解析学 A，（石田，2017/5/29）

微分積分学入門，p. 45, 問 1

(1)

$$\begin{aligned}
&\{(x^2-1)(x+3)\}' \\
&= (x^2-1)'(x+3)+(x^2-1)(x+3)' \\
&= 2x(x+3)+(x^2-1) \\
&= 2x^2+6x+x^2-1 \\
&= 3x^2+6x-1
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' \\
&= \frac{(2x)'(x^2+1)-2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{ax+b})' \\
&= ((ax+b)^{1/2})' \\
&= \frac{1}{2}(ax+b)^{-1/2}(ax+b)' \\
&= \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)' \\
&= \frac{(1+\sqrt{x})'(1-\sqrt{x})-(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})'}{(1-\sqrt{x})^2} \\
&= \frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}})(1-\sqrt{x})-(1+\sqrt{x})(\frac{-1}{2\sqrt{x}})}{(1-\sqrt{x})^2} \\
&= \frac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}
\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)' \\
&= \frac{x'(x+\sqrt{x^2+1})-x(x+\sqrt{x^2+1})'}{(x+\sqrt{x^2+1})^2} \\
&= \frac{(x+\sqrt{x^2+1})-x\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x)\right)}{(x+\sqrt{x^2+1})^2} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})-x(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})^2} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}
\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
&\left(x\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}\right)' \\
&= \left(\frac{x(1+\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}}\right)' \\
&= \frac{(x+x\sqrt{x})'\sqrt{1-x}-(x+x\sqrt{x})(\sqrt{1-x})'}{1-x} \\
&= \frac{(1+\frac{3}{2}\sqrt{x})\sqrt{1-x}-(x+x\sqrt{x})\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} \\
&= \frac{2+3\sqrt{x}-2x-3x\sqrt{x}+x+x\sqrt{x}}{2(1-x)\sqrt{1-x}} \\
&= \frac{2+3\sqrt{x}-x-2x\sqrt{x}}{2(1-x)\sqrt{1-x}}
\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)' \\
&= \left(\frac{2}{1+\tan x}-1\right)' \\
&= \left(\frac{2\cos x}{\cos x+\sin x}-1\right)' \\
&= \frac{2(\cos x)'(\cos x+\sin x)-2\cos x(\cos x+\sin x)'}{(\cos x+\sin x)^2} \\
&= \frac{-2\sin x(\cos x+\sin x)-2\cos x(-\sin x+\cos x)'}{(\cos x+\sin x)^2} \\
&= \frac{-2\sin^2 x-2\cos^2 x}{(\cos x+\sin x)^2} \\
&= \frac{-2}{(\cos x+\sin x)^2}
\end{aligned}$$

(8)

$$(\sin x^2)' = \cos x^2(x^2)' = 2x\cos x^2$$

(9)

$$
\begin{aligned}
&(\sin^m x \cos^n x)' \\
&= (\sin^m x)' \cos^n x + \sin^m x (\cos^n x)' \\
&= (m \sin^{m-1} \cos x) \cos^n x \\
&\quad + \sin^m x(-n \cos^{n-1} x \sin x) \\
&= m \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x - n \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x
\end{aligned}
$$

(10)

$$
(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}
$$

(11)

$$
(\mathrm{cosec}\, x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}
$$

(12)

$$
\begin{aligned}
&(\cot x)' \\
&= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' \\
&= \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-1}{\sin^2 x}
\end{aligned}
$$

(13)

$$
(e^{-x^2})' = e^{-x^2}(-x^2)^2 = -2xe^{-x^2}
$$

(14)

$$
(\log(\log x))' = \frac{1}{\log x}(\log x)' = \frac{1}{x \log x}
$$

(15)

$$
\begin{aligned}
&(e^x \log x)' \\
&= (e^x)' \log x + e^x (\log x)' \\
&= e^x \log x + e^x \frac{1}{x} \\
&= (\log x + \frac{1}{x}) e^x
\end{aligned}
$$

