トーリック型カスプ特異点について

石田 正典

東北大学大学院理学研究科

2016 年 4 月 15 日

代数幾何学

$k[X_1, \dots, X_n]$ を体 k 上 n 変数の多項式環として, $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$ を m 個の多項式とすれば,

$$\begin{aligned} X &= \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \ ; \\ &\qquad f_1(x_1, \dots, x_n) = \cdots = f_m(x_1, \dots, x_n) = 0\} \end{aligned}$$

が $f_1, \dots, f_m$ で定義される代数的集合で，適当な条件を与えて**アフィン代数多様体**の定義となる.

ここで K は k を含む体で大きいほど集合 X の多くの情報を含むことになるが，代数的閉体であれば十分大きい.

代数幾何学

剰余環 $A = k[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m)$ の元はアフィン代数多様体 X の**関数**と考える．X には，この関数の 0 にならない点全体が常に開集合となる位相，すなわち**ザリスキ位相**が定義される．2 つの関数 f, g の商 f/g は分母の g が 0 とならない開集合上の関数と考える．このように X とその開集合に限定された関数を考えたものが X の代数多様体としての構造である．

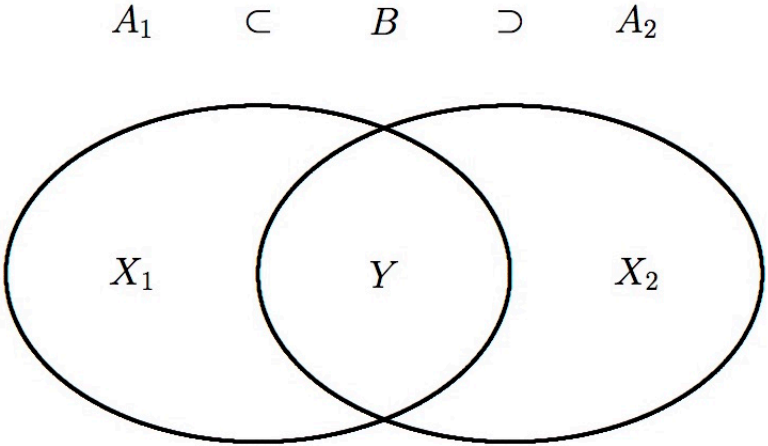
$n, m, f_1, \ldots, f_m$ が違っていても**座標環** A が同型であれば，アフィン代数多様体として同型となる．

代数多様体

アフィン代数多様体 X の開部分集合 Y がまたアフィン代数多様体となる場合がある.
この場合, X の座標環が A, Y の座標環が B であれば, A は B の部分環で商体は等しい.

一般の代数多様体はいくつかのアフィン代数多様体を開部分アフィン代数多様体で張り合わせて構成する.
この場合, 張り合わせには**分離性の条件**が必要となる.
X_1 と X_2 が同じアフィン代数多様体 Y を開部分集合として含む場合, A_1 と A_2 を X_1 と X_2 の座標環とすれば, 分離性の条件は A_1 と A_2 が Y の座標環 B を商体で生成することである.

代数多様体



正規代数多様体

代数多様体 X は有限個のアフィン代数多様体 $X_1, \ldots, X_s$ で被覆される．すべての X_i の座標環が整閉であるとき X を**正規**代数多様体という．

整域は整閉包をとることにより整閉にできる．
被覆する各アフィン代数多様体の座標環の整閉包をとり，代数多様体を**正規化**することができる．

非特異代数多様体

正規性は良い状態の多様体であることを意味するが，さらに良いものとして**非特異**代数多様体がある．1 つの多項式 f_1 で定義されるアフィン代数多様体 X の場合，**定数項が 0** であれば原点が X に含まれるが，原点で非特異となるのは f_1 の **1 次式の部分が 0 でない**場合である．

一般には余次元 d のアフィン代数多様体 X が原点で非特異となるのは，X を定義する多項式の中に 1 次斉次式の部分が**線形独立**となる $f_1, \ldots, f_d$ がある場合である．

完備代数多様体

代数多様体が完備であるとは，任意の代数多様体 Y と閉部分多様体 $Z \subset X \times Y$ について，射影 $p_Y(Z)$ が Y で閉となることである．

K が複素数体 $\mathbb{C}$ の場合はアフィン代数多様体は複素空間の相対位相をもち，一般の代数多様体にも解析空間としての位相が入る．この場合，完備性は解析空間としてコンパクトであることと同値である．

