2014 年度前期講義 代数幾何学 (ver. 1.4)

石田 正典

1　環付き空間

環はすべて単位元 1 を持つ可換環とする．ただし，$1=0$ で 0 のみからなる環も考える．

X を位相空間とする．X の各開集合 U に環 $\mathcal{A}(U)$ が与えられ，開集合の各包含関係 $V \subset U$ に対して環の準同型

$$\rho^U_V : \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{A}(V)\ ,\ \ x \mapsto x|V\ ,$$

が定まり次の条件を満たすとき，$\mathcal{A} = (\{\mathcal{A}(U)\}, \{\rho^U_V\})$ を**可換環の層**という．なお，ここでは $x|V$ は $\rho^U_V(x)$ を略記したものという以上の意味は無いが，この準同型は**制限写像**と呼ばれる．

(1) 任意の開集合 U に対して ρ^U_U は $\mathcal{A}(U)$ の恒等写像である．

(2) $W \subset V \subset U$ である開集合 U, V, W に対して準同型の合成 $\rho^V_W \cdot \rho^U_V$ は ρ^U_W に等しい．

(3) $\{U_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ が X の開集合の族で U をそれらの和集合とする．$a \in \mathcal{A}(U)$ が，すべての $\lambda \in \Lambda$ について $\rho^U_{U_\lambda}(a) = 0$ であれば $a = 0$ である．

(4) $\{U_\lambda\}$ および U を (3) と同様とする．各 λ について $a_\lambda \in \mathcal{A}(U_\lambda)$ が与えられていて，任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ について

$$\rho^{U_\lambda}_{U_\lambda \cap U_\mu}(a_\lambda) = \rho^{U_\mu}_{U_\lambda \cap U_\mu}(a_\mu)$$

となるとき，ある $a \in \mathcal{A}(U)$ が存在して $\rho^U_{U_\lambda}(a) = a_\lambda$ が任意の λ について成り立つ．

容易にわかるように，(3) は「$a, b \in \mathcal{F}(U)$ で，すべての $\lambda \in \Lambda$ について $\rho^U_{U_\lambda}(a) = \rho^U_{U_\lambda}(b)$ であれば，$a = b$ となる」と同値である．なお，準同型 ρ^U_V はもちろん層ごとに異なるが，記号を複雑にしないためにいつもこの記号で済ませる．これらの条件のうちで (1), (2) のみを与えたものを**前層**という．

位相空間 X とその上の可換環の層 $\mathcal{A}$ の組 $(X, \mathcal{A})$ を**環付き空間**と呼ぶ．

例 1.1 M を n 次元 C^∞ 多様体とする．各開集合 $U \subset M$ に対して $\mathcal{A}(U)$ を U 上の実数値 C^∞ 関数全体とし，$V \subset U$ について $\rho^U_V : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$ は U 上の関数 f に対し V への制限 $f|V$ を与える写像とすれば，$\mathcal{A}(U)$ は環で ρ^U_V は準同型となり条件 (1) から (4) を満たす．例えば $M = \mathbf{R}^n$ とすれば，$\mathcal{A}(U)$ は U 上の n 変数 C^∞ 関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 全体からなる可換環である．

$(X, \mathcal{A})$ を環付き空間とし，X' を X の開部分集合とする．X' の任意の開集合 U は X の開集合でもあるので，$\mathcal{A}'(U) = \mathcal{A}(U)$ と定義し，準同型 ρ_V^U も同じものと定義することにより X' 上の環の層 $\mathcal{A}'$ が得られる．これを $\mathcal{A}$ の X' への**制限**といい $\mathcal{A}|X'$ と書く．

上記の層の定義において，$\mathcal{A}(U)$ を加群 $\mathcal{F}(U)$ で置き換え，$V \subset U$ に対する $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ を加群の準同型とすることにより X 上の**加群の層**，あるいは条件 (1), (2) だけを仮定するなら前層の定義が与えられる．さらに，$(X, \mathcal{A})$ が環付き空間で $\mathcal{F}$ が X 上の加群の層で次の条件を満たすとき，$\mathcal{F}$ を $\mathcal{A}$ 加群と言う．

(1) 各開集合 U について $\mathcal{F}(U)$ は $\mathcal{A}(U)$ 加群である．

(2) $V \subset U$ に対して，環の準同型 $\mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$ により $\mathcal{F}(V)$ を $\mathcal{A}(U)$ 加群と考えると，制限写像 $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ は $\mathcal{A}(U)$ 準同型である．

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が $\mathcal{A}$ 加群であるとき，加群層の $\mathcal{A}$ 準同型 $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とは，各開集合 U での $\mathcal{A}(U)$ 準同型 $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ の集まり $\{\phi(U)\}$ で，$V \subset U$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi(U)} & \mathcal{G}(U) \\
\rho_V^U \downarrow & & \downarrow \rho_V^U \\
\mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi(V)} & \mathcal{G}(V)
\end{array}$$

を可換とするものとする．

$\mathcal{A}$ 準同型 ϕ に対して核 $\operatorname{Ker}\phi$ と余核 $\operatorname{Coker}\phi$ が $\mathcal{A}$ 加群として定義される．ここで $\operatorname{Ker}\phi$ は各 U について

$$\operatorname{Ker}\phi(U) = \operatorname{Ker}(\phi(U))$$

と置いて層として定義される．一方，U に $\operatorname{Coker}(\phi(U)) = \mathcal{G}(U)/\phi(U)(\mathcal{F}(U))$ を対応させると前層となるが層にはならないので，これを $\operatorname{Coker}\phi$ とは書けない．この前層に後で述べる**層化**を行って $\operatorname{Coker}\phi$ が得られる．

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を $\mathcal{A}$ 加群としたとき，各 $U \subset X$ に $\mathcal{A}(U)$ 加群 $\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathcal{G}(U)$ を対応させることは前層であるが層とは限らない．これを層化したものを $\mathcal{A}$ 加群のテンソル積と言い，$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}$ と書く．$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が環の層の準同型で，$\mathcal{F}$ が $\mathcal{A}$ 加群であれば，$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ は $\mathcal{B}$ 加群となる．また，各開集合 U について $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$ は $\mathcal{A}(U)$ 加群であるが，この対応も前層で，層化を行って層 $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ が得られる．

$\mathcal{A}_x$ を可換環の前層とする．各点 $x \in X$ について，**ストーク** $\mathcal{A}_x$ が x を含むすべての開集合 U についての帰納極限

$$\mathcal{A}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{A}(U)$$

として定義される．$\mathcal{A}_x$ は可換環である．x を含む任意の開集合 U について，可換環 $\mathcal{A}(U)$ から帰納極限 $\mathcal{F}_x$ への自然な準同型がある．すべての x について $\mathcal{A}_x$ が局所環であるとき $(X, \mathcal{A})$ を局所環付き空間という．例 1.1 はその例となっている．一般の加群前層や $\mathcal{A}$ 加群の $x \in X$ におけるストークも同様に定義される．

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を $\mathcal{A}$ 加群としたとき，テンソル積とストークの関係では，任意の $x \in X$ について $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G})_x$ と $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{A}_x} \mathcal{G}_x$ は自然に同型である．一方，$\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x$ は $\mathcal{A}_x$ 加群で自然な $\mathcal{A}_x$ 準同型 $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \to \mathcal{H}om_{\mathcal{A}_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$ は存在するが，これは単射とも全射とも限らない．$\mathcal{F}$ が局所的に有限表示を持てばこの準同型が同型となる（[EGA, I, 5.2] 参照）．

