解析学 A （石田，2017/7/3）

4 章 3 節，問 2 (p.98)

(1) $x = t^4$ と置いて $dx = 4t^3dt$ より

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx \\
&= \int_0^1 \frac{4t^4}{1+t^2}dt \\
&= 4\int_0^1 \left\{t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right\} dt \\
&= 4\left[\frac{t^3}{3} - t + \arctan t\right]_0^1 \\
&= \frac{-8}{3} + \pi
\end{aligned}
$$

(2) まず $\{\arctan x\}' = \dfrac{1}{1+x^2}$ より

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\arctan\cos x$$

である．この問題で $x = \pi - t$ と置けば，$dx = -dt$, $\cos(\pi - t) = -\cos t$, $\sin(\pi - t) = \sin t$ より

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx \\
&= \int_\pi^0 \frac{-(\pi - t)\sin(\pi - t)}{1+\cos^2(\pi - t)}dt \\
&= \int_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt \\
&= \pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt \\
&- \int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt
\end{aligned}
$$

となる．最後の式の第 2 項を第 1 列に移項して

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx \\
&= \pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt \\
&= \pi\left[-\arctan\cos t\right]_0^\pi \\
&= \pi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}
$$

これは求める値の 2 倍なので答は $\dfrac{\pi^2}{4}$ となる．

(3) 思いつくのは難しいが $\dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}$ は積分可能で

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{x\sin x}{1+\cos x}\right)' \\
&= \frac{\sin x + x\cos x}{1+\cos x} + \frac{x\sin^2 x}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{\sin x + x\cos x}{1+\cos x} + \frac{x(1-\cos^2 x)}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{\sin x + x\cos x}{1+\cos x} + \frac{x(1-\cos x)}{1+\cos x} \\
&= \frac{x+\sin x}{1+\cos x}
\end{aligned}
$$

となる．したがって

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx \\
&= \left[\frac{x\sin x}{1+\cos x}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

となる．

(4) $a, b > 0$ が仮定されている．まず定積分 $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$ を求める．$x = \arctan t$ と置くと $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ より

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} \\
&= \int_0^\infty \frac{dt}{a^2t^2 + b^2} \\
&= \frac{1}{ab}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2+1} \\
&= \frac{\pi}{2ab}
\end{aligned}
$$

となる．途中で $t = \dfrac{bs}{a}$ と置換した．

$a = b$ の場合は $\dfrac{\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x}{a^2}$ であるから，$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^2 x = \frac{\pi}{4}$ より，積分は $\dfrac{\pi}{4a^2}$ となる．$a \neq b$ とする．このとき

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\, dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$$

と置けば

$$\frac{(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=1$$

より

$$(a^2-b^2)I+b^2J=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}$$

となる．$J=\dfrac{\pi}{2ab}$ より

$$(a^2-b^2)I=\frac{\pi}{2}-\frac{b\pi}{2a}=\frac{(a-b)\pi}{2a}$$

となり，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ で割って

$$I=\frac{\pi}{2a(a+b)}$$

となる．この解は $a=b$ の場合も正しい．

(5)
$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/4}\tan^2 x\,dx\\ =\;&\int_0^{\pi/4}\left\{\frac{1}{\cos^2 x}-1\right\}dx\\ =\;&[\tan x-x]_0^{\pi/4}\\ =\;&1-\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned}&\int_0^1 x\arctan x\,dx\\ =\;&\left[\frac{x^2}{2}\arctan x\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx\\ =\;&\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\left\{1-\frac{1}{1+x^2}\right\}dx\\ =\;&\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}[x-\arctan x]_0^1\\ =\;&\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(7) 部分積分により

$$\begin{aligned}&\int_0^a\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}}dx\\ =\;&\left[(x+a)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}}\right]_0^a\\ -\;&\int_0^a(x+a)\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{x+a}}}\frac{a\sqrt{x+a}}{2(x+a)^2\sqrt{x}}dx\\ =\;&\frac{a\pi}{2}-\int_0^a\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}dx\\ =\;&\frac{a\pi}{2}-\left[\sqrt{ax}\right]_0^a\\ =\;&\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a\end{aligned}$$

となる．ここで $\{\arcsin t\}'=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ であることと

$$\left(\sqrt{\frac{x}{x+a}}\right)'=\frac{a\sqrt{x+a}}{2(x+a)^2\sqrt{x}}$$

を用いた．

(8) $x=t^2$ と変換して $dx=2t\,dt$ より

$$\begin{aligned}&\int_0^1\log(1+\sqrt{x})dx\\ =\;&\int_0^1 2t\log(1+t)dt\\ =\;&[t^2\log(1+t)]_0^1-\int_0^1\frac{t^2\,dt}{1+t}\\ =\;&\log 2-\int_0^1\left\{t-1+\frac{1}{1+t}\right\}dt\\ =\;&\log 2-\left[\frac{t^2}{2}-t+\log(1+t)\right]_0^1\\ =\;&\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(9)
$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan x)dx\\ =\;&\int_0^{\pi/4}\log\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)dx\\ =\;&\int_0^{\pi/4}\log\sqrt{2}\left(\frac{\cos(-(\pi/4)+x)}{\cos x}\right)dx\\ =\;&\int_0^{\pi/4}\log\sqrt{2}\,dx+\int_0^{\pi/4}\cos((\pi/4)-x)dx\\ -\;&\int_0^{\pi/4}\cos x\,dx\\ =\;&\int_0^{\pi/4}\log\sqrt{2}\,dx\\ =\;&\frac{\pi}{8}\log 2\end{aligned}$$

(10) $x=\tan t$ と置換すれば $dt=\dfrac{dx}{1+x^2}$ より (9) と同じで

$$\int_0^1\frac{\log(1+x)dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{8}\log 2$$