(16)

$$
\begin{aligned}
&(e^{ax} \sin bx)' \\
&= (e^{ax})' \sin bx + e^{ax} (\sin bx)' \\
&= a e^{ax} \sin bx + e^{ax} (b \cos bx) \\
&= (a \sin bx + b \cos bx) e^{ax}
\end{aligned}
$$

(17)

$$
\begin{aligned}
&(e^{ax} \cos bx)' \\
&= (e^{ax})' \cos bx + e^{ax} (\cos bx)' \\
&= a e^{ax} \cos bx + e^{ax} (-b \sin bx) \\
&= (a \cos bx - b \sin bx) e^{ax}
\end{aligned}
$$

(18)

$$
\begin{aligned}
&\left(\log \sqrt{x^2 + x + 1}\right)' \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} (\sqrt{x^2 + x + 1})' \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \left(\frac{(x^2 + x + 1)'}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}\right) \\
&= \frac{2x + 1}{2(x^2 + x + 1)}
\end{aligned}
$$

微分積分学入門，p. 45, 問 2

(1)

$$
(\sinh x)' = \frac{(e^x + e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \cosh x
$$

(2)

$$
(\cosh x)' = \frac{(e^x - e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sinh x
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&(\tanh x)' \\
&= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' \\
&= \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x (\cos x)'}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{1}{\cosh^2 x}
\end{aligned}
$$

微分積分学入門，p. 60, 問 2

区間 I で関数 $f(x)$ が微分可能で $f'(x) = a$ とする．定点 $c \in I$ を取る．このとき，任意の x について等式 $f(x) = a(x-c)+f(c)$ を示せば，$b = -ac+f(c)$ と置いて $f(x) = ax + b$ となる．$x = c$ なら等式は明らかなので $x \neq c$ とする．$x > c$ の場合は閉区間 $[c, x]$ に平均値の定理を適用して，ある $d \in (c, x)$ で $(f(x) - f(c))/(x - c) = f'(d)$ だが，右辺は a なので $f(x) - f(c) = a(x - c)$ となり等式が得られる．$x < c$ の場合は閉区間 $[x, c]$ に平均値の定理を適用して，ある $d \in (x, c)$ で $(f(c) - f(x))/(c - x) = f'(d)$ だが，右辺は a なので $f(c) - f(x) = a(c - x)$ となり，これからも等式が得られる．

微分積分学入門，p. 60, 問 3

p.44，例 7 により $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$，$(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$ であるから

$$(\arcsin x + \arccos x)' = 0$$

となる．よって定理 12 (p. 52) により $\arcsin x + \arccos x$ は定数である．$x = 0$ での値を考えると，$\sin 0 = 0$ と $\cos(\pi/2) = 0$ より $\arcsin 0 = 0$ および $\arccos 0 = \pi/2$ となる．したがって，この定数は $\pi/2$ で，$\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ となる．

微分積分学入門，p. 60, 問 4

(1) $\dfrac{0}{0}$ のロピタルの定理を使う．

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} \\
&= \frac{2}{1} = 2
\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{0}{0}$ のロピタルの定理を使う．

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(a^x - b^x)'}{(x)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\log a)a^x - (\log b)b^x}{1} \\
&= \log a - \log b
\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{0}{0}$ のロピタルの定理を使う．

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 - x^2 + x^4)}{\log(1 + x^2 + x^4)} \\
&\quad= \lim_{x\to 0} \frac{(\log(1 - x^2 + x^4))'}{(\log(1 + x^2 + x^4))'} \\
&\quad= \lim_{x\to 0} \left\{ \left(\frac{-2x + 4x^3}{1 - x^2 + x^4} \right) \left(\frac{1 + x^2 + x^4}{2x + 4x^3} \right) \right\} \\
&\quad= \lim_{x\to 0} \left(\frac{(-2 + 4x^2)(1 + x^2 + x^4)}{(2 + 4x^2)(1 - x^2 + x^4)} \right) \\
&\quad= \frac{-2}{2} = -1
\end{aligned}$$