前層の層化　X 上の加群前層 $\mathcal{F}$ について**層空間** F と層化について説明しておこう．F は集合としてはストークの直和

$$F = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

で，これに位相を次のように入れる．開集合 $U \subset X$ と $s \in \mathcal{F}(U)$ に対して $U_s = \{(x, s_x) \,;\, x \in U\}$ とする．ここで (x, s_x) は F の部分集合である $\mathcal{F}_x$ に含まれる s の像 s_x である．この形の部分集合 U_s を開集合の基とする位相を F に入れることになるが，そのためには，同様の $V \subset X$ と $t \in \mathcal{F}(V)$ について $U_s \cap V_t$ がこの形の部分集合の和となることを示せば良い．$(x, u) \in U_s \cap V_t$ とする．このとき $u = s_x = t_x$ であるから $x \in W \subset U \cap V$ があって $s|W = t|W$ となる．したがって $v = s|W = t|W$ とおけば $(x, u) \in W_v \subset U_s \cap V_t$ となる．(x, u) は任意なので，$U_s \cap V_t$ はこの形の部分集合の和となる．この位相で当然 U_s は F の開集合となるが，射影 $\pi : F \to X$ の U_s への制限は U への同位相写像となることが容易にわかる．特に $x \mapsto (x, s_x)$ で定義される逆写像 $U \to U_s$ は連続である．層 $\tilde{\mathcal{F}}$ は

$$\tilde{\mathcal{F}}(U) = \{\alpha : U \to F \,;\, \alpha \text{ は連続で } \pi \cdot \alpha = 1_U\}$$

で定義される．$V \subset U$ の場合，$\alpha \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$ は連続写像としての V への制限を層での制限 $\alpha|V$ と定義する．この定義では $\tilde{\mathcal{F}}(U)$ は U からの連続写像の集まりとして定義されており，制限写像の意味も文字通りなので，層の公理である (3), (4) が満たされることも明らかである．すべての U について $\mathcal{F}(U) \to \tilde{\mathcal{F}}(U)$ が自然に定義され，前層の準同型 $\mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}}$ が得られる．この準同型を含めて $\tilde{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{F}$ の層化という．$\alpha, \beta \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$ と $x \in U$ について $\alpha(x) = \beta(x)$ であれば，$\alpha(U), \beta(U)$ が開集合であることから，ある開近傍 $x \in V \subset U$ で $\alpha|V = \beta|V$ である．また，$\tilde{\mathcal{F}}$ の $x \in X$ でのストーク $\tilde{\mathcal{F}}_x$ は $\mathcal{F}_x$ に同型である．

$u : X \to Y$ が位相空間の連続写像で，$\mathcal{A}$ が X 上の環の層とする．このとき Y 上の環の層 $u_*\mathcal{A}$ が，各 $U \subset Y$ について $u_*\mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(u^{-1}(U))$ と置いて定義される．Y の開集合 $V \subset U$ についての制限写像 $u_*\mathcal{A}(U) \to u_*\mathcal{A}(V)$ は X での開集合の包含関係 $u^{-1}(V) \subset u^{-1}(U)$ による $\mathcal{A}(u^{-1}(U)) \to \mathcal{A}(u^{-1}(V))$ として定義される．これを $\mathcal{A}$ の**順像**という．加群層の順像も同様に定義される．$\mathcal{F}$ が $\mathcal{A}$ 加群であれば，$u_*\mathcal{F}$ は自然に $u_*\mathcal{A}$ 加群となる．

一方，$\mathcal{B}$ を Y 上の環の層とすると，引き戻し $u^*\mathcal{B}$ が次のように定義される．X 上の前層 $u^{-1}\mathcal{A}$ を X の開集合 U に対して $u^{-1}\mathcal{A}(U)$ を $u(U)$ を含む Y の開集合についての

極限

$$u^{-1}\mathcal{A}(U) = \varinjlim_{u(U)\subset V} \mathcal{B}(V)$$

として定義する．$u^{-1}\mathcal{A}$ は層になるとは限らない．これを層化したものを $u^*\mathcal{B}$ と定義する．加群層の引き戻しも同様に定義される．$\mathcal{G}$ が $\mathcal{B}$ 加群であれば，$u^*\mathcal{F}$ は自然に $u^*\mathcal{B}$ 加群となる．

環付き空間 $(X, \mathcal{A})$ から別の環付き空間 $(Y, \mathcal{B})$ への射は連続写像 $\bar{f}: X \to Y$ と環の層の準同型 $\phi: \mathcal{B} \to \bar{f}_*\mathcal{A}$ の組 $f = (\bar{f}, \phi)$ として定義される．このとき，まず $\bar{f}$ により引き戻し $\bar{f}^*\mathcal{B}$ が X 上の環の層として定義され，さらに ϕ に随伴的な環の層の準同型 $\bar{f}^*\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ が一意的に定まる．f が与えられると，X 上の $\mathcal{A}$ 加群 $\mathcal{F}$ に対して順像 $\bar{f}_*\mathcal{F}$ が ϕ を通じて $\mathcal{B}$ 加群となる．これを $f_*\mathcal{F}$ と書く．また，Y 上の $\mathcal{B}$ 加群 $\mathcal{G}$ に対して引き戻し $f^*\mathcal{G}$ が $\mathcal{A}$ 加群として定義される．引き戻し $\bar{f}^*\mathcal{G}$ は $\bar{f}^*\mathcal{B}$ 加群であるが，$f^*\mathcal{G}$ は $\bar{f}^*\mathcal{G} \otimes_{\bar{f}^*\mathcal{B}} \mathcal{A}$ として定義される．特に $f^*\mathcal{B} = \mathcal{A}$ であることに注意する．

$x \in X$ で $y = \bar{f}(x)$ の場合，Y 上の加群層 $\mathcal{G}$ について $(\bar{f}^*\mathcal{G})_x$ は $\mathcal{G}_y$ に同型で，$(f^*\mathcal{G})_x$ は $\mathcal{G}_y \otimes_{\mathcal{B}_x} \mathcal{A}_x$ に同型となる．

f_* や f^* の定義に用いた u^{-1} や $\bar{f}^*$ はこれ以降は出てこない．環付き空間の射 $f = (\bar{f}, \phi)$ については，通常は連続写像 $\bar{f}$ も f と書く．

帰納極限と射影極限　順序集合 Λ の元で添字づけられた集合族 $\{A_\lambda\ ;\ \lambda \in \Lambda\}$ が $\lambda \leqq \mu$ のとき写像 $\phi_\mu^\lambda : A_\lambda \to A_\mu$ が与えられ，条件 (1) 任意の λ について $\phi_\lambda^\lambda = 1_{A_\lambda}$, (2) $\lambda \leqq \mu \leqq \nu$ のとき $\phi_\nu^\mu \cdot \phi_\mu^\lambda = \phi_\nu^\lambda$ を満たすとき**帰納系**という．Λ が有向集合，すなわち任意の λ, μ に対して $\lambda \leqq \nu$ かつ $\mu \leqq \nu$ となる ν が存在することを仮定することが多い．有向集合の場合は，これが集合の帰納系でも加群や環の帰納系でも下記の同じ構成で帰納極限が定義出来る．

$$\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda / \sim$$

ここで $a \in A_\lambda$ と $b \in A_\mu$ は $\lambda \leqq \nu$ かつ $\mu \leqq \nu$ となる ν が存在して $\phi_\nu^\lambda(a) = \phi_\nu^\mu(b)$ となるとき同値とする．

射影系 $\{B_\lambda\,;\lambda \in \Lambda\}$ は矢印が逆で，$\lambda \leqq \mu$ のとき写像 $\psi_\lambda^\mu : B_\mu \to B_\lambda$ が与えられ，条件 (1) 任意の λ について $\psi_\lambda^\lambda = 1_{B_\lambda}$, (2) $\lambda \leqq \mu \leqq \nu$ のとき $\psi_\lambda^\mu \cdot \psi_\mu^\nu = \psi_\lambda^\nu$ を満たすものである．このとき射影極限が

$$\varprojlim_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{(a_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\ ;\ \psi_\lambda^\mu(a_\mu) = a_\lambda, \lambda \leqq \mu\}$$

