \nu$ のとき $\psi^\mu_\lambda \cdot \psi^\nu_\mu = \psi^\nu_\lambda$ を満たすものである．このとき射影極限が

$$\varprojlim_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{(a_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\,;\,\psi^\mu_\lambda(a_\mu) = a_\lambda, \lambda \leqq \mu\}$$

で定義される．これは Λ が有向集合である必要はない．加群の射影系なら極限も加群，環なら極限も環となる．

2　アフィンスキーム

A を（可換）環とする．A の素イデアル全体を $\mathrm{Spec}\, A$ と書く．ここでイデアル $P \subset A$ が**素イデアル**とは $P \neq A$ であって $xy \in P$ であれば $x \in P$ または $y \in P$ となることである．$A \neq \{0\}$ であれば A は少なくとも一つ極大イデアルを持つが，極大イデアルは素イデアルであるから，$\mathrm{Spec}\, A$ は空ではない．

例 2.1 $A = \mathbf{Z}$ の場合，素数 $2, 3, 5, \ldots$ について $2\mathbf{Z}, 3\mathbf{Z}, 5\mathbf{Z}, \ldots$ は極大イデアルであり素イデアルとなる．また，$\{0\}$ も $\mathbf{Z}$ の素イデアルである．

$f : A \to B$ を環の準同型とする．このとき，$Q \subset B$ が素イデアルであれば $f^{-1}(Q)$ は A の素イデアルとなる．この対応による写像 $\mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ を ${}^{\mathrm{a}}f$ と書く．$S \subset A$ が 1 を含む積閉集合とするとき，A の S による局所化を $S^{-1}A$ と書く．自然な準同型 $\phi : A \to S^{-1}A$ について次が成り立つ．

定理 2.2 ${}^{\mathrm{a}}\phi : \mathrm{Spec}\, S^{-1}A \to \mathrm{Spec}\, A$ は単射で像は $P \cap S = \emptyset$ となる A の素イデアル全体である．

$f \in A$ とする．積閉集合 $S = \{1, f, f^2, f^3, \ldots\}$ について $S^{-1}A$ を $A[f^{-1}]$ と書く．この場合の ${}^{\mathrm{a}}\phi$ の像は定理により f を含まない A の素イデアル全体 $D(f)$ となる．$f, g \in A$ について $D(f) \cap D(g)$ は f と g を含まない素イデアル全体であるから，これは fg を含まない素イデアル全体 $D(fg)$ に等しい．

I を A のイデアルとする．自然な準同型 $\phi : A \to A/I$ について ${}^{\mathrm{a}}\phi$ の像 $V(I)$ は I を含む A の素イデアル全体となる．特に I が単項イデアル $I = (f)$ の場合，$\mathrm{Spec}\, A$ は集合として $D(f)$ と $V((f))$ の直和となる．

定理 2.3 $I, J, I_\lambda\ (\lambda \in \Lambda)$ を A のイデアルとすると次が成り立つ．

(i) $V(A) = \emptyset$.

(ii) $V(\{0\}) = \mathrm{Spec}\, A$.

(iii) $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.

(iv) $V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)$.

証明はいずれも素イデアルの定義から容易にわかる．(iii) だけ示す．一般に $I_1 \subset I_2$ であれば $V(I_2) \subset V(I_1)$ であるから $V(I \cap J) \supset V(I) \cup V(J)$ となる．$V(I \cap J)$ に属する素イデアル P が $V(I)$ に含まれないとすると，$I \not\subset P$ であるから元 $x \in I \setminus P$ がとれる．任意の $y \in J$ に対して，$xy \in IJ \subset I \cap J \subset P$ で $x \notin P$ であるから $y \in P$ がわかる．したがって P は $V(J)$ に属する．以上で $V(I \cap J) \subset V(I) \cup V(J)$ もわかる．

$\mathrm{Spec}\, A$ の部分集合 F は，あるイデアル I について $F = V(I)$ となるとき閉集合と定義する．定理 2.3 により，これは閉集合の公理を満たし $\mathrm{Spec}\, A$ は位相空間となる．閉集合 $V(I)$ は共通部分 $\bigcap_{f\in I} V((f))$ となるので，開集合 $D(I) = \mathrm{Spec}\, A \setminus V(I)$ は $\bigcup_{f\in I} D(f)$

に等しい．したがって，$\{D(f)\ ;\ f \in A\}$ は $\operatorname{Spec} A$ の開集合の基となることがわかる．$D(f)$ の形の開集合を $\operatorname{Spec} A$ の**基本開集合**という．位相空間 $X = \operatorname{Spec} A$ は，以下で示すように，任意の開被覆が有限開被覆を持つという意味でコンパクトである．X は一般にはハウスドルフ性は持たないので，通常これを**準コンパクト**という．準コンパクト性を示すには基本開集合族 $\{D(f_\lambda)\}$ による X の被覆が有限開被覆を持つことを示せば良い．A の部分集合 $\{f_\lambda\}$ がイデアルとして A を生成しなければ，これを含む極大イデアル P が存在するが，これは $\{D(f_\lambda)\}$ が被覆であることに反する．したがって $\{f_\lambda\}$ から $f_1, \ldots, f_n$ を適当に選べば $h_1, \ldots, h_n \in A$ があって $h_1 f_1 + \cdots + h_n f_n = 1$ となる．このとき $\{f_1, \ldots, f_n\}$ は A を生成するので $X = D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_n)$ となる．

位相空間 $X = \operatorname{Spec} A$ に環の層 $\mathcal{O}_X$ を次のように定義する．$U = D(f)$ の場合は $\mathcal{O}_X(U) = A[f^{-1}]$ とする．一般の開集合 U については，$D(f) \subset U$ となる各 $f \in A$ についての $a_f \in A[f^{-1}]$ の集まり (a_f) で任意の $f, g \in A$ について $a_f|D(fg) = a_g|D(fg)$ を満たすもの全体を $\mathcal{O}_X(U)$ とする．すなわち，$D(f) \subset U$ となる各 $f \in A$ についての射影極限

$$\mathcal{O}_X(U) = \varprojlim_{D(f) \subset U} A[f^{-1}]$$

と書ける．$x \in \operatorname{Spec} A$ に対応する素イデアルを P とすると，ストーク $\mathcal{O}_{X,x}$ は A の $S = A \setminus P$ による局所化 $A_P = S^{-1}A$ に等しい．$\mathcal{O}_{X,x}$ を X の x での**局所環**という．A_P であるから可換環論の意味でも局所環になっている．

局所環付き空間 $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_X)$ を A による**アフィンスキーム**という．なお，通常は $\mathcal{O}_X$ は略して $\operatorname{Spec} A$ だけで，この構造層を持つアフィンスキームと考える．$\operatorname{Spec} A$ はデータとしては環 A だけから得られ，A は $\operatorname{Spec} A$ から $A = \mathcal{O}_X(\operatorname{Spec} A)$ として回復される．環の直和 $A \oplus B$ に対しては $\operatorname{Spec}(A \oplus B) = \operatorname{Spec} A \amalg \operatorname{Spec} B$ となる．

