代数学序論 B 補足 5（エルミート空間） （石田） 2017/7/13

$\{v_1,\dots,v_n\}$ をエルミート内積を持つ $\mathbf{C}$ ベクトル空間の基底とする．$i=1,\dots,n$ について $w_i\in\langle v_1,\dots,v_i\rangle_{\mathbf{C}}$ をとって $\{w_1,\dots,w_n\}$ が正規直交基底となるようにしたい．まず w_i の代わりに 0 でないベクトル $v_i'\in\langle v_1,\dots,v_i\rangle_{\mathbf{C}}$ を $v_1',\dots,v_n'$ のどの 2 つも直交するようにとって，そのあと各 v_i' を長さが 1 になるようにスカラー倍したものを w_i とする．なお，エルミート内積について $(u,v)=\overline{(v,u)}$ であるから，直交の条件 $(u,v)=0$ は $(v,u)=0$ と同値である．

まず $v_1'=v_1$ とする．当然 $\langle v_1'\rangle_{\mathbf{C}}=\langle v_1\rangle_{\mathbf{C}}$ である．次に

$$v_2'=v_2-\frac{(v_2,v_1')}{(v_1',v_1')}v_1'\in\langle v_1',v_2\rangle_{\mathbf{C}}$$

と置けば $(v_2',v_1')=0$ と計算できる．この式から $\langle v_1',v_2'\rangle_{\mathbf{C}}=\langle v_1',v_2\rangle_{\mathbf{C}}=\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbf{C}}$ もわかる．次に

$$v_3'=v_3-\frac{(v_3,v_1')}{(v_1',v_1')}v_1'-\frac{(v_3,v_2')}{(v_2',v_2')}v_2'\in\langle v_1',v_2',v_3\rangle_{\mathbf{C}}$$

と置けば，$(v_2',v_1')=0$ を使って $(v_3',v_1')=(v_3',v_2')=0$ が容易に計算できる．以下帰納的にどの 2 つも互いに直交する $v_1',\dots,v_k'$ が求まって $\langle v_1',\dots,v_i'\rangle_{\mathbf{C}}=\langle v_1,\dots,v_i\rangle_{\mathbf{C}}$, $i=1,\dots,k$ と出来たとする．$k<n$ であれば v_{k+1}' を

$$v_{k+1}'=v_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}\frac{(v_{k+1},v_i')}{(v_i',v_i')}v_i'\in\langle v_1',\dots,v_k',v_{k+1}\rangle$$

で定義すれば $i=1,\dots,k$ について $(v_{k+1}',v_i')=0$ となる．また，この式から

$$\langle v_1',\dots,v_k',v_{k+1}'\rangle_{\mathbf{C}}=\langle v_1',\dots,v_k',v_{k+1}\rangle_{\mathbf{C}}=\langle v_1,\dots,v_k,v_{k+1}\rangle_{\mathbf{C}}$$

もわかる．このようにして得られた $v_1',\dots,v_n'$ はどの 2 つも互いに直交するので，各 i について $w_i=\dfrac{v_i'}{|v_i'|}$ と置けば $\{w_1,\dots,w_n\}$ が正規直交基底となる．

n 次元複素ベクトル空間 V は $2n$ 次元の実ベクトル空間と考えることができる．実数は複素数とみなせるので V でのスカラー倍に問題はない．$\{v_1,\dots,v_n\}$ を V の基底とすると $\{v_1,iv_1,\dots,v_n,iv_n\}$ が V の実ベクトル空間としての基底となる．

V を n 次元エルミート空間とする．$w\in V$ に対して $\phi(w):V\to\mathbf{C}$ を $\phi(w)(v)=(v,w)$ で定義する．エルミート内積の定義から $\phi(w)$ は $\mathbf{C}$ 線形写像となり双対空間 V^* の元となる．これにより写像 $\phi:V\to V^*$ が得られる．明らかに $\phi(w+w')=\phi(w)+\phi(w')$ であるが，$c\in\mathbf{C}$ について $\phi(cw)(v)=(v,cw)=\bar{c}(v,w)$ より $\phi(cw)=\bar{c}\phi(w)$ となるので ϕ は $\mathbf{C}$ 線形ではない．c が実数であれば $\bar{c}=c$ であるから ϕ は $\mathbf{R}$ 線形となる．$w\neq 0$ とすると $\phi(w)(w)=(w,w)\neq 0$ なので $\phi(w)\neq 0$ である．$2n$ 次元ベクトル空間同士の $\mathbf{R}$