で定義される．これは Λ が有向集合である必要はない．加群の射影系なら極限も加群，環なら極限も環となる．

2　アフィンスキーム

A を（可換）環とする．A の素イデアル全体を $\mathrm{Spec}\, A$ と書く．ここでイデアル $P \subset A$ が**素イデアル**とは $P \neq A$ であって $xy \in P$ であれば $x \in P$ または $y \in P$ となることである．$A \neq \{0\}$ であれば A は少なくとも一つ極大イデアルを持つが，極大イデアルは素イデアルであるから，$\mathrm{Spec}\, A$ は空ではない．

例 2.1 $A = \mathbf{Z}$ の場合，素数 $2, 3, 5, \ldots$ について $2\mathbf{Z}, 3\mathbf{Z}, 5\mathbf{Z}, \ldots$ は極大イデアルであり素イデアルとなる．また，$\{0\}$ も $\mathbf{Z}$ の素イデアルである．

$f : A \to B$ を環の準同型とする．このとき，$Q \subset B$ が素イデアルであれば $f^{-1}(Q)$ は A の素イデアルとなる．この対応による写像 $\mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ を ${}^{\mathrm{a}}f$ と書く．$S \subset A$ が 1 を含む積閉集合とするとき，A の S による局所化を $S^{-1}A$ と書く．自然な準同型 $\phi : A \to S^{-1}A$ について次が成り立つ．

定理 2.2 ${}^{\mathrm{a}}\phi : \mathrm{Spec}\, S^{-1}A \to \mathrm{Spec}\, A$ は単射で像は $P \cap S = \emptyset$ となる A の素イデアル全体である．

$f \in A$ とする．積閉集合 $S = \{1, f, f^2, f^3, \ldots\}$ について $S^{-1}A$ を $A[f^{-1}]$ と書く．この場合の ${}^{\mathrm{a}}\phi$ の像は定理により f を含まない A の素イデアル全体 $D(f)$ となる．$f, g \in A$ について $D(f) \cap D(g)$ は f と g を含まない素イデアル全体であるから，これは fg を含まない素イデアル全体 $D(fg)$ に等しい．

I を A のイデアルとする．自然な準同型 $\phi : A \to A/I$ について ${}^{\mathrm{a}}\phi$ の像 $V(I)$ は I を含む A の素イデアル全体となる．特に I が単項イデアル $I = (f)$ の場合，$\mathrm{Spec}\, A$ は集合として $D(f)$ と $V((f))$ の直和となる．

定理 2.3 $I, J, I_\lambda\ (\lambda \in \Lambda)$ を A のイデアルとすると次が成り立つ．

(i) $V(A) = \emptyset$.

(ii) $V(\{0\}) = \mathrm{Spec}\, A$.

(iii) $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.

(iv) $V(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda)$.

証明はいずれも素イデアルの定義から容易にわかる．(iii) だけ示す．一般に $I_1 \subset I_2$ であれば $V(I_2) \subset V(I_1)$ であるから $V(I \cap J) \supset V(I) \cup V(J)$ となる．$V(I \cap J)$ に属する素イデアル P が $V(I)$ に含まれないとすると，$I \not\subset P$ であるから元 $x \in I \setminus P$ がとれる．任意の $y \in J$ に対して，$xy \in IJ \subset I \cap J \subset P$ で $x \notin P$ であるから $y \in P$ がわかる．したがって P は $V(J)$ に属する．以上で $V(I \cap J) \subset V(I) \cup V(J)$ もわかる．

$\mathrm{Spec}\, A$ の部分集合 F は，あるイデアル I について $F = V(I)$ となるとき閉集合と定義する．定理 2.3 により，これは閉集合の公理を満たし $\mathrm{Spec}\, A$ は位相空間となる．閉集合 $V(I)$ は共通部分 $\bigcap_{f \in I} V((f))$ となるので，開集合 $D(I) = \mathrm{Spec}\, A \setminus V(I)$ は $\bigcup_{f \in I} D(f)$

に等しい．したがって，$\{D(f)\ ;\ f \in A\}$ は $\operatorname{Spec} A$ の開集合の基となることがわかる．$D(f)$ の形の開集合を $\operatorname{Spec} A$ の**基本開集合**という．位相空間 $X = \operatorname{Spec} A$ は，以下で示すように，任意の開被覆が有限開被覆を持つという意味でコンパクトである．X は一般にはハウスドルフ性は持たないので，通常これを**準コンパクト**という．準コンパクト性を示すには基本開集合族 $\{D(f_\lambda)\}$ による X の被覆が有限開被覆を持つことを示せば良い．A の部分集合 $\{f_\lambda\}$ がイデアルとして A を生成しなければ，これを含む極大イデアル P が存在するが，これは $\{D(f_\lambda)\}$ が被覆であることに反する．したがって $\{f_\lambda\}$ から $f_1, \ldots, f_n$ を適当に選べば $h_1, \ldots, h_n \in A$ があって $h_1 f_1 + \cdots + h_n f_n = 1$ となる．このとき $\{f_1, \ldots, f_n\}$ は A を生成するので $X = D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_n)$ となる．

位相空間 $X = \operatorname{Spec} A$ に環の層 $\mathcal{O}_X$ を次のように定義する．$U = D(f)$ の場合は $\mathcal{O}_X(U) = A[f^{-1}]$ とする．一般の開集合 U については，$D(f) \subset U$ となる各 $f \in A$ についての $a_f \in A[f^{-1}]$ の集まり (a_f) で任意の $f, g \in A$ について $a_f|D(fg) = a_g|D(fg)$ を満たすもの全体を $\mathcal{O}_X(U)$ とする．すなわち，$D(f) \subset U$ となる各 $f \in A$ についての射影極限

$$\mathcal{O}_X(U) = \varprojlim_{D(f) \subset U} A[f^{-1}]$$

と書ける．$x \in \operatorname{Spec} A$ に対応する素イデアルを P とすると，ストーク $\mathcal{O}_{X,x}$ は A の $S = A \setminus P$ による局所化 $A_P = S^{-1}A$ に等しい．$\mathcal{O}_{X,x}$ を X の x での**局所環**という．A_P であるから可換環論の意味でも局所環になっている．

局所環付き空間 $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_X)$ を A による**アフィンスキーム**という．なお，通常は $\mathcal{O}_X$ は略して $\operatorname{Spec} A$ だけで，この構造層を持つアフィンスキームと考える．$\operatorname{Spec} A$ はデータとしては環 A だけから得られ，A は $\operatorname{Spec} A$ から $A = \mathcal{O}_X(\operatorname{Spec} A)$ として回復される．環の直和 $A \oplus B$ に対しては $\operatorname{Spec}(A \oplus B) = \operatorname{Spec} A \amalg \operatorname{Spec} B$ となる．

$\operatorname{Spec} A$ の $\mathcal{O}_X$ の構成についてもう少し詳しく述べる．上記のように定義した $\mathcal{O}_X$ が前層であることはわかる．$V \subset U$ に対する制限写像 $\rho^U_V : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ は，$(a_f)_{D(f) \subset U}$ を $(a_f)_{D(f) \subset V}$ に対応させる，射影極限から射影極限への自然な準同型である．

基本開集合が $\operatorname{Spec} A$ の開集合の基であることから，$\mathcal{O}_X$ が層であることを示すには，任意の $f \in A$ について層化による準同型 $\phi_f : A[f^{-1}] \to \widetilde{\mathcal{O}}_X(D(f))$ が同型であることを示せば良い．ϕ_f が単射であることを示し，その後全射であることを示すが，いずれも A を $A[f^{-1}]$ で置き換えることにより $f = 1$ の場合を示せば良い．