$\operatorname{Spec} A$ の $\mathcal{O}_X$ の構成についてもう少し詳しく述べる．上記のように定義した $\mathcal{O}_X$ が前層であることはわかる．$V \subset U$ に対する制限写像 $\rho^U_V : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ は，$(a_f)_{D(f) \subset U}$ を $(a_f)_{D(f) \subset V}$ に対応させる，射影極限から射影極限への自然な準同型である．

基本開集合が $\operatorname{Spec} A$ の開集合の基であることから，$\mathcal{O}_X$ が層であることを示すには，任意の $f \in A$ について層化による準同型 $\phi_f : A[f^{-1}] \to \widetilde{\mathcal{O}}_X(D(f))$ が同型であることを示せば良い．ϕ_f が単射であることを示し，その後全射であることを示すが，いずれも A を $A[f^{-1}]$ で置き換えることにより $f = 1$ の場合を示せば良い．

$x \in A$ として $\phi_1(x) = 0$ であれば，A の任意の素イデアル P について x は A_P での像が 0 となる．これは $s \in A \setminus P$ が存在して $sx = 0$ となることを示す．$\operatorname{Ann}(x) = \{a \in A\ ;\ ax = 0\}$ と置けば，これは A のイデアルとなるが，上記の $s \in \operatorname{Ann}(x)$ が $s \notin P$ であることが示すように，このイデアルはどの素イデアルにも含まれない．したがって $\operatorname{Ann}(x) = A$ となり $1 \in \operatorname{Ann}(x)$, すなわち $x = 1x = 0$ である．これで ϕ_1 が単射であることがわかる．一般にも ϕ_f が単射となる．

次に $\phi_1 : A \to \widetilde{\mathcal{O}}_X(X)$ が全射であることを示す．$u \in \widetilde{\mathcal{O}}_X(X)$ とする．層化の構成法から，X の各点のある近傍 U に u の制限を代表する $\mathcal{O}_X(U)$ の元が存在するが，X の

準コンパクト性からこれらの近傍のうち有限個で X が被覆される．すなわち，X の基本開集合による被覆 $X = D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_l)$ と各 i について $s_i \in A[f_i^{-1}]$ が存在して，$(s_i\,;\, i = 1, \ldots, l)$ が u を代表する．このとき $1 \leqq i, j \leqq l$ について，s_i, s_j の $A[(f_i f_j)^{-1}]$ への像をそれぞれ $s_i^{i,j}, s_j^{i,j}$ と書けば，$\phi_{f_i f_j}(s_i^{i,j}) = \phi_{f_i f_j}(s_i^{i,j}) = u|D(f_i f_j)$ となるが，$\phi_{f_i f_J}$ の単射性は前半ですでに示しているので $s_i^{i,j} = s_i^{i,j}$ となる．

i は有限個なので $s_i = t_i / f_i^N$, $t_i \in A$, とすべての i について共通の N で書くことができる．ここで N をさらに大きい方に随時変化させた場合，それに伴って t_i も変わるものとする．$s_i^{i,j} = s_i^{i,j}$ であることから $M \geqq 0$ があって $(f_i f_j)^M (f_i^N t_i - f_j^N t_j) = 0$ となるが，N を増やして $M = 0$ すなわち $f_i^N t_i - f_j^N t_j = 0$ とできる．$\{f_1, \ldots, f_l\}$ はイデアルとして A を生成するので $\{f_1^N, \ldots, f_l^N\}$ も A を生成する．したがって $h_1, \ldots, h_l \in A$ を選んで $h_1 f_1^N + \cdots + h_l f_l^N = 1$ とできる．$s = \sum_{j=1}^{l} h_j t_j$ と置く．このとき，各 i について

$$f_i^N s = \sum_{j=1}^{l} h_j f_i^N t_j = \sum_{j=1}^{l} h_j f_j^N t_i = (\sum_{j=1}^{l} h_j f_j^N) t_i = t_i$$

となり $A[f_i^{-1}]$ で $s = t_i / f_i^N = s_i$ となる．つまり $\phi_1(s)|D(f_i) = \phi_{f_i}(s_i) = u|D(f_i)$ となり，$\phi_1(s) = u$ よって ϕ_1 の全射性がわかる．

A がネーター環の場合，$X = \operatorname{Spec} A$ の任意の開集合 U に対して有限個の $f_1, \ldots, f_l \in A$ があって $U = D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_l)$ となる．層の定義から $\mathcal{O}_X(U)$ は図式

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X(D(f_i)) \underset{q_2}{\overset{q_1}{\rightrightarrows}} \bigoplus_{j,k=1}^{n} \mathcal{O}_X(D(f_j) \cap D(f_k))$$

の核となる．任意の $f \in A$ について $\mathcal{O}_X(D(f)) = A[f^{-1}]$ であることから

$$\mathcal{O}_X(U) = \operatorname{Ker}\left[\bigoplus_{i=1}^{n} A[u_i^{-1}] \underset{q_2}{\overset{q_1}{\rightrightarrows}} \bigoplus_{j,k=1}^{n} A[(u_j u_k)^{-1}]\right]$$

がわかる．A がネーター環でない場合は開集合は基本開集合の無限和となり得るが，$\mathcal{O}_X(U)$ の同様の記述はできる．ただし，直和記号は直積に直す必要がある．

A 加群 M に対して $\mathcal{O}_X$ 加群 $\widetilde{M}$ が各 $f \in A$ について $\widetilde{M}(D(f)) = M_f$ で定義できる．ここで $M_f = M \otimes_A A[f^{-1}]$ である．このように定義される層，あるいはこれに同型な $\mathcal{O}_X$ 加群を**準連接** $\mathcal{O}_X$ 加群という．また，A がネーター環で M が有限生成 A 加群の場合，$\widetilde{M}$ を**連接** $\mathcal{O}_X$ 加群という．環付き空間の加群層の連接性についてはもっと一般的な定義があるが省略する（[EGA, I, 0, 5.3] 参照）．

例 2.4 A を単項イデアル整域とすると A の素イデアルは素元 p による単項イデアル (p) と零イデアル $\{0\}$ である．$\operatorname{Spec} A$ で $\{0\}$ に対応する点 η を含む閉集合は，明らかに $V(\{0\}) = \operatorname{Spec} A$ だけである．すなわち $\{\eta\}$ の $\operatorname{Spec} A$ での閉包は $\operatorname{Spec} A$ となる．単項素イデアル (p) は極大イデアルであるから，これに対応する点 x は $\operatorname{Spec} A$ の閉点である．一般に整域 A について $\eta = \{0\}$ を $\operatorname{Spec} A$ の**生成点**という．

k が体で A が 1 変数多項式環 $k[t]$ の場合，素元は既約多項式を意味するので，$\mathrm{Spec}\, A$ の η 以外の点は $k[t]$ のモニックな既約多項式と 1 対 1 に対応する．$\mathrm{Spec}\, k[t]$ は k 上の**アフィン直線**と呼ばれる．さらに k が代数的閉体の場合はモニックな既約多項式は $t-a\ (a \in k)$ だけである．この既約多項式に $a \in k$ を対応させることにより，$\mathrm{Spec}\, k[t]$ の生成点以外は k の元に 1 対 1 に対応する．

