

計算ソフト SAGE の紹介

数学科教育法 集中講義
石田 正典

東北大学理学部

2017 年 8 月 28 日

計算ソフト

数学のさまざまな計算のできるパソコンソフトとしては Mathematica と Maple がある。もちろん、これら市販ソフトは優秀で有用であるが、購入コードの入力が必要で、契約期間が切れて使えなくなったりする不便さがある。

無料で使用できるものでも良いものは多くある。ここでは **SAGE** という計算ソフトを紹介する。

SAGE の入手方法

インターネットにつながったパソコン (Windows, Mac, Linux) を持っていれば

<http://www.sagemath.org>

からダウンロード出来る。ただし Windows の場合は VirtualBox というソフトを入れて、その上に SAGE を入れるので少し面倒である。

<https://en.wikipedia.org/wiki/SageMath>

やその日本語版で第三者の説明を見るのも参考になる。

整数の問題

数学 A の教科書にあった問題を 1 つ紹介する.

問題 正の整数 $a \leq b \leq c$ で

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

を満たすものをすべて求めよ.

$a = 1$ はダメで, $a \geq 4$ であれば和が 1 より少ないことに注意すれば (a, b, c) が $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$, $(3, 3, 3)$ のいずれかであることがわかる.

整数の問題

問題 正の整数 $a \leq b \leq c \leq d$ で

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$$

を満たすものをすべて求めよ.

$a \geq 5$ では左辺は 1 より小さいので $a \leq 4$ で考えればよい. SAGE で次のようにプログラムできる.

$(a, b, c, d) = (2, 3, 7, 42), (2, 3, 8, 24), (2, 3, 9, 18)$ など 14 組の解があることが計算される.

プログラム

```
for a in (1..4):
  if 1-1/a<=0:continue
  for b in (a..int(3/(1-1/a))):
    if 1-1/a-1/b<=0:continue
    for c in (b..int(2/(1-1/a-1/b))):
      if 1-1/a-1/b-1/c<=0:continue
      for d in (c..int(1/(1-1/a-1/b-1/c))):
        if 1/a+1/b+1/c+1/d==1:
          print a,b,c,d
```

エジプト式分数

分子が 1 の分数を**単位分数**という。

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}, \quad \frac{10}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{52}$$

のように有理数を相異なる単位分数の和で表示することが、古代エジプトで行われていたようである。
計算機で試すと、右の例は

$$\frac{10}{13} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{471} + \frac{1}{124073} + \dots$$

と 12 個の奇数分母の単位分数による和に書ける。この場合、最後の項の分母は 316 けたとなる。

素数

素数 2, 3, 5, 7, 11, ... は数が大きくなるほどまばらになる。素数の判定はかなり大きな数まで可能となっている。SAGE には `is_prime(n)` という関数があるので使ってみよう。

2^{1000} は約 300 桁の数である。 2^{1000} から $2^{1000} + 10000$ までにある素数を見つける。

```
a=2^1000; print a
for i in (1..10000):
    a+=1
    if a.is_prime(); print i
```


素数についての予想

素数については未解決の予想が多くある。次の2つが有名である。

- **双子素数の問題** : $(p, p + 2)$ の形の素数の組が無限個ある。
- **ゴールドバッハ予想** : 4以上の偶数は2つの素数の和となる。

自然数の問題では、 n が奇数なら $3n + 1$ を考え、偶数なら2で割る操作を繰り返すと、いつも必ず1になるだろうという **$3n + 1$ の問題**がある。これらは計算機でいろいろ実験することができる。

文献

[1] SAGE ホームページ

<http://www.sagemath.org>

[2] William Stein, Elementary Number Theory,
Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2008.

<http://www.wstein.org/ent/ent.pdf>