$x \in A$ として $\phi_1(x) = 0$ であれば，A の任意の素イデアル P について x は A_P での像が 0 となる．これは $s \in A \setminus P$ が存在して $sx = 0$ となることを示す．$\operatorname{Ann}(x) = \{a \in A\ ;\ ax = 0\}$ と置けば，これは A のイデアルとなるが，上記の $s \in \operatorname{Ann}(x)$ が $s \notin P$ であることが示すように，このイデアルはどの素イデアルにも含まれない．したがって $\operatorname{Ann}(x) = A$ となり $1 \in \operatorname{Ann}(x)$, すなわち $x = 1x = 0$ である．これで ϕ_1 が単射であることがわかる．一般にも ϕ_f が単射となる．

次に $\phi_1 : A \to \widetilde{\mathcal{O}}_X(X)$ が全射であることを示す．$u \in \widetilde{\mathcal{O}}_X(X)$ とする．層化の構成法から，X の各点のある近傍 U に u の制限を代表する $\mathcal{O}_X(U)$ の元が存在するが，X の

準コンパクト性からこれらの近傍のうち有限個で X が被覆される．すなわち，X の基本開集合による被覆 $X=D(f_1)\cup\cdots\cup D(f_l)$ と各 i について $s_i\in A[f_i^{-1}]$ が存在して，$(s_i\,;i=1,\dots,l)$ が u を代表する．このとき $1\leqq i,j\leqq l$ について，s_i,s_j の $A[(f_if_j)^{-1}]$ への像をそれぞれ $s_i^{i,j},s_j^{i,j}$ と書けば，$\phi_{f_if_j}(s_i^{i,j})=\phi_{f_if_j}(s_i^{i,j})=u|D(f_if_j)$ となるが，$\phi_{f_if_J}$ の単射性は前半ですでに示しているので $s_i^{i,j}=s_i^{i,j}$ となる．

i は有限個なので $s_i=t_i/f_i^N$, $t_i\in A$, とすべての i について共通の N で書くことができる．ここで N をさらに大きい方に随時変化させた場合，それに伴って t_i も変わるものとする．$s_i^{i,j}=s_i^{i,j}$ であることから $M\geqq 0$ があって $(f_if_j)^M(f_i^Nt_i-f_j^Nt_j)=0$ となるが，N を増やして $M=0$ すなわち $f_i^Nt_i-f_j^Nt_j=0$ とできる．$\{f_1,\dots,f_l\}$ はイデアルとして A を生成するので $\{f_1^N,\dots,f_l^N\}$ も A を生成する．したがって $h_1,\dots,h_l\in A$ を選んで $h_1f_1^N+\cdots+h_lf_l^N=1$ とできる．$s=\sum_{j=1}^l h_jt_j$ と置く．このとき，各 i について

$$f_i^Ns=\sum_{j=1}^l h_jf_i^Nt_j=\sum_{j=1}^l h_jf_j^Nt_i=(\sum_{j=1}^l h_jf_j^N)t_i=t_i$$

となり $A[f_i^{-1}]$ で $s=t_i/f_i^N=s_i$ となる．つまり $\phi_1(s)|D(f_i)=\phi_{f_i}(s_i)=u|D(f_i)$ となり，$\phi_1(s)=u$ よって ϕ_1 の全射性がわかる．

A がネーター環の場合，$X=\operatorname{Spec}A$ の任意の開集合 U に対して有限個の $f_1,\dots,f_l\in A$ があって $U=D(f_1)\cup\cdots\cup D(f_l)$ となる．層の定義から $\mathcal{O}_X(U)$ は図式

$$\bigoplus_{i=1}^n\mathcal{O}_X(D(f_i))\ \underset{q_2}{\overset{q_1}{\rightrightarrows}}\ \bigoplus_{j,k=1}^n\mathcal{O}_X(D(f_j)\cap D(f_k))$$

の核となる．任意の $f\in A$ について $\mathcal{O}_X(D(f))=A[f^{-1}]$ であることから

$$\mathcal{O}_X(U)=\operatorname{Ker}\left[\bigoplus_{i=1}^n A[u_i^{-1}]\ \underset{q_2}{\overset{q_1}{\rightrightarrows}}\ \bigoplus_{j,k=1}^n A[(u_ju_k)^{-1}]\right]$$

がわかる．A がネーター環でない場合は開集合は基本開集合の無限和となり得るが，$\mathcal{O}_X(U)$ の同様の記述はできる．ただし，直和記号は直積に直す必要がある．

A 加群 M に対して $\mathcal{O}_X$ 加群 $\widetilde{M}$ が各 $f\in A$ について $\widetilde{M}(D(f))=M_f$ で定義できる．ここで $M_f=M\otimes_A A[f^{-1}]$ である．このように定義される層，あるいはこれに同型な $\mathcal{O}_X$ 加群を**準連接** $\mathcal{O}_X$ 加群という．また，A がネーター環で M が有限生成 A 加群の場合，$\widetilde{M}$ を**連接** $\mathcal{O}_X$ 加群という．環付き空間の加群層の連接性についてはもっと一般的な定義があるが省略する（[EGA, I, 0, 5.3] 参照）．

例 2.4 A を単項イデアル整域とすると A の素イデアルは素元 p による単項イデアル (p) と零イデアル $\{0\}$ である．$\operatorname{Spec}A$ で $\{0\}$ に対応する点 η を含む閉集合は，明らかに $V(\{0\})=\operatorname{Spec}A$ だけである．すなわち $\{\eta\}$ の $\operatorname{Spec}A$ での閉包は $\operatorname{Spec}A$ となる．単項素イデアル (p) は極大イデアルであるから，これに対応する点 x は $\operatorname{Spec}A$ の閉点である．一般に整域 A について $\eta=\{0\}$ を $\operatorname{Spec}A$ の**生成点**という．

k が体で A が 1 変数多項式環 $k[t]$ の場合，素元は既約多項式を意味するので，$\operatorname{Spec} A$ の η 以外の点は $k[t]$ のモニックな既約多項式と 1 対 1 に対応する．$\operatorname{Spec} k[t]$ は k 上の**アフィン直線**と呼ばれる．さらに k が代数的閉体の場合はモニックな既約多項式は $t-a$ $(a \in k)$ だけである．この既約多項式に $a \in k$ を対応させることにより，$\operatorname{Spec} k[t]$ の生成点以外は k の元に 1 対 1 に対応する．

環の準同型 $\phi : A \to B$ に対して，集合の写像として定義した ${}^{\mathrm{a}}\phi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ は環付空間の写像と考える．構造層の順像 ${}^{\mathrm{a}}\phi_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}$ は A 加群と考えた B に付随する準連接層 $\widetilde{B}$ である．素イデアル $Q \subset B$ について $P = \phi^{-1}(Q)$ とすれば，自然な ϕ の拡張 $A_P \to B_Q$ が ${}^{\mathrm{a}}\phi$ による局所環の局所準同型となる．これが環付空間の写像によるストークの写像である．これをアフィンスキームの**正則写像**という．$f \in A$ に対して ${}^{\mathrm{a}}\phi$ によるアフィン開集合 $D(f) \subset \operatorname{Spec} A$ の逆像はアフィン開集合 $D(\phi(f)) \subset \operatorname{Spec} B$ となる．すなわち，この部分もアフィンスキームの正則写像と考えられ，ϕ の拡張である環の準同型 $A[f^{-1}] \to B[\phi(f)^{-1}]$ に対応する．正則写像 ${}^{\mathrm{a}}\phi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ は $\operatorname{Spec} A$ の B **値点**という見方をする場合がある．アフィンスキーム $\operatorname{Spec} A$ は固定したまま，B をいろいろ考えることにより，代数多様体あるいは整数論的多様体としての $\operatorname{Spec} A$ を多方向から見ることができる．