環の準同型 $\phi : A \to B$ に対して，集合の写像として定義した ${}^{\mathrm{a}}\phi : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ は環付空間の写像と考える．構造層の順像 ${}^{\mathrm{a}}\phi_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, B}$ は A 加群と考えた B に付随する準連接層 $\widetilde{B}$ である．素イデアル $Q \subset B$ について $P = \phi^{-1}(Q)$ とすれば，自然な ϕ の拡張 $A_P \to B_Q$ が ${}^{\mathrm{a}}\phi$ による局所環の局所準同型となる．これが環付空間の写像によるストークの写像である．これをアフィンスキームの**正則写像**という．$f \in A$ に対して ${}^{\mathrm{a}}\phi$ によるアフィン開集合 $D(f) \subset \mathrm{Spec}\, A$ の逆像はアフィン開集合 $D(\phi(f)) \subset \mathrm{Spec}\, B$ となる．すなわち，この部分もアフィンスキームの正則写像と考えられ，ϕ の拡張である環の準同型 $A[f^{-1}] \to B[\phi(f)^{-1}]$ に対応する．正則写像 ${}^{\mathrm{a}}\phi : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ は $\mathrm{Spec}\, A$ の B **値点**という見方をする場合がある．アフィンスキーム $\mathrm{Spec}\, A$ は固定したまま，B をいろいろ考えることにより，代数多様体あるいは整数論的多様体としての $\mathrm{Spec}\, A$ を多方向から見ることができる．

例 2.5 $f(x,y,z)$ を整数係数の多項式とし，$A = \mathbf{Z}[x,y,z]/(f(x,y,z))$ とする．このとき，$p : \mathrm{Spec}\, \mathbf{Z} \to \mathrm{Spec}\, A$ を正則写像とすると，ある環準同型 $\phi : A \to \mathbf{Z}$ により $p = {}^{\mathrm{a}}\phi$ である．ϕ を与えることは $f(a,b,c) = 0$ を満たす整数の組 (a,b,c) を与えることと同等なので，$\mathrm{Spec}\, A$ の $\mathbf{Z}$ 値点とは方程式 $f(x,y,z) = 0$ の整数解のことと考えられる．同じ $\mathrm{Spec}\, A$ でも $\mathbf{R}$ 値点は環準同型 $\phi : A \to \mathbf{R}$ によって与えられるので実数解である．このほか，素数 p について $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/(p)$ やその代数的閉包 $\overline{\mathbf{F}}_p$, あるいは p 進整数環 $\mathbf{Z}_p$, 複素数体 $\mathbf{C}$ など，さまざまな環や体 B をとって $\mathrm{Spec}\, A$ の B 値点を考えることができる．

3　スキームとファイバー積

局所環付空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ が**スキーム**（文献 [EGA] ではここで定義するものを前スキームと呼び，これに分離条件をつけたものをスキームとしている）とは，任意の点 $x \in X$ に開近傍 U が存在して $(U, \mathcal{O}_X|U)$ がアフィンスキームと同型となることと定義する．X, Y をスキームとするとき，スキームの正則写像 $f : X \to Y$ とは環付空間の写像であって，アフィンスキームによる被覆 $X = \bigcup_\lambda U_\lambda$ および $Y = \bigcup_\alpha V_\alpha$ が存在して，各 U_λ に対して V_α が存在して $f(U_\lambda) \subset V_\alpha$ で制限写像 $f|U_\lambda : U_\lambda \to V_\alpha$ がアフィンスキームの正則写像となることと定義する．X から Y への正則写像全体を $\mathrm{Hom}(X,Y)$ と書く．$f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ が正則写像であれば，合成 $g \cdot f : X \to Z$ も正則写像となり，スキームのカテゴリーが得られる．

S をスキームとする．スキーム X と正則写像 $f : X \to S$ の組 (X, f) を S スキームといい，S スキームの正則写像 $\phi : (X, f) \to (Y, g)$ は正則写像 $\phi : X \to Y$ で $f = g \cdot \phi$ を満たすものとして定義される．S スキーム X から S スキーム Y への正則写像全体を $\mathrm{Hom}_S(X, Y)$ と書く．

例 3.1 R が環で X が $\mathrm{Spec}\, R$ スキームの場合，X は R 代数 A_λ によるアフィンスキーム $U_\lambda = \mathrm{Spec}\, A_\lambda$ の貼りあわせ $X = \bigcup_\lambda U_\lambda$ となる．このようなスキームは単に R スキームという．これが有限被覆で，$R = k$ が体，各 A_λ が有限生成の k 代数の場合 X を代数的スキームという．

スキームのファイバー積　X, Y を S スキームとする．スキーム Z が X と Y の S 上のファイバー積とは
(i) S スキームの正則写像 $p_1 : Z \to X$, $p_2 : Z \to Y$ が存在
(ii) 任意の S スキーム T に対して写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_S(T, Z) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(T, X) \times \mathrm{Hom}_S(T, Y) \\ f & \mapsto & (p_1 \cdot f\ ,\ p_2 \cdot f) \end{array}$$

が全単射となることと定義する．S, X, Y がアフィンスキーム $\mathrm{Spec}\, A, \mathrm{Spec}\, B, \mathrm{Spec}\, C$ の場合，$Z = \mathrm{Spec}(B \otimes_A C)$ がファイバー積となる．

定理 3.2 スキームのファイバー積は常に存在し，同型の範囲で一意的である．

S スキーム X, Y のファイバー積を $X \times_S Y$ と書く．

X を S スキーム，$T \to S$ を正則写像とするとき，$X_T = X \times_S T$ と置けばファイバー積からの正則写像 $X_T \to T$ により X_T を T スキームと考えることができる．これを X の正則写像 $T \to S$ による基底変換という．スキーム理論は正則写像 $X \to S$ に様々な条件をつけて考える．特に，基底変換によって保たれる条件を考えることが多い．

さらに，T を固定して正則写像 $T \to S$ をいろいろ考える場合もある．すなわち，$\mathrm{Hom}(T, S)$ の各元 α を S の T **値点**といい，それぞれにファイバー積 $X_\alpha = X \times_S (T, \alpha)$ が定義される．これを X の T 値点 α 上の**ファイバー**と言う．特に T が代数的閉体 k による $\mathrm{Spec}\, k$ の場合，$\mathrm{Hom}(T, S)$ の元を S の幾何学点と言い，X_α を X の幾何学点 $\alpha \in S(k)$ における**幾何学ファイバー**と言う．

注意 3.3 ファイバー積はスキームの基本的操作であり，局所的には環のテンソル積で記述される．したがって，具体的な考察には環のテンソル積の知識が必要である．いくつか基本的性質を挙げておく．
(1) B を A 代数，$I \subset A$ をイデアルとすると $A/I \otimes_A B = B/BI$.
(2) $I, J \subset A$ をイデアルとすると $A/I \otimes_A A/J = A/(I + J)$.
(3) B を A 代数，$A[t_1, \ldots, t_n]$ を多項式環とすると $A[t_1, \ldots, t_n] \otimes_A B = B[t_1, \ldots, t_n]$.