(4) $\dfrac{0}{0}$ のロピタルの定理を使う．

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{x}{\log x} \right) \\
&\quad= \lim_{x\to 1} \frac{1 - x}{\log x} \\
&\quad= \lim_{x\to 1} \frac{(1 - x)'}{(\log x)'} \\
&\quad= \lim_{x\to 1} \frac{(-1)x}{1} = -1
\end{aligned}$$

(5) $\dfrac{\infty}{\infty}$ のロピタルの定理を使う．

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} x \log x &= \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x^{-1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\log x)'}{(x^{-1})'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} (-x) = 0
\end{aligned}$$

(6) $\dfrac{0}{0}$ のロピタルの定理を使う．

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to \pi/2} \tan^2 x \log \sin x \\
&\quad= \lim_{x\to \pi/2} \frac{\log \sin x}{\cot^2 x} \\
&\quad= \lim_{x\to \pi/2} \frac{(\log \sin x)'}{(\cot^2 x)'} \\
&\quad= \lim_{x\to \pi/2} \left\{ \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right) \left(\frac{\sin^3 x}{-2 \cos x} \right) \right\} \\
&\quad= \lim_{x\to \pi/2} \frac{-\sin^2 x}{2} = \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

(7) $\dfrac{\infty}{\infty}$ のロピタルの定理を使う．

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\log x}{x^p} = \lim_{x\to \infty} \frac{(\log x)'}{(x^p)'}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\infty} \frac{p}{x(x^{p-1})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{p}{x^p} \ = \ 0
\end{aligned}
$$

(8) $\dfrac{\infty}{\infty}$ のロピタルの定理を使う.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\log x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(\log x)'} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1} \\
&= \lim_{x\to\infty} x \ = \ \infty
\end{aligned}
$$

(9) $\log(\tan x)^{\sin 2x}$ の極限に $\dfrac{\infty}{\infty}$ のロピタルの定理を使う.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pi/2-0} \log(\tan x)^{\sin 2x} \\
&= \lim_{x\to\pi/2-0} \frac{\log(\tan x)}{(\sin 2x)^{-1}} \\
&= \lim_{x\to\pi/2-0} \frac{\log(\tan x)'}{((\sin 2x)^{-1})'} \\
&= \lim_{x\to\pi/2-0} \left(\frac{1}{\cos^2 x \tan x} \cdot \frac{2\sin^2 x \cos^2 x}{1 - 2\cos^2 x} \right) \\
&= \lim_{x\to\pi/2-0} \frac{2\sin x \cos x}{1 - 2\cos^2 x} \\
&= \frac{0}{1} \ = \ 0
\end{aligned}
$$

より $\lim_{x\to\pi/2-0} (\tan x)^{\sin 2x} = e^0 = 1$ となる.

(10) $\dfrac{0}{0}$ のロピタルの定理を使う.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{cosec} x (e^x - \cos x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - \cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(e^x - \cos x)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{(e^x + \sin x)'} \\
&= \frac{1}{1} \ = \ 1
\end{aligned}
$$

(11)

$$
\log \left\{ \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} \right\} = \frac{\log \left(\dfrac{a^x + b^x}{2} \right)}{x}
$$

について $\dfrac{0}{0}$ のロピタルの定理を使う.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\log \left(\dfrac{a^x + b^x}{2} \right)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\log \left(\dfrac{a^x + b^x}{2} \right)'}{(x)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{(\log a) a^x + (\log b) b^x}{2}}{\dfrac{a^x + b^x}{2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\log a) a^x + (\log b) b^x}{a^x + b^x} \\
&= \frac{\log a + \log b}{2} \ = \ \log \sqrt{ab}
\end{aligned}
$$

したがって，求める極限は $e^{\log \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$ となる.

(12)

$$
\log x^{\tan(\pi x/2)} = \frac{\log x}{\cot(\pi x/2)}
$$

について $\dfrac{0}{0}$ のロピタルの定理を使う.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{\cot(\pi x/2)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(\log x)'}{(\cot(\pi x/2))'} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^{-1}}{-(\pi/2)\operatorname{cosec}^2(\pi x/2)} \\
&= \frac{-2}{\pi}
\end{aligned}
$$

したがって，求める極限は $e^{-(2/\pi)}$ となる.