例 2.5 $f(x, y, z)$ を整数係数の多項式とし，$A = \mathbf{Z}[x, y, z]/(f(x, y, z))$ とする．このとき，$p : \operatorname{Spec} \mathbf{Z} \to \operatorname{Spec} A$ を正則写像とすると，ある環準同型 $\phi : A \to \mathbf{Z}$ により $p = {}^{\mathrm{a}}\phi$ である．ϕ を与えることは $f(a, b, c) = 0$ を満たす整数の組 (a, b, c) を与えることと同等なので，$\operatorname{Spec} A$ の $\mathbf{Z}$ 値点とは方程式 $f(x, y, z) = 0$ の整数解のことと考えられる．同じ $\operatorname{Spec} A$ でも $\mathbf{R}$ 値点は環準同型 $\phi : A \to \mathbf{R}$ によって与えられるので実数解である．このほか，素数 p について $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/(p)$ やその代数的閉包 $\overline{\mathbf{F}}_p$, あるいは p 進整数環 $\mathbf{Z}_p$, 複素数体 $\mathbf{C}$ など，さまざまな環や体 B をとって $\operatorname{Spec} A$ の B 値点を考えることができる．

3　スキームとファイバー積

局所環付空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ が**スキーム**（文献 [EGA] ではここで定義するものを前スキームと呼び，これに分離条件をつけたものをスキームとしている）とは，任意の点 $x \in X$ に開近傍 U が存在して $(U, \mathcal{O}_X|U)$ がアフィンスキームと同型となることと定義する．X, Y をスキームとするとき，スキームの正則写像 $f : X \to Y$ とは環付空間の写像であって，アフィンスキームによる被覆 $X = \bigcup_\lambda U_\lambda$ および $Y = \bigcup_\alpha V_\alpha$ が存在して，各 U_λ に対して V_α が存在して $f(U_\lambda) \subset V_\alpha$ で制限写像 $f|U_\lambda : U_\lambda \to V_\alpha$ がアフィンスキームの正則写像となることと定義する．X から Y への正則写像全体を $\operatorname{Hom}(X, Y)$ と書く．$f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ が正則写像であれば，合成 $g \cdot f : X \to Z$ も正則写像となり，スキームのカテゴリーが得られる．

S をスキームとする．スキーム X と正則写像 $f: X \to S$ の組 (X, f) を S スキームといい，S スキームの正則写像 $\phi: (X, f) \to (Y, g)$ は正則写像 $\phi: X \to Y$ で $f = g \cdot \phi$ を満たすものとして定義される．S スキーム X から S スキーム Y への正則写像全体を $\mathrm{Hom}_S(X, Y)$ と書く．

例 3.1 R が環で X が $\mathrm{Spec}\, R$ スキームの場合，X は R 代数 A_λ によるアフィンスキーム $U_\lambda = \mathrm{Spec}\, A_\lambda$ の貼りあわせ $X = \bigcup_\lambda U_\lambda$ となる．このようなスキームは単に R スキームという．これが有限被覆で，$R = k$ が体，各 A_λ が有限生成の k 代数の場合 X を代数的スキームという．

スキームのファイバー積　X, Y を S スキームとする．スキーム Z が X と Y の S 上のファイバー積とは
(i) S スキームの正則写像 $p_1: Z \to X$, $p_2: Z \to Y$ が存在
(ii) 任意の S スキーム T に対して写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_S(T, Z) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(T, X) \times \mathrm{Hom}_S(T, Y) \\ f & \mapsto & (p_1 \cdot f \ ,\ p_2 \cdot f) \end{array}$$

が全単射となることと定義する．S, X, Y がアフィンスキーム $\mathrm{Spec}\, A, \mathrm{Spec}\, B, \mathrm{Spec}\, C$ の場合，$Z = \mathrm{Spec}(B \otimes_A C)$ がファイバー積となる．

定理 3.2 スキームのファイバー積は常に存在し，同型の範囲で一意的である．

S スキーム X, Y のファイバー積を $X \times_S Y$ と書く．

X を S スキーム，$T \to S$ を正則写像とするとき，$X_T = X \times_S T$ と置けばファイバー積からの正則写像 $X_T \to T$ により X_T を T スキームと考えることができる．これを X の正則写像 $T \to S$ による基底変換という．スキーム理論は正則写像 $X \to S$ に様々な条件をつけて考える．特に，基底変換によって保たれる条件を考えることが多い．

さらに，T を固定して正則写像 $T \to S$ をいろいろ考える場合もある．すなわち，$\mathrm{Hom}(T, S)$ の各元 α を S の T **値点**といい，それぞれにファイバー積 $X_\alpha = X \times_S (T, \alpha)$ が定義される．これを X の T 値点 α 上の**ファイバー**と言う．特に T が代数的閉体 k による $\mathrm{Spec}\, k$ の場合，$\mathrm{Hom}(T, S)$ の元を S の幾何学点と言い，X_α を X の幾何学点 $\alpha \in S(k)$ における**幾何学ファイバー**と言う．

注意 3.3 ファイバー積はスキームの基本的操作であり，局所的には環のテンソル積で記述される．したがって，具体的な考察には環のテンソル積の知識が必要である．いくつか基本的性質を挙げておく．
(1) B を A 代数，$I \subset A$ をイデアルとすると $A/I \otimes_A B = B/BI$.
(2) $I, J \subset A$ をイデアルとすると $A/I \otimes_A A/J = A/(I + J)$.
(3) B を A 代数，$A[t_1, \ldots, t_n]$ を多項式環とすると $A[t_1, \ldots, t_n] \otimes_A B = B[t_1, \ldots, t_n]$.

(4) $A[t_1,\dots,t_m]\otimes_A A[t_{m+1},\dots,t_n]=A[t_1,\dots,t_n]$.
(5) k が代数的閉体で A,B が k 代数で整域であれば $A\otimes_k B$ も整域である．
(6) L/K が分離的 n 次拡大，$\overline{K}$ が K の代数的閉包であれば $L\otimes_K\overline{K}$ は $\overline{K}$ の n 個の直和に同型となる．特に $\mathrm{Spec}(L\otimes_K\overline{K})$ は n 個の点からなる．

例 3.4 k を体，$k[t_1,\dots,t_n]$ を n 変数多項式環としたとき，$\mathrm{Spec}\,k[t_1,\dots,t_n]$ を $\mathbf{A}_k^n$ と書いて k 上の n 次元**アフィン空間**と言う．k が代数的閉体であれば $\mathbf{A}_k^n$ の閉点全体は k^n に 1 対 1 に対応する．

例 3.5 k が代数的閉体で，$k[s]$, $k[t]$ を多項式環とすると

$$\mathrm{Spec}\,k[s]\times_{\mathrm{Spec}\,k}\mathrm{Spec}\,k[t]=\mathrm{Spec}(k[s]\otimes_k k[t])=\mathrm{Spec}\,k[s,t]$$

で，これは $\mathbf{A}_k^2$ である．素イデアルの集合としては，極大イデアル $(s-a,t-b)$, 既約多項式による単項素イデアル $(f(s,t))$ および $\{0\}$ からなる．一方，1 変数有理関数体 $k(s)$, $k(t)$ を考えると，これらはそれぞれ $k[s]$, $k[t]$ の商体で，$k(s)\otimes_k k(t)$ は $k[s,t]$ の積閉集合 $(k[s]\setminus\{0\})\times(k[t]\setminus\{0\}$ による局所化である．$\mathrm{Spec}(k(s)\otimes_k k(t))$ は $\mathrm{Spec}\,k[s,t]$ からすべての閉点と $(s-a)$ と $(t-b)$ の形の素イデアルに対応する点を除いた部分に 1 対 1 に対応する．すなわち，変数 s,t の両方が使われた既約多項式 $f(s,t)$ による単項素イデアルすべてと生成点からなる．