(4) $A[t_1,\dots,t_m]\otimes_A A[t_{m+1},\dots,t_n]=A[t_1,\dots,t_n]$.
(5) B,C が A 代数，$S\subset B$ が積閉集合であれば $S^{-1}B\otimes_A C$ は $B\otimes_A C$ の $S'=\{s\otimes 1\,;\,s\in S\}$ による局所化に等しい．
(6) k が代数的閉体で A,B が k 代数で整域であれば $A\otimes_k B$ も整域である．
(7) L/K が分離的 n 次拡大，$\overline{K}$ が K の代数的閉包であれば $L\otimes_K\overline{K}$ は $\overline{K}$ の n 個の直和に同型となる．特に $\operatorname{Spec}(L\otimes_K\overline{K})$ は n 個の点からなる．

例 3.4 k を体，$k[t_1,\dots,t_n]$ を n 変数多項式環としたとき，$\operatorname{Spec}k[t_1,\dots,t_n]$ を $\mathbf{A}_k^n$ と書いて k 上の n 次元**アフィン空間**と言う．k が代数的閉体であれば $\mathbf{A}_k^n$ の閉点全体は k^n に 1 対 1 に対応する．

例 3.5 k が代数的閉体で，$k[s]$, $k[t]$ を多項式環とすると

$$\operatorname{Spec}k[s]\times_{\operatorname{Spec}k}\operatorname{Spec}k[t]=\operatorname{Spec}(k[s]\otimes_k k[t])=\operatorname{Spec}k[s,t]$$

で，これは $\mathbf{A}_k^2$ である．素イデアルの集合としては，極大イデアル $(s-a,t-b)$, 既約多項式による単項素イデアル $(f(s,t))$ および $\{0\}$ からなる．一方，1 変数有理関数体 $k(s)$, $k(t)$ を考えると，これらはそれぞれ $k[s]$, $k[t]$ の商体で，$k(s)\otimes_k k(t)$ は $k[s,t]$ の積閉集合 $(k[s]\setminus\{0\})\times(k[t]\setminus\{0\}$ による局所化である．$\operatorname{Spec}(k(s)\otimes_k k(t))$ は $\operatorname{Spec}k[s,t]$ からすべての閉点と $(s-a)$ と $(t-b)$ の形の素イデアルに対応する点を除いた部分に 1 対 1 に対応する．すなわち，変数 s,t の両方が使われた既約多項式 $f(s,t)$ による単項素イデアルすべてと生成点からなる．

ファイバー積の構成に必要な環のテンソル積について書いておく．

A を可換環とし，$\mathcal{S}$ を 1 を乗法的な可換半群とすると，半群環 $A[\mathcal{S}]$ が次のように定義される．$A[\mathcal{S}]$ は不定元の集合 $\{[s]\,;\,s\in\mathcal{S}\}$ を基底とする A 自由加群で，これに A 代数の構造を $s,t\in\mathcal{S}$ に対し $[s][t]=[st]$ で導入する．すなわち，一般の積が $\sum_i a_i[s_i],\sum_j b_j[t_j]\in A[\mathcal{S}]$ に対して

$$(\sum_i a_i[s_i])(\sum_j b_j[t_j])=\sum_{i,j}a_ib_j[s_it_j]$$

で定義される．$A[\mathcal{S}]$ が $[1]$ を乗法の単位元として A 代数となることが確かめられる．

B, C を可換な A 代数とする．B, C はいずれも乗法的半群と考えられるので，直積 $B\times C$ も $(1,1)$ を単位元とする乗法的半群となる．したがって A 上の半群環 $A[B\times C]$ が定義される．B, C は A 加群であるから，テンソル積 $B\otimes_A C$ が存在するが，テンソル積の構成法から $B\otimes_A C$ は A 加群としての $A[B\times C]$ を

$$\left\{\begin{array}{l|l}[b+b',c]-[b,c]-[b',c] & \\ [b,c+c']-[b,c]-[b,c'] & a,a'\in A\\ [ab',c]-a[b,c] & b,b'\in B\\ [b',a'c]-a'[b,c] & c,c'\in C\end{array}\right\}$$

で生成される部分 A 加群 I で割ったものとなる．このとき，部分 A 加群各生成元に $[b'', c'']$ をかけても同じ形になることから，I は $A[B \times C]$ のイデアルでもあることが確認できるので，$B \otimes_A C = A[B \times C]/I$ は可換な A 代数となる．

D を可換な A 代数とし，$f : B \to D$, $g : C \to D$ を A 準同型とすると，$h : B \times C \to D$, $h(b, c) = f(b)g(c)$, は A 双線形写像であるから，A 準同型 $h' : B \otimes_A C \to D$ で $h'(b \otimes c) = h(b, c)$ となるものが一意的に存在する．この h' が環の準同型であることも容易にわかる．これから，$S = \operatorname{Spec} A$ とすると，任意の S スキーム X について写像

$$\operatorname{Hom}_S(X, \operatorname{Spec} B \otimes_A C) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(X, \operatorname{Spec} B) \times \operatorname{Hom}_S(X, \operatorname{Spec} C)$$

が全単射となることがわかる．すなわち $\operatorname{Spec} B \times_S \operatorname{Spec} C = \operatorname{Spec} B \otimes_A C$ となる．

テンソル積の性質 (6) は証明がかなり難しい．一般に体の拡大 L/K は代数的閉包 $\overline{K}$ について $L \otimes_K \overline{K}$ が整域であるとき**正則拡大**という．K が代数的閉体であれば任意の拡大が正則拡大となることは自明である．L/K が正則拡大であれば，任意の体の拡大 M/K について $L \otimes_K M$ が整域となる．L/K の正則拡大性の必要十分条件として，標数が 0 の場合は「K が L の中で代数的に閉」，標数が $p > 0$ の場合は「K が L の中で代数的に閉で $L \otimes_K K^{1/p}$ が整域」がある（永田 [N, 3.5] 参照）．

例 3.6 $\mathbf{Z}[x]$ を有理整数環 $\mathbf{Z}$ 上の 1 変数多項式環とする．$\operatorname{Spec} \mathbf{Z}[x]$ は初等的ではあるが，代数多様体とは違うスキームらしいスキームである．その構造を見ておこう．A を可換環，P を素イデアルとするとき，任意の部分環 $B \subset A$ について $P \cap B$ は B の素イデアルである．これは $B/(P \cap B)$ が A/P の部分環となり，A/P が整域であるから $B/(P \cap B)$ も整域となることからわかる．$P \subset \mathbf{Z}[x]$ を素イデアルとすると，$\mathbf{Z}$ は $\mathbf{Z}[x]$ の部分環であるから $P \cap \mathbf{Z}$ は $\mathbf{Z}$ の素イデアルとなる．$P \cap \mathbf{Z}$ がある素数 p により $p\mathbf{Z}$ に等しい場合と $P \cap \mathbf{Z} = \{0\}$ となる場合があるので分けて考える．

