解析学 A,（石田，2017/6/5）

微分積分学入門，3 章（微分）

p. 67, 問 2. (4) $f(x)=(x^2-1)^n$ と置く．1 回微分は $f^{(1)}(x)=2nx(x^2-1)^{n-1}$ であるから

$$(x^2-1)f^{(1)}(x)=2nxf(x) \qquad (*)$$

となる．(*) の両辺の $n+1$ 回微分を，それぞれライプニッツの公式で計算する．左辺は

$$\begin{aligned}
&\frac{n(n+1)}{2}\cdot 2\cdot f^{(n)}(x)\\
&\quad + (n+1)(2x)f^{(n+1)}(x)\\
&\quad + (x^2-1)f^{(n+2)}(x)\\
&= (x^2-1)f^{(n+2)}(x)+2(n+1)xf^{(n+1)}(x)\\
&\quad + n(n+1)f^{(n)}(x)\\
&= (x^2-1)P_n''(x)+2(n+1)xP'(x)\\
&\quad +n(n+1)P(x)
\end{aligned}$$

となる．(*) の右辺の $n+1$ 回微分は

$$\begin{aligned}
&2n(n+1)f^{(n)}(x)+2nxf^{(n+1)}(x)\\
&\quad = 2nxP_n'(x)+2n(n+1)P_n(x)
\end{aligned}$$

となる．これらが等しいので，求める等式

$$(x^2-1)P_n''(x)+2nxP'(x)-n(n+1)P(x)=0$$

が二式の差をとって得られる．

p. 71, 問 1. (2) $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ と置けば

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= e^x-e^{-x}-2\sin x\\
f^{(2)}(x) &= e^x+e^{-x}-2\cos x
\end{aligned}$$

となる．

$$e^x+e^{-x}-2=e^{-x}(e^x-1)^2\geqq 0$$

より $f^{(2)}(x)=e^{-x}(e^x-1)^2+2(1-\cos x)\geqq 0$ で等式は $x=0$ だけで成り立つ．これから $f^{(1)}(x)$ が全区間 $(-\infty,\infty)$ で単調増加であることがわかり，$f^{(1)}(0)=0$ より，$(-\infty,0)$ で $f^{(1)}(x)<0$, $(0,\infty)$ で $f^{(1)}(x)>0$ となる．したがって，$f(x)$ は $x=0$ でただ一つの極小値 $f(0)=4$ をとる．

p. 72, 問 3. 三角形の辺の長さを a,b,c とすると，面積 S はヘロンの公式により

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \left(s=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

となる．相加平均と相乗平均の不等式により

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}\\
&\quad \leqq \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\\
&\quad = \frac{3s-(a+b+c)}{3}=\frac{s}{3}
\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\
&\leqq \sqrt{s\left(\frac{s}{3}\right)^3}\\
&= \sqrt{\frac{s^4}{27}}=\frac{s^2}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

となる．周の長さ $2s$ が一定とすると，面積が最大の $\dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$ となるのは，$s-a=s-b=s-c$, すなわち $a=b=c$ で正三角形となる場合である．

練習問題 12. (1) この等式がすべての n 回微分可能な関数について成り立つことを，n についての数学的帰納法で証明する．

$n=1$ の場合は，合成関数の微分を行い

$$\frac{d}{dx}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-1}{x^2}f^{(1)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

となるので正しい．

m を正の整数として $n\leqq m$ で帰納法の仮定が成立するとする．$n=m+1$ とし，$f(x)$ を n 回微分可能とする．m 回まで微分可能な関数 $f^{(1)}(x)$ に帰納法の仮定を使うことにより

$$\begin{aligned}
&\frac{d^m}{dx^m}\left(x^mf\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&\quad = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left\{x^mf\left(\frac{1}{x}\right)\right\}'\\
&\quad = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left\{mx^{m-1}f\left(\frac{1}{x}\right)-x^{m-2}f^{(1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}\\
&\quad = m\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}x^{m-1}f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{(-1)^{m-1}}{x^m}f^{(m)}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