例 3.6 $\mathbf{Z}[x]$ を有理整数環 $\mathbf{Z}$ 上の 1 変数多項式環とする．一意的な環の準同型 $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}[x]$ に対応するアフィンスキームの正則写像 $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}[x]\to\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$ を考える．各素数 p について $\mathbf{F}_p=\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ であるから，$\mathrm{Spec}\,\mathbf{F}_p\to\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$ が存在し，ファイバー $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}[x]\times_{\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}}\mathrm{Spec}\,\mathbf{F}_p$ は $\mathrm{Spec}\,\mathbf{F}_p[x]$ となる．すなわち，体 $\mathbf{F}_p$ 上の直線 $\mathbf{A}_{\mathbf{F}_p}^1$ である．$\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$ の生成点には $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Q}$ から正則写像があって，ファイバーは $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Q}[x]=\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^1$ となる．

4　アフィン射，整射，有限射

$A\subset B$ を環の拡大，すなわち B を可換環 A を 1 を共有する部分環とする．B の元 x は $n>0$ と $a_1,\dots,a_n\in A$ が存在して

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

となるとき A 上**整**という．

補題 4.1 $A\subset B$ を環の拡大とする．$x\in B$ について次は同値である．
(1) x は A 上整．
(2) B の部分環 $A[x]$ は有限生成 A 加群．
(3) $A[x]$ を含む B の部分環 C があって，C は有限生成 A 加群．

環の拡大 $A \subset B$ に対して，$C = \{x \in B\,;\, x$ は A 上整$\}$ と置くと，C は B の部分環である．$C = B$ のとき，B は A 上**整**という．環の準同型 $f : A \to B$ は B が $f(A)$ 上整のとき f を**整**という．これに対応するアフィンスキームの正則写像 $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ を**整射**という．

補題 4.2 $A \subset B$ が整域の拡大で $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ が整射の場合，A が体となることと B が体となることは同値である．

定理 4.3 $A \subset B$ を環の拡大とする．B が A 上整であれば，A の任意の素イデアル P に対して $P = Q \cap A$ となる B の素イデアル Q が存在する．すなわち $A \subset B$ であって $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ が整射であれば全射である．

環の準同型 $f : A \to B$ は B が有限生成 A 加群のとき ${}^{\mathrm{a}}f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ を**有限射**という．

スキームの正則写像 $f : X \to Y$ は Y の任意のアフィン開部分スキーム V について $f^{-1}(V)$ が X のアフィン開部分スキームとなるとき**アフィン射** という．さらに，$f^{-1}(V) \to V$ が有限射となるとき f を**有限射**という．これが整射となるとき f を**整射**という．

任意のアフィン開部分スキーム $V \subset Y$ について $f^{-1}(V)$ が有限個のアフィン開部分スキームの和となるときは**準コンパクト射** という．$f : X \to Y$ が準コンパクト射で，任意の $x \in X$ についてアフィン開部分スキーム $x \subset U = \operatorname{Spec} B$ と $f(y) \in V = \operatorname{Spec} A$ があって，$f(U) \subset V$ かつ B が有限生成 A 代数となるとき，f を**有限生成射**という．

有限射であることは有限生成射かつ整射であることと同値である．

まだ定義していないことが多いが，成り立つことをいくつか並べておく．

$f : X \to Y$ が準コンパクト準分離的射 とすると $f_*\mathcal{O}_X$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 代数層で，f は

$$X \longrightarrow \operatorname{Spec} f_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{f'} Y$$

と分解し，f' はアフィン射となる．

S がスキーム，$\mathcal{A}$ が $\mathcal{O}_S$ 代数層で $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ を $\mathcal{O}_S$ の像の整閉包とすれば整射 $\operatorname{Spec} \mathcal{B} \to S$ が得られる．特に，S を前述の Y とし $\mathcal{A} = f_*\mathcal{O}_X$ とすれば f の分解

$$X \longrightarrow \operatorname{Spec} f_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{B} \xrightarrow{f''} Y$$

が得られ，f'' は整射となる．

整射は絶対閉射である．

5 スキーム射のいろいろな条件

スキームの正則写像 $f : X \to Y$ についての条件は数多くあるが，そのうち基本的なものとして次のようなものがある．

- 開いた埋め込み
- 閉じた埋め込み
- 分離的射
- 準コンパクト射
- 局所有限生成射
- 有限生成射
- 強有限生成射
- アフィン射
- 整射
- 有限射
- 固有射
- 平坦射

これらの正則写像の条件は基底変換で保たれる．有限生成射は代数的スキームの族と考えられる．

スキーム X がアフィン開集合族 $\{U_\lambda = \operatorname{Spec} A_\lambda\}$ で被覆され，各 A_λ がネーター環と出来る場合，X を**局所ネータースキーム**という．さらにこれが有限被覆の場合**ネータースキーム**という．

命題 5.1 Y が局所ネータースキームで $f : X \to Y$ が正則写像とすると，f が有限生成射であることと強有限生成射であることは同値である．

$\mathcal{I}$ をスキーム X の構造層 $\mathcal{O}_X$ の準連接イデアル層とすると，X のアフィン開被覆 $X = \bigcup_\lambda U_\lambda, U_\lambda = \operatorname{Spec} A_\lambda$, の各 A_λ にイデアル I_λ があって $\mathcal{I}|U_\lambda = \tilde{I_\lambda}$ となる．

任意の環 A について $X = \operatorname{Spec} A$ は準コンパクトである．実際，$X = \bigcup D(f_\lambda)$ とすれば $\{f_\lambda\}$ はイデアルとして A を生成するが $1 = h_1 f_1 + \cdots + h_n f_n$ とすれば $X = D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_n)$ となる．

固有射は有限生成，分離的，絶対閉射であることと定義される．

整射は絶対閉射となる．

$f : X \to Y$ が有限射とは，f がアフィン射で Y のアフィン被覆 $Y = \bigcup_\alpha V_\alpha, V_\alpha = \operatorname{Spec} B_\alpha$, について各 $f^{-1}(V_\alpha) = \operatorname{Spec} A_\alpha$ とすると A_α が有限生成 B_α 加群となることである．

6　準連接加群層

A を環とし M を A 加群とする．このとき，アフィンスキーム $X = \operatorname{Spec} A$ 上に $\mathcal{O}_X$ 加群 $M^\sim$ が次のように定義される．各 $u \in A$ に対して基本開集合 $D(u)$ には $M_u = M \otimes_A A[u^{-1}]$ を対応させる．$D(v) \subset D(u)$ であれば v のある冪が (u) に含まれるので u は $A[v^{-1}]$ で可逆となり，一意的な A 準同型 $A[u^{-1}] \to A[v^{-1}]$ が存在する．これに A 上 M のテンソル積をとって得られる $M_u \to M_v$ を制限写像と定義して前層を定義する．$M^\sim$ はその層化とする．各 M_u は $A[u^{-1}]$ 加群で制限写像はそれと両立しているので，$M^\sim$ は $\mathcal{O}_X$ 加群である．

X をスキームとする．$\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$ が準連接とはアフィン開被覆 $X = \bigcup_\lambda U_\lambda$, $U_\lambda = \operatorname{Spec} A_\lambda$, の各 λ について A_λ 加群 M_λ が存在して，$\mathcal{F}|U_\lambda = M_\lambda^\sim$ となることと定義する．