$P \cap \mathbf{Z} = p\mathbf{Z}$ の場合は P は $\mathbf{Z}[x]$ のイデアル $p\mathbf{Z}[x]$ を含む．したがって P は剰余環 $\mathbf{Z}[x]/p\mathbf{Z}[x]$ のある素イデアル $\overline{P}$ の自然な全射 $\mathbf{Z}[x]/p \to \mathbf{Z}[x]/p\mathbf{Z}[x]$ による引戻しとなる．$\mathbf{Z}[x]/p\mathbf{Z}[x] = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})[x]$ で $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ が体であることに注意すると，$\overline{P}$ は $\{0\}$ であるか，または $\mathbf{F}_p[x]$ のある既約多項式 $\bar{f}(x)$ による単項イデアル $(\bar{f}(x))$ となる．$\overline{P} = \{0\}$ の場合は $P = p\mathbf{Z}[x]$, $\overline{P} = (\bar{f}(x))$ の場合は $\bar{f}(x)$ の任意の代表元 $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ により $P = (p, f(x))$ となる．

$P \cap \mathbf{Z} = \{0\}$ の場合は P は積閉集合 $S = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ と交わらないので，局所化 $S^{-1}(\mathbf{Z}[x])$ の素イデアル P' の引き戻しとなるが，$S^{-1}(\mathbf{Z}[x]) = \mathbf{Q}[x]$ であるから $P' = \{0\}$ であるか，または $\mathbf{Q}[x]$ のある既約多項式 $\tilde{g}(x)$ により $P' = (\tilde{g}(x))$ となる．$P' = \{0\}$ の場合は明らかに $P = \{0\}$ となる．$P' = (\tilde{g}(x))$ の場合は $\tilde{g}(x)$ に適当な 0 でない有理数 u^{-1} をかけて原始既約多項式 $g(x) \in \mathbf{Z}[x]$ にすれば $P = (g(x))$ となる．実際，$(g(x)) \subset P$ は明らかで，$h(x) \in P = P' \cap \mathbf{Z}[x]$ を 0 以外の多項式とすると，$\tilde{q}(x) \in \mathbf{Q}[x]$ が存在して $h(x) = \tilde{q}(x)\tilde{g}(x)$ となる．$q(x) = v^{-1}\tilde{q}(x)$ が原始多項式となる $v \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ をとれば，$h(x) = uvq(x)g(x)$ である．ガウスの補題により $q(x)g(x)$ は原始多項式であるか

ら，uv は $h(x)$ のすべての係数の最大公約数の ± 1 倍である．特に $uvq(x) \in \mathbf{Z}[x]$ で $h(x) \in (g(x))$ となる．

一意的な環の準同型 $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}[x]$ に対応するアフィンスキームの正則写像 $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}[x] \to \operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ を考える．各素数 p について $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ であるから，$\operatorname{Spec}\mathbf{F}_p \to \operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ が存在し，ファイバー $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}[x] \times_{\operatorname{Spec}\mathbf{Z}} \operatorname{Spec}\mathbf{F}_p$ は $\operatorname{Spec}\mathbf{F}_p[x]$ となる．すなわち，体 $\mathbf{F}_p$ 上の直線 $\mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_p}$ である．$\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ の生成点には $\operatorname{Spec}\mathbf{Q}$ から正則写像があって，ファイバーは $\operatorname{Spec}\mathbf{Q}[x] = \mathbf{A}^1_{\mathbf{Q}}$ となる．

環 A とイデアル I について，自然な全射 $A \to A/I$ に対応するアフィンスキームの正則写像 $\operatorname{Spec}(A/I) \to \operatorname{Spec} A$ を**閉埋め込み**という．一般のスキームの正則写像 $f : Y \to X$ も，任意のアフィン開集合 $U \subset X$ 上への制限 $f^{-1}(U) \to U$ がアフィンスキームの閉埋め込みとなるとき**閉埋め込み**という．S スキーム X に対し $(1_X, 1_X)$ に対応する正則写像 $\Delta_X : X \to X \times_S X$ を X の**対角写像**という．X のアフィン被覆 $\{U_\lambda\}$ を適当にとれば，Δ_X の各 $U_\lambda \times_S U_\lambda$ 上への制限は閉埋め込みになるが，全体として Δ_X が閉埋め込みになるとは限らない．スキームの正則写像 $X \to S$ が**分離的**とは Δ_X が閉埋め込みになることと定義する．これは $\Delta_X(X)$ が $X \times_S X$ の閉集合となることと同値である．

4 射影スキーム

可換環 A が**次数付き環**とは，A が部分加群の直和 $\bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ となっていて，任意の $i, j \geqq 0$ について $A_i A_j \subset A_{i+j}$ となっていることと定義する．後で述べる $\mathbf{Z}$ に次数を持つ次数付き環と区別したい場合は非負次数付き環と呼ぶ．次数付き環 $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ について，$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ の元を A の**斉次元**という．0 以外の斉次元 f は $f \in A_i$ となる i が一意的に決まるので，これを f の**次数**といい $\deg f$ と書く．A の任意の元 a は $a = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ $(a_i \in A_i)$ の形に一意的に書ける．各 a_i を a の i 次の**斉次成分**という．A の単位元 1 は A_0 に含まる．実際 $1 = e_0 + \cdots + e_n$ $(e_i \in A_i, i = 1, \ldots, n)$ とすれば，任意の斉次元 $a \in A_m$ に対して

$$a = a1 = ae_0 + \cdots + ae_n$$

となるが，この等式の m 次の成分を見れば $a = ae_0$ がわかる．A の任意の元は斉次元の和であるから $e_0 = 1$ となることがわかる．A_0 は積について閉じていて 1 を含むので A の部分環である．各 i について $A_0 A_i \subset A_i$ であるから，A_i は A_0 加群となっている．

もっと一般に $\mathbf{Z}$ に次数を持つ次数付き環 $A = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} A_i$ も考える．この場合は $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} A_i$ の元が斉次元となる．後で詳しく述べるように，非負次数付き環を正の斉次元で局所化すると $\mathbf{Z}$ に次数を持つ次数付き環となる．なお，非負次数付き環 $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ も $i < 0$ について $A_i = \{0\}$ と考えれば $\mathbf{Z}$ に次数を持つ次数付き環である．

次数付き環 A のイデアル I は斉次元で生成されているとき**斉次イデアル**といい，さらに I が素イデアルのとき**斉次素イデアル**という．斉次イデアル I が斉次素イデアル

であることは，斉次元 a,b について $a,b \notin I$ なら $ab \notin I$ で判定される．次数付き環 A の斉次イデアル I による剰余環はまた次数付き環となる．次数付き環 A の部分環 B は $B = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} (B \cap A_i)$ であるとき**斉次部分環**という．斉次部分環はまた次数付き環である．

一般の可換環について成立していたことは，次数付き環では元を斉次元，イデアルを斉次イデアル，部分環を斉次部分環に置き換えて同様のことが成立することが多い．例えば，次数付き環 A が整域であるための必要十分条件は，任意の 0 でない斉次元 $a,b \in A$ について $ab \neq 0$ となることである．

補題 4.1 一般の可換環の場合と同様に次のことが成り立つ．

(1) A が次数付き環で f が冪零でない斉次元であれば，f を含まない A の斉次素イデアルが存在する．もっと一般に，I が斉次イデアル，S が斉次元からなる積閉集合で $S \cap I = \emptyset$ であれば，I を含み S と交わらない A の斉次イデアルには極大なものが存在し，それは常に素イデアルとなる．