線形写像として $\operatorname{Ker}\phi = 0$ なので ϕ は同型である．特に $\mathbf{R}$ 線形な逆写像 $\phi^{-1} : V^* \to V$ が定義される．

$T : V \to V$ を $\mathbf{C}$ 線形写像とする．$w \in V$ に対して $\tau(w) : V \to \mathbf{C}$ を $\tau(w)(v) = (Tv, w)$ で定義する．

$$\tau(w)(v+v') = (T(v+v'), w) = (Tv, w) + (Tv', w) = \tau(w)(v) + \tau(w)(v')\ ,$$

$$\tau(w)(cv) = (T(cv), w) = (cTv, w) = c(Tv, w) = c\tau(w)(v)$$

より $\tau(w) \in V^*$ となる．これにより写像 $\tau : V \to V^*$ が得られる．明らかに $\tau(w + w') = \tau(w) + \tau(w')$ であるが，$c \in \mathbf{C}$ については $\tau(cw)(v) = (Tv, cw) = \bar{c}(Tv, w)$ より $\tau(cw) = \bar{c}\tau(w)$ となり τ も $\mathbf{C}$ 線形ではない．$S = \phi^{-1} \cdot \tau : V \to V$ と置く．$w \in V$ に対して $\phi(Sw) = \tau(w) \in V^*$ であるから，任意の $v, w \in V$ に対して $(Tv, w) = (v, Sw)$ となる．S は $\mathbf{R}$ 線形写像の合成なので $S(w + w') = S(w) + S(w')$ を満たす．スカラー倍については

$$(v, S(cw)) = (Tv, cw) = \bar{c}(Tv, w) = \bar{c}(x, Sw) = (v, c(Sw))$$

より．任意の $v \in V$ について $(v, S(cw) - c(Sw)) = 0$ となる．ϕ の単射性より $S(cw) - c(Sw) = 0$ となるので $S(cw) = c(Sw)$ である．これで S が $\mathbf{C}$ 線形であることがわかる．$T^* = S$ を T の**共役変換**あるいは**随伴変換**という．ユニタリ変換 $T : V \to V$ については $(v, T^{-1}w) = (Tv, T(T^{-1}w) = (Tv, w)$ であるから $T^* = T^{-1}$ である．

$\mathbf{C}^n$ の標準基底と標準エルミート内積について $T : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ と T^* の表現行列を A, B とすれば ${}^{\mathrm{t}}(Ax)\bar{y} = {}^{\mathrm{t}}x\overline{By}$ となる．これより ${}^{\mathrm{t}}x({}^{\mathrm{t}}A - \overline{B})\bar{y} = 0$ が任意の $x, y \in \mathbf{C}^n$ について成り立つので ${}^{\mathrm{t}}A = \overline{B}$ となる．すなわち $B = {}^{\mathrm{t}}\overline{A} = A^*$ である．特に A がエルミート行列であれば $T^* = T$ となる．

$TT^* = T^*T$ である変換 T を**正規変換**という．T を正規変換とする．λ を T の固有値の 1 つとし，$E(T, \lambda)$ を固有空間とすると，$x \in E(T, \lambda)$ に対し $T(T^*x) = T^*(Tx) = T^*(\lambda x) = \lambda(T^*x)$ より $T^*x \in E(T, \lambda)$ である．$T^*(E(T, \lambda)) \subset E(T, \lambda)$ より $\mathbf{C}$ 線形変換 $T^*|E(T, \lambda)$ についての固有ベクトル $x_1 \in E(T, \lambda)$ が存在する．$(Tx_1, x_1) = (x_1, T^*x_1)$ の関係から固有値は $\bar{\lambda}$ である．x_1 は $|x_1| = 1$ となるように取れる．

$V' = \{v \in V\ ;\ (v, x_1) = 0\}$ と置けば V' は $\phi(x) : V \to \mathbf{C}$ の核であるから V の $n-1$ 次元部分空間である．$v \in V'$ について $(Tv, x_1) = (v, T^*x_1) = (v, \bar{\lambda}x_1) = 0$, $(T^*v, x_1) = (v, Tx_1) = (v, \lambda x_1) = 0$ より $T(V') \subset V'$ であり，$T|V'$ は正規変換で $T^*|V'$ がその随伴変換である．V' から T と T^* 両方の固有ベクトル x_2 をとる同様の作業を続ければ，T の固有ベクトルからなる正規直交基底 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ が構成できる．すなわち，正規変換はある正規直交基底により表現行列が対角となる．