$f : X \to Y$ をスキームの正則写像とする．$\mathcal{F}$ が X の準連接層でも一般には $f_*\mathcal{F}$ が準連接とは限らない．

定理 6.1 $f : X \to Y$ が準コンパクト，準分離的で $\mathcal{F}$ が準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群であれば $f_*\mathcal{F}$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群である．特に $f_*\mathcal{O}_X$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 代数層である．

Y をスキーム，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{O}_Y$ 代数とする．$Y = \bigcup_\lambda V_\lambda$, $V_\lambda = \operatorname{Spec} A_\lambda$, として，各 λ について $B_\lambda = \mathcal{B}(U_\lambda)$ とすると，アフィンスキームの正則写像 $\operatorname{Spec} B_\lambda \to \operatorname{Spec} A_\lambda$ が貼り合わされて，正則写像 $Z = \bigcup_\lambda \operatorname{Spec} B_\lambda \to Y$ が得られる．スキーム Z を $\operatorname{Spec}\mathcal{B}$ と書く．$\operatorname{Spec}\mathcal{B} \to Y$ はアフィン写像となる．

$f : X \to Y$ が準コンパクト，準分離的な正則写像の場合 f は

$$X \longrightarrow \operatorname{Spec} f_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{f'} Y$$

と分解する．

7　射影スキーム

R を環，M を有限生成 R 加群とする．イデアル $I \subset R$ について $IM = M$ となる必要十分条件は $x \in I$ が存在して $(1 + x)M = 0$ となることである．

補題 7.1 (R, P) を局所環，M を有限生成 R 加群とする．このとき，$PM = M$ であれば $M = 0$ である．

この補題から次の中山の補題が得られる．

中山の補題　(R, P) を局所環，M を有限生成 R 加群とする．$N \subset M$ が部分加群で $M = N + PM$ であれば $N = M$ である．

A が**次数付き環**とは $A = \bigoplus_{n=0}^\infty A_n$ で任意の m, n について $A_m A_n \subset A_{m+n}$ となることと定義する．

この場合，A 加群 M が次数付き A 加群とは $M = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}^{\infty} M_n$ と書けて，任意の m, n について $A_m M_n \subset M_{m+n}$ となることと定義する．

$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ を次数付き環とする．$d > 0$ とすると，斉次元 $u \in A_d$ に対して $A[u^{-1}]$ は負の次数ももつ次数付き環 $\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} A[u^{-1}]_n$ となり，$A[u^{-1}]_0$ は部分環となる．$D^+(u) = \mathrm{Spec}\, A[u^{-1}]_0$ をすべての次数正の斉次元 u について考え貼り合わせてスキームが得られる．これを $\mathrm{Proj}\, A$ と書く．ここで $D^+(u) = D^+(u^2) = D^+(u^3) = \cdots$ である．$\mathrm{Proj}\, A$ はイデアル $\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$ を含まない A の素イデアル全体と考えられる．その場合，$D^+(u)$ は u を含まない $\mathrm{Proj}\, A$ の元全体である．2 つの斉次元 u, v が $\deg u = \deg v$ であれば

$$A[(uv)^{-1}] = A[u^{-1}][u/v] = A[v^{-1}][v/u]$$

より $D^+(uv) = D^+(u) \cap D^+(v)$ となる．このように書けるスキームを**射影スキーム**という．各 $A[u^{-1}]_0$ は A_0 代数なので $\mathrm{Proj}\, A$ は $\mathrm{Spec}\, A_0$ 上のスキームとなる．

次数付き環 A が A_0 上 $\{u_1, \ldots, u_n\}$ で生成されているとき

$$\mathrm{Proj}\, A = X(u_1) \cup \cdots \cup X(u_n)$$

となる．

例 7.2 $\mathrm{Proj}\, \mathbf{Z}[x, y]$ は $\mathbf{Z}$ 上の射影直線であり $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Z}}$ と書く．一般に $n > 0$ について $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}} = \mathrm{Proj}\, \mathbf{Z}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ が $\mathbf{Z}$ 上の n 次元射影空間である．ただし，$\deg x_0 = \deg x_1 = \cdots = \deg x_n = 1$ としている．

A が次数付き環で $R = A_0$ 上 $\{u_0, \ldots, u_n\} \subset A_1$ で生成されている場合，対応 $x_i \mapsto u_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ により全射準同型 $R[x_0, x_1, \ldots, x_n] \to A$ が得られる．この場合，$\mathrm{Proj}\, A$ は R 上の射影空間 $\mathbf{P}^n_R$ に閉部分スキームとして埋め込まれる．

定理 7.3 $R = A_0$, $A = R[u_1, \ldots, u_n]$, $u_1, \ldots, u_n \in A_1$ の場合，自然な正則写像 $\mathrm{Proj}\, A \to \mathrm{Spec}\, A_0$ は閉射となる．

補題 7.4 k が体で $A = k[u_1, \ldots, u_n]$, $u_1, \ldots, u_n \in A_1$ の場合，$\mathrm{Proj}\, A = \emptyset$ となるのは，ある m_0 があって $m \geqq m_0$ で $A_m = \{0\}$ となる場合である．

ある d について $x \in A_d$ となる元を A の斉次元という．$x \neq 0$ の場合は次数を $\deg x = d$ と定義する．$1 \in S \subset A$ が斉次元からなる積閉集合とすると $S^{-1}A$ は次数が負の部分もありうる次数付き環となる．

補題 7.5 R を局所環，M を有限生成 R 加群，$P \subset R$ を素イデアルとする．このとき，次は同値である．

(1) $M \otimes_R (R_P/PR_P) = 0$.
(2) $M \otimes_R R_P = 0$.
(3) $\mathrm{Ann}_R(M) \not\subset P$.

$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ で A_0 が R 代数の場合，P に対応する $\mathrm{Spec}\, R$ の点における $\mathrm{Proj}\, A \to \mathrm{Spec}\, A_0$ のファイバーは $\mathrm{Proj}(A \otimes_R (R_P/PR_P))$ となる．

8　固有射

$f : X \to Y$ が固有射とは，f が分離的な有限生成射で絶対閉射であることと定義する．ここで絶対閉射とは，任意の $Y' \to Y$ について $X \times_Y Y' \to Y'$ が閉射となることである．

$f : X \to Y$ が射影射とは，Y がアフィンスキーム $\operatorname{Spec} R$ の場合は $X = \operatorname{Proj} A$ で A は A_0 上 A_1 で 生成され，A_0, A_1 は有限生成 R 加群である場合である．一般には，射影射は次数付き準連接 $\mathcal{O}_Y$ 代数 $\mathcal{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n$ が存在して $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}_1$ で生成され $\mathcal{A}_1$ は有限生成準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群で $X = \operatorname{Proj} \mathcal{A}$ となる正則写像である．

定理 8.1 (Chow の定理) S がネータースキームで $f : X \to S$ が固有射であれば，射影射 $f' : X' \to S$ と射影射 $h : X' \to X$ があって $f' = f \cdot h$ かつ h は X の稠密開集合上で同型となる．

定理 8.2 射影射は固有射である．

9　平坦性と完備化

補題 9.1 N を A 加群とするとき次は同値である．

(1) 任意の A 加群の単射準同型 $M' \to M$ に対して $M' \otimes_A N \to M \otimes_A N$ も単射となる．

(2) 任意の有限生成 A 加群の単射準同型 $M' \to M$ に対して $M' \otimes_A N \to M \otimes_A N$ も単射となる．