$\mathbb{C}$ 上の非特異代数多様体は複素多様体である．特に，1 次元の非特異完備代数多様体は閉リーマン面である．

連接層のコホモロジー群

環 R に対して様々な R 加群を考えるように，代数多様体 X に対して $\mathcal{O}_X$ 加群層を考える．

構造層 $\mathcal{O}_X$ は各開部分集合 U に U 上の関数全体を与える層で，最も基本的な $\mathcal{O}_X$ 加群層である．このほか，因子 $D = a_1D_1 + \cdots + a_tD_t$ に対して可逆層 $\mathcal{O}_X(D)$ が定義される．X が非特異の場合，接ベクトル束 T_X, 微分層 Ω_X, 標準層 ω_X なども定義される．これら**連接層** $\mathcal{F}$ と各整数 $0 \le i \le \dim X$ について**コホモロジー群** $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F})$ と呼ばれる k ベクトル空間が定義される．

リーマン・ロッホの定理

完備代数多様体の場合 $\mathrm{H}^i(X,\mathcal{F})$ は有限次元となる．次元を $h^i(X,\mathcal{F})$ と書く．

C を 1 次元非特異完備代数多様体として，$D = a_1P_1 + \cdots + a_tP_t$ を因子とする．ここで $P_1, \ldots, P_t$ は代数曲線 C の点で $a_1, \ldots, a_t$ は整数である．

定理 (リーマン・ロッホ)

$\deg D = a_1 + \cdots + a_t$, $g = h^0(C, \omega_C)$ について

$$h^0(C, \mathcal{O}_C(D)) = \deg D + 1 - g + h^0(C, \omega_C(-D))$$

リーマン・ロッホの定理

リーマン・ロッホの定理は一般次元の非特異完備代数多様体 X の場合に拡張される．

定理 (ヒルツェブルフ・リーマン・ロッホ)

E を X 上のベクトル束とする．$n = \dim X$ とすると

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i h^i(X, E) = \kappa_n[\mathrm{ch}(E)\,\mathrm{td}(T_X)]$$

ここで $\mathrm{ch}(E)$ は E のチャーン指標，$\mathrm{td}(T_X)$ は接ベクトル束 T_X のトッド類である．左辺は $\chi(E)$ と書く．

代数的サイクルの次数

n 次元代数多様体 X の既約な閉部分多様体 V に整数または有理数の係数をつけた有限和 $\alpha = \sum n_V V$ を**サイクル**という．V の余次元についてまとめて

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

と書くことができる．

$\alpha_0 = n_X X$ であるが，ここは単に数 n_X を書くことが多い．α_n は 0 次元サイクルで $b_1 P_1 + \cdots + b_s P_s$ の形となる．このとき $\kappa_n[\alpha] = b_1 + \cdots + b_s$ でサイクル α の**次数**が定義される．

チャーン類とチャーン指標

X を非特異完備代数多様体とする．X 上の階数 r のベクトル束 E には**チャーン類**

$$c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + c_3(E) + \cdots + c_r(E)$$

が定義される．ここで，各 $c_i = c_i(E)$ は余次元 i の整数係数のサイクルである．

チャーン類に対して仮想的に**チャーンルート** $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ が，各 $0 < i \leq r$ について i 次の基本対称式が c_i となるものとして導入される．

チャーン類とチャーン指標

階数 r のベクトル束 E の**チャーン指標**

$$\mathrm{ch}(E) = r + \mathrm{ch}_1(E) + \mathrm{ch}_2(E) + \mathrm{ch}_3(E) + \cdots$$

はチャーンルートを用いて

$$\mathrm{ch}_i(E) = (\alpha_1^i + \cdots + \alpha_r^i)/i! \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

で定義される．各 $\mathrm{ch}_i(E)$ は余次元 i の**有理数係数**のサイクルである．$\mathrm{ch}_1(E) = c_1$, $\mathrm{ch}_2(E) = (c_1^2 - 2c_2)/2$ は容易にわかる．

$\mathrm{ch}_3(E)$ の計算

$$
\begin{aligned}
&\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \\
&= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma) \\
&\quad +3\alpha\beta\gamma \\
&= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\} \\
&\quad +3\alpha\beta\gamma \\
&= (\alpha + \beta + \gamma)^3 - 3(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \\
&\quad +3\alpha\beta\gamma \\
&= c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3
\end{aligned}
$$

より $\mathrm{ch}_3(E) = (c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3)/6$ となる.

トッド類

トッド類もチャーンルートを用いて定義される．リーマン・ロッホの定理の $\mathrm{td}(T_X)$ の場合，接ベクトル束 T_X は階数 n のベクトル束であるから，$\beta_1, \ldots, \beta_n$ をチャーンルートとすると, トッド類は

$$\mathrm{td}(T_X) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\beta_i}{1 - \exp(-\beta_i)}$$

で与えられる．T_X のチャーン類により $\mathrm{td}_1 = c_1/2$, $\mathrm{td}_2 = (c_1^2 + c_2)/12$, $\mathrm{td}_3 = c_1 c_2/24$ となる.