(2) 次数付き環 A が斉次部分環 B の整拡大であれば，B の任意の斉次素イデアル P に対して A の斉次素イデアル P' で $P = P' \cap B$ となるものが存在する．

証明　(1) I を含み S と交わらない A の斉次イデアル全体を考えると，これが帰納的順序集合となるので，ツォルンの補題により極大元 P が存在する．斉次元 $a,b \notin P$ が $ab \in P$ を満たせば，P の極大性から $s \in P + Aa, t \in P + Ab$ となる $s,t \in S$ が存在する．$st \in (P + Aa)(P + Ab) \subset P$ であるから $P \cap S \neq \emptyset$ となり矛盾する．よって P は条件を満たす斉次素イデアルとなる．

(2) P に含まれない B の斉次元全体を S とすれば積閉集合で，S と交わらない A の斉次イデアルで極大なものを P' とする．このとき，A/P' が $B/(P' \cap B)$ の整拡大であることから $(P' \cap B)/P = 0$ となる．すなわち $P = P' \cap B$ である．この最後の部分は補題 4.9 として最後に書く．　証明終わり

補題 4.2 次数付き環 $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ と次数正の斉次元 $u_1, \ldots, u_n \in A$ について次は同値である．

(1) 環 A のイデアル $A_+ = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$ は $\{u_1, \ldots, u_n\}$ で生成されている．

(2) 環 A は A_0 上 $\{u_1, \ldots, u_n\}$ で生成されている．

証明　(1) を仮定する．A の任意の 0 でない斉次元 f が部分環 $A_0[u_1, \ldots, u_s]$ に含まれることを示せば (2) が得られる．これを $\deg f$ についての数学的帰納法で示す．$\deg f = 0$ であれば $f \in A_0$ であるから正しい．$\deg f = n > 0$ とし，$n-1$ 次以下の斉次元はすべてこの部分環に含まれるとする．$f \in A_+$ であるから

$$f = f_1 u_1 + \cdots + f_s u_s$$

と書けるが，この等式の次数 n の部分に注目すれば，各 f_i をその $n - \deg u_i$ 次の斉次成分と置き換えても等式が成り立つので，$f_1, \ldots, f_s$ はすべて斉次元として良い．このと

き $\deg u_i > 0$ より $\deg f_i < n$ であり，各 f_i は部分環 $A_0[u_1, \ldots, u_s]$ に含まれる．したがって，等式から f もこの部分環に含まれる．これで (1) から (2) が得られた．

(2) を仮定すると A の任意の元は A_0 の元を係数とする $u_1, \ldots, u_n$ の多項式に書けるが，A_+ の元であれば 0 次の成分が 0 なので定数項がなく，すべての項が $u_1, \ldots, u_n$ のいずれかを因子に含む．したがって A_+ はイデアル $(u_1, \ldots, u_n)$ に含まれる．$u_1, \ldots, u_n \in A_+$ であるから，この 2 つのイデアルは一致し (1) がわかる．　証明終わり

命題 4.3 次数付き環 $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ について次は同値である．

(1) A はネーター環である．

(2) A_0 はネーター環で，環 A のイデアル $A_+ = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$ は有限個の斉次元で生成されている．

(3) A_0 はネーター環で，環 A は A_0 上有限個の斉次元で生成されている．

証明　補題 4.2 により (2) と (3) は同値である．

(1) を仮定し (2) を示す．まず $A_0 \simeq A/A_+$ であるから A_0 もネーター環となる．また A_+ はネーター環 A のイデアルであるから有限生成である．このとき，各生成元の斉次成分は A_+ の斉次元であるから A_+ は有限個の斉次元で生成される．

(3) を仮定すると A はネーター環 A_0 上有限生成であるから，ヒルベルトの基底定理によりネーター環となる．これで (3) から (1) もわかる．　証明終わり

次数付き環 $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ が A_0 上有限生成であるとし，イデアル A_+ が斉次元 $u_1, \ldots, u_s$ で生成されるとする．**射影スキーム** $\operatorname{Proj} A$ は A の A_+ を含まない斉次素イデアル全体の集合に次のようにスキームの構造を入れたものである．

各 u_i について局所化 $A[u_i^{-1}]$ は A の斉次元 f に対して $\deg(f/u_i^d) = \deg f - d \deg u_i$ と定義することにより $\mathbf{Z}$ に次数を持つ次数付き環となる．この場合も $A[u_i^{-1}] = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A[u_i^{-1}]_i$ の次数 0 の部分 $A[u_i^{-1}]_0$ は部分環となる．さらに $A[u_i^{-1}]_0$ のイデアル J に対して $A[u_i^{-1}]J$ は $A[u_i^{-1}]$ のイデアルで，$A[u_i^{-1}]$ の直和分解から明らかに $A[u_i^{-1}]J \cap A[u_i^{-1}]_0 = J$ となっている．特に，A がネーター環であれば $A[u_i^{-1}]_0$ のイデアルの昇鎖は $A[u_i^{-1}]$ のネーター性により有限で止まる．したがって，A がネーター環の場合 $A[u_i^{-1}]_0$ もネーター環となる．A による射影スキーム $\operatorname{Proj} A$ は $\{\operatorname{Spec}(A[u_i^{-1}]_0) \ ; \ i = 1, \ldots, s\}$ で被覆されるが，記述を容易にするため，u_i を適当な冪で置き換え，任意の i, j について $\deg u_i = \deg u_j$ と仮定する．この場合，各 $A[u_i^{-1}]$ は不変であるが $A_+ = (u_1, \ldots, u_s)$ とした条件は $A_+ \subset \sqrt{(u_1, \ldots, u_s)}$ に弱められる．しかし，この場合でも斉次素イデアル P が A_+ を含む必要十分条件は P が $u_1, \ldots, u_s$ をすべて含むことである．

u_i を含まない A の斉次素イデアル全体を $D_+(u_i)$ とする．このとき $P \in D_+(u_i)$ に $P^{(i)} = PA[u_i^{-1}] \cap A[u_i^{-1}]_0$ を対応させることにより，$D_+(u_i)$ は $\operatorname{Spec}(A[u_i^{-1}]_0)$ と同一視される．また，$P^{(i)}$ から P は自然な準同型 $A \to A[u_i^{-1}]$ による $A[u_i^{-1}]P^{(i)}$ の引き戻しの根基として回復される．A_+ を含まない斉次素イデアルは $u_1, \ldots, u_s$ のいずれかを含まないので，$\operatorname{Proj} A = D_+(u_1) \cup \cdots \cup D_+(u_s)$ である．また $D_+(u_i u_j) = D_+(u_i) \cap D_+(u_j)$

は $\mathrm{Spec}(A[(u_iu_j)^{-1}]_0)$ となるが，

$$A[(u_iu_j)^{-1}]_0 = A[u_i^{-1}]_0[(u_j/u_i)^{-1}] = A[u_j^{-1}]_0[(u_i/u_j)^{-1}] \tag{1}$$