補題の条件を満たす N を平坦 A 加群という．N が A 代数の場合は平坦 A 代数という．

定理 9.2 任意の積閉集合 $S \subset A$ について $S^{-1}A$ は平坦 A 代数である，

N が A 平坦で，任意の 0 でない A 加群 M に対して $M \otimes_A N \neq 0$ であるとき，N を忠実平坦という．

補題 9.3 $\phi : A \to B$ が環の準同型で B が A 忠実平坦とすると (1) ϕ は単射，(2) 任意のイデアル $I \subset A$ について $IB \cap A = I$ となる．ここで $IB \cap A$ は $\phi^{-1}(IB)$ のことである．

証明　埋め込み写像 $I \to A$ は単射で B は平坦であるから $I \otimes_A B \to A \otimes_A B = B$ は単射である．これから $I \otimes_A B$ は像 IB に同型となる．$J = \phi^{-1}(IB)$ と置くと，J は A のイデアルなので，同じ理由で $J \otimes_A B$ は JB に同型となる．$I \subset J$ である一方 $J \subset IB$ より $JB \subset IB$ であるから $JB = IB$ となる．完全列 $I \to J \to J/I \to 0$ に B のテンソ

ル積をとれば，右完全性から $J/I \otimes_A B = 0$ がわかるが，B の忠実平坦性から $J/I = 0$, すなわち $J = I$ となる．これで (2) が示された．さらに $I = 0$ と置けば $J = \operatorname{Ker}\phi = 0$ となり (1) がわかる．　証明終わり

A をネーター環，I をイデアルとする．準同型列

$$A/I \leftarrow A/I^2 \leftarrow A/I^3 \leftarrow \cdots$$

の射影極限

$$\widehat{A} = \varprojlim_n A/I^n$$

は環となり，これを A の I による完備化という．

A 加群 M に対して

$$\widehat{M} = \varprojlim_n A/I^n = \varprojlim_n M/I^n M$$

は $\widehat{A}$ 加群となる．

補題 9.4 (Artin-Rees) A をネーター環，$I \subset A$ をイデアル，M を有限生成 A 加群，$N \subset M$ を部分 A 加群とすると，$r > 0$ が存在して

$$I^n M \cap N = I^{n-r}(I^r M \cap N)$$

が任意の $n \geqq r$ について成り立つ．

N を A 加群 M の部分 A 加群とすると，一般に $\widehat{N} \to \widehat{M}$ は単射となる．

A がネーター環，M が有限生成 A 加群の場合は $\widehat{M} = M \otimes_A \widehat{A}$ となる．

$\widehat{A}$ は A 平坦である．

$(A, \mathfrak{m}_A)$, $(B, \mathfrak{m}_B)$ が局所環で $\phi : A \to B$ が平坦な局所写像，すなわち $\phi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$, であれば ϕ は忠実平坦である．

10 平坦射と降下理論

$\phi : A \to B$ を環の平坦準同型とする．このとき，対応するアフィンスキームの正則写像 ${}^{\mathrm{a}}\phi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ を平坦射という．平坦準同型 ϕ が忠実平坦となる必要十分条件は ${}^{\mathrm{a}}\phi$ が全射となることである．

スキームの正則写像 $f : X \to Y$ は任意の $x \in X$ に対して，x のアフィン近傍 U と $f(U)$ を含む Y のアフィン開集合 V が存在して制限写像 $f|U : U \to V$ が平坦となるとき平坦射という．

定理 10.1 $f : X \to Y$ を強有限生成平坦射とすると f は開写像である．

定理 10.2 $f : X \to Y$ が S スキームの正則写像とし，$S' \to S$ が忠実平坦な準コンパクト射とすると，$f_{S'} : X_{S'} \to Y_{S'}$ が同型であれば f も同型となる．

定理 10.3 (Chevalley) $f : X \to Y$ が強有限生成平坦射であれば $f(X) \subset Y$ は局所構成的となる．

11　ザリスキの主要定理

スキームの正則写像 $f: X \to Y$ について，f が準有限射とは f が有限生成射でかつ任意の $y \in Y$ について $f^{-1}(\{y\})$ が離散的な有限個の点となることと定義する．有限射や開いたはめ込みは準有限射である．

定理 11.1 (ザリスキの主要定理，EGA IV (8,12,5)) Y を $\mathbf{Z}$ 上の準コンパクト，準分離的スキームとする．$f: X \to Y$ が分離的な強有限生成射で準有限射とすると，f は

$$X \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{f'} Y$$

と分解する．ここで f' は有限射で g は開いた埋め込みである．

$\mathcal{B} = f_*\mathcal{O}_X$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 代数層である．代数層の準同型 $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{B}$ の像の整閉包を $\mathcal{C}$ とする．$\mathcal{C}$ も準連接 $\mathcal{O}_Y$ 代数層で，整射 $Z = \operatorname{Spec}\mathcal{C} \to Y$ が得られる．f は $X \xrightarrow{g} Z \to Y$ と分解するので，次の補題により，定理の証明には g が開いた埋め込みであることを示せばよい．

補題 11.2 g が開いた埋め込みであれば，$\mathcal{O}_Y$ 上有限な $\mathcal{C}$ の部分代数層 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ が存在して $g': X \to \operatorname{Spec}\mathcal{C}'$ が開いた埋め込みになる．また，この逆も成立する．

定理の証明　g が埋め込みであることは Y 上局所的な条件なので $Y = \operatorname{Spec} A$ として良い．

補題 11.3 $\mathbf{Z}$ 上有限生成の部分環 $A_0 \subset A$ と A_0 上有限生成分離的なスキーム $f_0: X_0 \to \operatorname{Spec} A_0$ が存在して $X_0 \otimes \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A$ が $X \to \operatorname{Spec} A$ に等しくなる．

この補題の A_0 は $\mathbf{Z}$ 上有限生成であるからネーター環である．

補題 11.4 $Y = \operatorname{Spec} A$ で A がネーター環の場合は，任意の素イデアル $P \subset A$ について $X \times_Y \operatorname{Spec} A_P \to \operatorname{Spec} A_P$ で定理が成立すれば $X \to Y$ についても正しい．

以上により A は $\mathbf{Z}$ 上有限生成の環の素イデアルについての局所化として良い．定理を $\dim A$ についての数学的帰納法で証明する．

$f: X \to \operatorname{Spec} A = Y$, $B = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $C \subset B$ を A の像の整閉包とする．$a \in Y$ を極大イデアルに対応する閉点とし，$U = Y \setminus \{a\}$ と置く．$f^{-1}(U) \to U$ については数学的帰納法の仮定から定理が成立する．

$$X' = X \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} \hat{A}\,,\ \ B' = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) = B \otimes_A \hat{A}\,,\ \ C' = C \otimes_A \hat{A}$$

とする．$g': X' \to \operatorname{Spec} C'$ が開いた埋め込みであることを示せば良い．

補題 11.5 C' は $\hat{A}$ の B' での整閉包である．

補題 11.6 A が完備ネーター局所環で $f: X \to \operatorname{Spec} A = Y$ が分離的で準有限とする．このとき，X は直和 $X' \amalg X''$ に分解して，$X' \to Y$ は有限射で $y \in Y$ を A の閉点とすると $f^{-1}(y) \cap X'' = \emptyset$ となる．

この補題により
$$B' = B'_1 \oplus B'_2 \supset C'_1 \oplus C'_2$$
となるが，C'_1 は有限なので $B'_1 = C'_1$ となる．定理はここまで還元して証明する．

参考文献

[EGA] A. Grothendieck and J. Dieudonné, Éléments de Géométrie Algébrique I, II, III, IV, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28,32**, (1960-1967).

[H1] R. Hartshorne, Algebraic geometry, Springer-Verlag, 1977.

[I1] 飯高 茂，代数幾何学，岩波基礎数学講座，1976–1977.

[M1] D. Mumford, The Red Book of Varieties and Schemes, Lecture Notes in Math. **1358**, Springer, 1974.

[M2] 宮西 正宜，代数幾何学，裳華房，1990.