トーリック多様体

$r \geq 0$, $N \simeq \mathbf{Z}^r$, $N_{\mathbf{R}} = N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$
$M = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(N, \mathbf{Z})$, $M_{\mathbf{R}} = M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$

自然な双 1 次写像

$$\langle\ ,\ \rangle : M_{\mathbf{R}} \times N_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$$

ある．$x \in M_{\mathbf{R}}$, $u \in N_{\mathbf{R}}$ について $\langle x, u\rangle$ の符号に注目する．$\langle x, u\rangle = 0$ のとき，x と u は直交しているという．

$(u = 0) = u^{\perp} = \{x \in M_{\mathbf{R}} \ ; \langle x, u\rangle = 0\}$
$(u \geq 0) = \{x \in M_{\mathbf{R}} \ ; \langle x, u\rangle \geq 0\}$ などの記号を使う．

トーリック多様体

各 $m \in M$ に記号 $\mathrm{e}(m)$ を導入し，
$\mathrm{e}(m)\mathrm{e}(m') = \mathrm{e}(m+m')$ で定義される M と同型な群
$\{\mathrm{e}(m)\ ;\ m \in M\}$ を考える．$1 = \mathrm{e}(0)$ が**単位元**である．

この群を基底とする k ベクトル空間 $k[M]$ に積を
$\mathrm{e}(m)\mathrm{e}(m') = \mathrm{e}(m+m')$ で定義して可換環とすることが
できる．$k[M]$ は多項式環の局所化に同型である．
$S \subset M$ が 0 を含む半群であれば

$$k[S] = \bigoplus_{m \in S} k\mathrm{e}(m)$$

は $k[M]$ の部分環となる．

トーリック多様体

$\mathbb{R}_0$ で 0 以上の実数全体を表す.
$\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ が**有理凸多面錐**とは，$n_1, \ldots, n_s \in N$ が存在して $\sigma = \mathbb{R}_0 n_1 + \cdots + \mathbb{R}_0 n_s$ となることと定義する．さらに $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ であるとき**強凸**という.

σ を強凸有理凸多面錐とするとき，その**双対錐**
$\sigma^\vee \subset M_{\mathbb{R}}$ を $\{x \in M_{\mathbb{R}} \,;\, \langle x, u\rangle \geq 0 \text{ for all } u \in \sigma\}$ で定義する．σ を定義する $n_1, \ldots, n_s$ を使えば
$\sigma^\vee = (u_1 \geq 0) \cap \cdots \cap (u_s \geq 0)$ となる.
$M \cap \sigma^\vee$ は M の部分半群なので，$k[M]$ の部分環
$k[M \cap \sigma^\vee]$ が定義される.

アフィントーリック多様体

$k[M \cap \sigma^\vee]$ は k 上有限生成の整域となるので，ある
アフィン代数多様体 $X(\sigma)$ の座標環となる．$X(\sigma)$ を
アフィントーリック多様体という．

ρ も強凸有理凸多面錐とすると，同様にアフィントー
リック多様体 $X(\rho)$ が得られるが，$X(\rho)$ が $X(\sigma)$ に開
部分集合として含まれるための必要十分条件は，ρ が
σ の面となることである．ここで ρ が σ の面とは
$x \in \sigma^\vee$ があって $\rho = \sigma \cap (x = 0)$ となることである．
$\rho \prec \sigma$ と書く．

$0 = \{0\}$ はすべての強凸有理凸多面錐の面となる．
$X(0)$ は代数的トーラスで T_N と書く．

扇とトーリック多様体

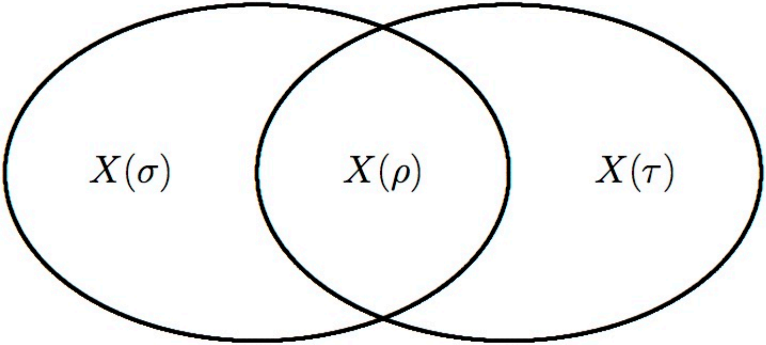
σ, τ が強凸有理凸多面錐でともに ρ を面として含むとする．このとき $X(\sigma)$ と $X(\tau)$ を開部分集合 $X(\rho)$ で張り合わすことができるが，分離性の条件を満たすのは $\sigma \cap \tau = \rho$ の場合である．