となる．この等式の両辺を x で微分すると，$m+1=n$ より

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&= m\frac{d^m}{dx^m}x^{m-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\\
&- \left\{\frac{m(-1)^m}{x^{m+1}}f^{(m)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(-1)^m}{x^{m+2}}f^{(m+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}\\
&= \frac{m(-1)^m}{x^{m+1}}f^{(m)}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&- \left\{\frac{m(-1)^m}{x^{m+1}}f^{(m)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(-1)^m}{x^{m+2}}f^{(m+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}\\
&= \frac{(-1)^{m+1}}{x^{m+2}}f^{(m+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

となり，$n=m+1$ でも等式が成り立つことがわかる．

(2) $n=0$ では明らかに正しい．$n=m\geqq 0$ で正しいと仮定する．

$$\begin{aligned}
&\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}f(ax)\\
&= \left\{\frac{d^m}{dx^m}f(ax)\right\}'\\
&= \{a^m f^{(m)}(ax)\}'\\
&= a^{m+1}f^{(m+1)}(ax)
\end{aligned}$$

となり $n=m+1$ でも正しい．よって，数学的帰納法により，すべての n について正しい．

練習問題 13. 教科書の解答例はテイラーの定理を使う証明だが，対数をとって普通に証明できる．

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(na_n)/n=0$ から

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\log(1+a_n)^n\\
&= \lim_{n\to\infty}na_n\log(1+a_n)^{1/a_n}\\
&= \alpha\log e\\
&= \alpha
\end{aligned}$$

より $\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^n=e^\alpha$ となる．

練習問題 14. 整数 m,n により $e=m/n$ であるとする．n は 2 以上に取る．e^x を次の練習問題 15 の形に展開して $x=1$ とおくと

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta_n}}{(n+1)!}$$

となる．この等式の両辺を $n!$ 倍すると左辺は $(n-1)!m$ で整数で，右辺は項ごとに $n!$ 倍して最後の項 $e^{\theta_n}/(n+1)$ 以外は整数である．$0<e<3$ で $0<\theta_n<1$ であるから $0<e^{\theta_n}<3$ となり，分母は 3 以上なので $e^{\theta_n}/(n+1)$ は整数ではない．したがって右辺は整数ではなく等式であることに矛盾する．したがって e は有理数ではない．

練習問題 17. (1) $f(x)=x\log x$ は $f''(x)=\{\log x+1\}'=1/x$ より $x>0$ で狭義凸関数である．したがって $a_1,\ldots,a_n>0$ について

$$f\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)\leqq\frac{f(a_1)+\cdots+f(a_n)}{n}$$

となる．左辺は $a_1+\cdots+a_n=1$ の仮定より $\log(1/n)/n=-\log(n)/n$ であるから

$$\frac{-\log(n)}{n}\leqq\frac{a_1\log(a_1)+\cdots+a_n\log(a_n)}{n}$$

となる．両辺を $-n$ 倍すると不等号の向きが変わって

$$-\{a_1\log(a_1)+\cdots+a_n\log(a_n\}\leqq\log(n)$$

となる．

(2) $x=a^p$, $y=b^q$, $s=1/p$, $t=1/q$ と置くと $a=x^{1/p}=x^s$, $b=y^{1/q}=y^t$, $0<s<1$ となるので，$s,t>0$, $s+t=1$ の仮定で $x^sy^t\leqq sx+ty$ を示せばよい．

$f(x)=-\log x$ は $f''(x)=\{-1/x\}'=1/x^2$ より $x>0$ で狭義凸である．したがって

$$f(sx+ty)\leqq sf(x)+tf(y)$$

となる．左辺は $-\log(sx+ty)$ で右辺は $-s\log x-t\log y=-\log x^sy^t$ であるから $-\log(sx+ty)\leqq-\log x^sy^t$ より，$x^sy^t\leqq sx+ty$ が得られる．