であるから，$D_+(u_i)$ と $D_+(u_j)$ はアフィンスキームとしてそれらの基本開集合で貼り合わされる．得られたスキーム $\mathrm{Proj}\, A$ の分離性を示すには，各 (i,j) について環準同型 $A[u_i^{-1}]_0 \otimes_{A_0} A[u_j^{-1}]_0 \to A[(u_iu_j)^{-1}]_0$ の全射性を示す必要があるが，これもこの等式 (1) から明らかである．A が A_0 代数であるから，各 $A[u_i^{-1}]_0$ も A_0 代数となっており，$\mathrm{Proj}\, A$ は A_0 スキームとなっている．$I \subset A$ が斉次イデアルであれば，各 i について $(IA[u_i^{-1}])_0$ は $A[u_i^{-1}]_0$ のイデアルで $D_+(u_i)$ の閉部分スキームを定義する．これらは $\mathrm{Proj}\, A$ で貼り合わされて閉部分スキーム $Z(I)$ となる．

以下，非負次数付き環は 0 次の斉次元からなる部分環上有限生成のものだけ考える．

非負次数付き環の準同型 $f : A \to B$ は任意の i について $f(A_i) \subset B_i$ となるとき**斉次準同型**という．このとき，$u \in A_+$ を斉次元とすると f は斉次準同型 $A[1/u] \to B[1/f(u)]$ および 環準同型 $A[1/u]_0 \to B[1/f(u)]_0$ を引き起こすので，アフィンスキームの正則写像 $D_+(f(u)) \to D_+(u)$ を与える．$f(A_+)$ で生成される B のイデアルを $I(f)$ とすれば，$I(f)$ は斉次イデアルであるから $\mathrm{Proj}\, B$ の閉部分スキーム $Z(I(f))$ を定義する．正則写像 $D_+(f(u)) \to D_+(u)$ の u についての貼り合わせとして，スキームのアフィン写像 ${}^{\mathrm{p}}f : \mathrm{Proj}\, B \setminus Z(I(f)) \to \mathrm{Proj}\, A$ が得られる．特に B_+ が $I(f)$ の根基に含まれる場合は $Z(I(f)) = \emptyset$ であるから，${}^{\mathrm{p}}f$ は $\mathrm{Proj}\, B$ から $\mathrm{Proj}\, A$ への正則写像となる．なお，$I \subset A$ が斉次イデアルの場合，自然な全射準同型 $A \to A/I$ により，$\mathrm{Proj}(A/I) \to \mathrm{Proj}\, A$ が得られるが，これは $\mathrm{Proj}(A/I)$ から $Z(I)$ へのスキームの同型である．

例 4.4 (射影空間) A を体 k 上の多項式環 $k[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ とする．$x_1, \ldots, x_{n+1}$ を通常通りすべて次数 1 の斉次元と考えることにより A は次数付き環となる．$A_+ = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ であるから $\mathrm{Proj}\, A = D_+(x_1) \cup \cdots \cup D_+(x_{n+1})$ である．各 i について $D_+(x_i)$ は x_i/x_i を除く $x_1/x_i, \ldots, x_{n+1}/x_i$ が座標の n 次元のアフィン空間

$$\mathrm{Spec}\left(k\left[\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right]\right)$$

となっている．これが n 次元射影空間である．

命題 4.5 A を A_0 上有限生成の次数付き環，$u_1, \ldots, u_s$ を次数正の斉次元，$B = A_0[u_1, \ldots, u_s]$ とすると次は同値である．

(1) A は B 上整である．

(2) A_+ は B_+A の根基に含まれる．

証明　A の有限生成性から，次数正の斉次元 $x_1, \ldots, x_n \in A$ があって $A = B[x_1, \ldots, x_n]$ となる．A の部分環 C と部分集合 $S \subset C$ について $\langle S \rangle_C$ で S で生成された C のイデアルを表す．この書き方で $B_+ = \langle u_1, \ldots, u_s \rangle_B$, $B_+A = \langle u_1, \ldots, u_s \rangle_A$ である．

まず (1) を仮定し，x を A_+ の 0 でない斉次元とする．x は B 上整であるから $m > 0$ と $b_1, \ldots, b_m \in B$ が存在して

$$x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m = 0$$

となる．ここで $\deg x = d$ として，各 i について b_i をその id 次成分と取り替えてもこの等式は正しい．したがって，各 b_i は B_+ の元としてよい．このとき x^m 以外の項を右辺に移項すれば x^m が B_+A に含まれることがわかる．このような x は A_+ を生成しているので，A_+ は B_+A の根基に含まれる．

次に (2) を仮定して A が $B[x_1, \ldots, x_t]$ 上整となる最小の $0 \leqq t \leqq n$ をとる．$t = n$ では明らかに整であるから最小値は存在する．$t > 0$ とする．x_t が $\langle u_1, \ldots, u_s \rangle_{B[x_1,\ldots,x_t]}$ の根基に含まれることを示す．これには $\{u_1, \ldots, u_s\}$ を含む $B[x_1, \ldots, x_t]$ の任意の素イデアル P が x_t を含むことを示せばよい．仮定から A は $B[x_1, \ldots, x_t]$ の整拡大であるから，A の素イデアル P' で $P = P' \cap B[x_1, \ldots, x_t]$ となるものが存在する．$\{u_1, \ldots, u_s\} \subset P'$ より P' は B_+A の根基を含むので，仮定から A_+ を含む．$x_t \in A_+$ であるから，P' および P は x_t を含む．特に x_t のある冪 x_t^m が $\langle u_1, \ldots, u_s \rangle_{B[x_1,\ldots,x_t]}$ に含まれるので，$b_1, \ldots, b_s \in B[x_1, \ldots, x_t]$ があって

$$x_t^m = u_1 b_1 + \cdots + u_s b_s$$

となる．ここでも $b_1, \ldots, b_s$ は斉次元で，b_i が 0 でなければ $\deg u_i + \deg b_i = m \deg x_t$ と仮定できる．このとき，$\deg u_i > 0$ より，各 b_i を $x_1, \ldots, x_t$ の多項式で表したときの x_t の次数は $m - 1$ 以下であるから，この等式を左辺にまとめて x_t の多項式とすれば x_t が $B[x_1, \ldots, x_{t-1}]$ 上整であることがわかる．A は $B[x_1, \ldots, x_t]$ の整拡大なので $B[x_1, \ldots, x_{t-1}]$ 上でも整となり t の最小性に矛盾する．したがって $t = 0$, すなわち (1) が成り立つ．　証明終わり

定理 4.6 A を A_0 上有限生成の次数付き環とすると，自然な正則写像 $\phi : \operatorname{Proj} A \to \operatorname{Spec} A_0$ による像 $\phi(\operatorname{Proj} A)$ は $\operatorname{Spec} A_0$ の閉集合である．

証明　次数正の斉次元 $x_1, \ldots, x_n \in A$ により $A = A_0[x_1, \ldots, x_n]$ とする．n についての数学的帰納法で示す．$n = 0$ であれば $\phi(\operatorname{Proj} A) = \emptyset$ であるから正しい．$n > 0$ とする．$\phi(\operatorname{Proj} A)$ に含まれない任意の $y \in \operatorname{Spec} A_0$ について，y のある近傍で $\phi(\operatorname{Proj} A)$ が閉であることを示せばよい．$A' = A/(x_1, \ldots, x_{n-1})$ とし $\bar{x}$ を x_n の A' での像とする．このとき，$A' = A'_0[\bar{x}]$ であるから，A_0 のイデアルの列 $\{0\} = I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ があって

$$A' = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (A_0/I_i)\bar{x}^i$$

となっており，$I = \bigcup_{i=0}^{\infty} I_i$ について $\operatorname{Proj} A' = \operatorname{Spec} A_0/I$ となる．$y \notin \phi(\operatorname{Proj} A)$ の仮定から $y \notin \phi(\operatorname{Proj} A')$ であるから y で 0 でない $f \in I$, つまり y に対応する素イデアルに