$N_{\mathbb{R}}$ の強凸有理凸多面錐の空でない集合 Σ が二条件
(1) $\sigma \in \Sigma$ かつ $\rho < \sigma$ ならば $\rho \in \Sigma$,
(2) $\sigma, \tau \in \Sigma$ ならば $\rho = \sigma \cap \tau$ は σ と τ の面
をみたすとき，Σ を**扇** (おうぎ) という．

扇 Σ に対して $\{X(\sigma)\ ;\ \sigma \in \Sigma\}$ をすべて張り合わせて**トーリック多様体** $Z(\Sigma)$ が得られる．

アフィントーリック多様体の張り合わせ

$$k[M \cap \sigma^\vee] \subset k[M \cap \rho^\vee] \supset k[M \cap \tau^\vee]$$



完備性と非特異性

扇 Σ の台 $|\Sigma|$ が $\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\sigma$ で定義される.

トーリック多様体 $Z(\Sigma)$ が**完備**となるための必要十分条件は，Σ が有限扇で $|\Sigma|$ が $N_{\mathbb{R}}$ に等しいことである.

錐 σ は N の基底の一部で生成されるとき**非特異錐**という．非特異錐であることがアフィントーリック多様体 $X(\sigma)$ が非特異になるための必要十分条件である．したがって，すべての $\sigma\in\Sigma$ が非特異のとき，$Z(\Sigma)$ が非特異トーリック多様体となる.

非特異錐 σ を生成する基底の一部を $\operatorname{gen}\sigma$ と書く．非特異扇 Σ について $\operatorname{gen}\Sigma=\cup_{\sigma\in\Sigma}\operatorname{gen}\sigma$ とおく.

凸多面体から定義される完備扇

完備トーリック多様体を与える扇，すなわち完備扇を凸多面体から与える方法がある．

$P \subset M_{\mathbb{R}}$ をすべての頂点が有理点である r 次元の凸多面体とする．$\{v_1, \ldots, v_s\}$ を P の頂点全体として，$\sigma_i \subset N_{\mathbb{R}}$ を $P - v_i = \{x - v_i \,;\, x \in P\}$ で生成される錐の双対錐とすると，r 次元錐 $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ とそれらの面全体は $N_{\mathbb{R}}$ の完備扇となる．

このように与えられた完備扇から定義される $Z(\Sigma)$ は射影的トーリック多様体となる．

非特異完備扇の第一等式

$$Q(x) = \frac{x}{1-\exp(-x)} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \frac{x^6}{30240} + \cdots$$

Σ を非特異完備扇，$Z(\Sigma) \setminus T_N = D_1 \cup \cdots \cup D_s$ とすると，$Z(\Sigma)$ のトッド種数は

$$\kappa_r \left[\prod_{i=1}^{s} \frac{D_i}{1-\exp(-D_i)} \right] = \kappa_r \left[\prod_{i=1}^{s} Q(D_i) \right]$$

となる．$Q(D_i)$ はサイクルなので $r+1$ 次以上は 0 である．$Z(\Sigma)$ は有理多様体なので，リーマン・ロッホの定理により**この値は 1 となる**．

非特異完備扇の第一等式

2 次元の場合 $D_1, \ldots, D_s$ は非特異有理曲線の輪で第一等式は

$$
\begin{aligned}
\kappa_2\left[\prod_{i=1}^{s}\left(1+\frac{D_i}{2}+\frac{{D_i}^2}{12}\right)\right]
&= \frac{{D_1}^2+\cdots+{D_s}^2+3s}{12} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

非特異完備扇の第二等式

$$\frac{x}{\exp(x)-1} = Q(-x) = Q(x) - x$$

Σ を非特異完備扇とすると次の等式が成り立つ.

$$\sum_{\sigma\in\Sigma} \frac{\left[\prod_{x\in\mathrm{gen}\,\sigma} Q(-x)\right]_{\dim\sigma}}{\prod_{x\in\mathrm{gen}\,\sigma} x} = 0$$

ここで，左辺は対称代数 $S^* N_{\mathbb{R}} \simeq k[X_1,\ldots,X_r]$ を $\mathrm{gen}\,\Sigma$ で生成される積閉集合で局所化して得られる次数付き環の 0 次の部分の中で計算する.