含まれない f が取れる．A を f で局所化して $x_1, \ldots, x_n$ の像をそのまま同じ記号で書く．このとき $x_1, \ldots, x_{n-1}$ で定義される $\mathrm{Proj}\, A[1/f]$ の閉部分スキームは $\mathrm{Spec}\, A_0/I \subset V(f)$ より空であるから，イデアル $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ の根基は $A[1/f]_+$ を含む．命題 4.4 により $A[1/f]$ は $A_0[1/f][x_1, \ldots, x_{n-1}]$ 上整となる．したがって，$\phi_f : \mathrm{Proj}\, A[1/f] \to A_0[1/f]$ は

$$\mathrm{Proj}\, A[1/f] \xrightarrow{\psi} \mathrm{Proj}(A_0[1/f][x_1, \ldots, x_{n-1}]) \xrightarrow{\phi'} A_0[1/f]$$

と分解し，ψ は補題 4.1(2) により全射である．帰納法の仮定により ϕ' の像は閉であるから，$\phi(\mathrm{Proj}\, A)$ の y を含む基本開集合 $\mathrm{Spec}\, A_0[1/f]$ への制限は閉集合となる．

証明終わり

補題 4.7 次数付き環 $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ が A_0 上次数正の斉次元 $u_1, \ldots, u_s$ で生成されているとする．d を $\deg u_1, \ldots, \deg u_s$ の最小公倍数とすると， 整数 M が存在して $n > M$ であれば $A_n = A_d A_{n-d}$ となる．ただし，右辺は A_d の元と A_{n-d} の元の積の有限和全体を表す．

証明　各 i について $e_i = d/\deg u_i$ と置く．

$$\{a_1 \deg u_i + \cdots + a_s \deg u_s \,;\, 0 \leqq a_i < e_i, i = 1, \ldots, s\}$$

の最大値を M とする．単項式 $u_1^{b_1} \cdots u_s^{b_s}$ は次数が M より大きければ，M の取り方から，ある i について $b_i \geqq e_i$ である．したがって，この単項式は次数 d の斉次元 $u_i^{e_i}$ を因子に持つ．$n > M$ であれば $A_n = A_0[u_1, \ldots, u_s]_n$ の任意の元は，このような単項式の 1 次結合であるから，$A_d A_{n-d}$ に含まれる．　証明終わり

補題 4.8 次数付き環 $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ と正の整数 e に対して $A^{(e)} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_{ie}$ と定義する．このとき，適当な e をとれば $A^{(e)}$ は A_0 上 $A_1^{(e)} = A_e$ で生成される．

証明　e を補題 4.7 の d の倍数で M より大きいものをとる．このとき，補題 4.7 を繰り返し使えば $A_{2e} = (A_d)^{e/d} A_e$ を得る．これから $A_{2e} = A_e A_e$ がわかる．同様に任意の $n > 0$ について $A_{ne} = (A_e)^n$ もわかるので，$A^{(e)}$ は A_e で生成される．　証明終わり

D を可換環，$A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ と $B = \bigoplus_{i=0}^{\infty} B_i$ が次数付き環で A_0, B_0 が D 代数とする．このとき A と B の D 上の**セグレ積** $A \underline{\otimes}_D B$ を $A \otimes_D B$ の部分環として

$$A \underline{\otimes}_D B = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i \otimes_D B_i$$

で定義する．$A \underline{\otimes}_D B$ は $A_i \otimes_D B_i$ をその $2i$ 次の成分として次数付き環と考える．奇数次の成分はすべて $\{0\}$ とする．このとき $\mathrm{Proj}(A \underline{\otimes}_D B)$ はファイバー積 $\mathrm{Proj}\, A \times_{\mathrm{Spec}\, D} \mathrm{Proj}\, B$ に等しい．

特に $B=A$ の場合，埋め込み $A \underline{\otimes}_D A \to A \otimes_D A$ と自然な全射準同型 $A \otimes_D A \to A$ の合成として斉次準同型 $\phi : A \underline{\otimes}_D A \to A$ が得られるが，補題 4.8 により，ある e が存在して i が e の倍数ならこの準同型の $2i$ 次の成分は全射である．特に $\phi(A \underline{\otimes}_D A)_+ A$ の根基は A_+ を含むので，この斉次準同型から正則写像 $\operatorname{Proj} A \to \operatorname{Proj}(A \underline{\otimes}_D A)$ が得られる．これは $\operatorname{Proj} A$ から $\operatorname{Proj} A \times_{\operatorname{Spec} D} \operatorname{Proj} A$ への対角線写像で閉埋め込みである．

補題 4.9 次数付き環 A がその斉次部分環 B 上整で，S が B に含まれる積閉集合で斉次元からなるとする．A の任意の 0 でない斉次イデアルが S と交われば，B の任意の 0 でない斉次イデアルも S と交わる．

証明　B の任意の 0 でない斉次元 y について By が S と交わることを示せば良い．Ay は A の 0 でない斉次イデアルであるから，ある斉次元 $x \in A$ について $s = xy \in S$ となる．A は B 上整であるから，ある有限個の斉次元 $b_1, \ldots, b_n \in B$ について

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n = 0$$

となる．等式

$$x^n = -b_1 x^{n-1} - \cdots - b_{n-1} x - b_n$$

の両辺に y^n をかけると $s = xy \in B$ より

$$s^n = (-b_1 s^{n-1} - \cdots - b_{n-1} s y^{n-2} - b_n y^{n-1}) y \in By \cap S$$

となる．　証明終わり

この補題の補題 4.1 の証明での使い方は次のようになる．整拡大 $B/(P' \cap B) \subset A/P'$ において P' の 極大性から A/P' の任意の 0 でない斉次イデアルは S の像と交わる．一方，$P \cap S = \emptyset$ より $P/(P' \cap B)$ は S の像と交わらない B の斉次イデアルであるから，この補題 4.9 により $P/(P' \cap B) = 0$ となり $P' \cap B = P$ がわかる．

参考文献

[EGA] A. Grothendieck and J. Dieudonné, Éléments de Géométrie Algébrique I, II, III, IV, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28,32**, (1960-1967).

[H1] R. Hartshorne, Algebraic geometry, Springer-Verlag, 1977.

[I1] 飯高 茂，代数幾何学，岩波基礎数学講座，1976–1977.

[M1] D. Mumford, The Red Book of Varieties and Schemes, Lecture Notes in Math. **1358**, Springer, 1974.

[M2] 宮西 正宜，代数幾何学，裳華房，1990.

[N] 永田 雅宜, 可換体論, 数学選書 **6**, 裳華房, 1967.