非特異完備扇の第二等式

Σ が 2 次元非特異完備扇で $\mathrm{gen}\,\Sigma = \{v_1, \ldots, v_s\}$ かつ $\mathbb{R}_0 v_{i-1} + \mathbb{R}_0 v_i$ $(i = 1, \ldots, s, v_0 = v_s)$ が 2 次元錐とすると，第二等式は，$v_{s+1} = v_1$ として，

$$
\begin{aligned}
1 - \sum_{i=1}^{s} \frac{v_i}{2v_i} + \sum_{i=1}^{s} \frac{{v_{i-1}}^2 + 3v_{i-1}v_i + {v_i}^2}{12v_{i-1}v_i}
&= 1 - \frac{s}{4} + \sum_{i=1}^{s} \frac{v_{i-1} + v_{i+1}}{12v_i} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる.

P を $M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^r$ の空でない閉凸部分集合とする.
$x \in P$ として特性錐を $\mathrm{cc}(P) = \{y \in M_{\mathbb{R}} \,;\, x + \mathbb{R}_0 y \subset P\}$ と定義する. これは x の取り方に依らない.

任意の点 $x \in P$ について $P - x$ が原点の近傍である有理凸多面錐に等しいとき, P を準多面凸集合という.

準多面凸集合は局所的に凸多面体となるので面が自然に定義される. 準多面凸集合 P が r 次元で P 自身以外のすべての面が有界であるとき, P を準凸多面体という.

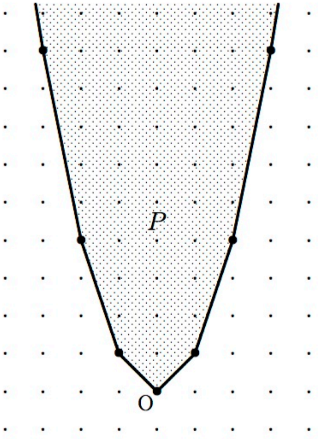
準凸多面体

P を準凸多面体とする.

このとき $\Sigma(P) = \{(P - x)^\vee \,;\, x \in P\}$ は $N_\mathbf{R}$ の扇となる. トーリック多様体 $Z(P) = Z(\Sigma(P))$ は P が有界でなければ完備でないが, $Z(P) \setminus T_N$ のすべての既約因子は完備となる. 特に, これらの因子の交点数が定義できる.

P の cc 次元を cc-dim $P = \dim \mathrm{cc}(P)$ で定義する. cc-dim $P = 0$ は P が有界であることと同値である. cc 次元が最大の r のとき P を**双曲型**と呼ぶ. ただし, 一般的すぎて用語が不適当かも知れない.

準凸多面体



放物型準凸多面体

トーリック型カスプ特異点

双曲型準凸多面体 P にアフィン変換群 Γ が自由に作用して，P の面全体が有限個の軌道を作るとき，
$\tilde{D} = Z(P) \setminus T_N$ の $Z(P)$ でのある近傍 $\tilde{W}(P)$ があって

$$D = \tilde{D}/\Gamma \subset W = \tilde{W}(P)/\Gamma$$

が 1 点に収縮して特異点となる．これを**トーリック型カスプ特異点**（土橋カスプ特異点）という．

トーリック型カスプ特異点

カスプ特異点 = 土橋カスプ特異点

- **ヒルベルトモジュラー曲面のカスプ特異点の拡張**
- **孤立特異点で非特異化の例外因子はトーリック因子**
- **不変量の扇による記述が可能**
- **双対カスプ特異点が定義される.**

[1] H. Tsuchihashi, Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities, Tohoku Math. J. **35**(1983), 607-639.

カスプ特異点

- 土橋による 3 次元カスプ特異点の構成法
- 数論的に構成されるものの佐武による分類（これは広範囲な代数群の分類に含まれる）
- 佐武と尾形による算術種数とゼータ関数の研究 (1989)
- 石田による 4 次元の例と一般次元の双対性定理 (1992)

カスプ特異点

数論的に構成されるものが多く存在することはわかっているが，簡単に記述できるものは少ない．

最近，土橋により 3 次元や 4 次元で，**鏡映変換**を用いた多くの記述しやすい例が構成されている．

カスプ特異点の場合も非特異化を与える扇によりトッド種数や第二等式の 0 錐を除く部分の計算ができる．後者は尾形による**カスプのゼータ関数の 0 での値**となる．

カスプ特異点には双対カスプ特異点が定義され，これらの不変量には双対性がある．

3 次元カスプ特異点