代数学序論 B 補足 3（石田） 2017/6/01

V を体 K 上の有限次ベクトル空間とし，T を V の線形変換とする．x を V の元とすると，任意の $n>0$ について V の元の列

$$x\ ,\ \ T(x)\ ,\ \ T^2(x)\ ,\ \ T^3(x)\ ,\ \ \cdots\ ,\ \ T^{n-1}(x)$$

が考えられる．このような V の元の列を T **列**と呼ぶことにする．

V が次のような基底 $\{x_{i,j}\ ;\ i=1,\ldots,d, j=1,\ldots,m_i\}$ を持つとき，これをベクトル空間 V の T に関する**冪零ジョルダン基底**と呼ぶ．

ある非負整数 d と正の整数の列 $m_1 \geqq m_2 \geqq \cdots \geqq m_d$ について，V の基底 $B=\{x_{i,j}\ ;\ i=1,\ldots,d, j=1,\ldots,m_i\}$ があって

$$(*) \qquad T(x_{i,j}) = \begin{cases} x_{i,j+1} & j<m_i \\ 0 & j=m_i \end{cases}$$

となっている．すなわち， 各 i について $x_{i,1},x_{i,2},\ldots,x_{i,m_i}$ は T 列で最後の元は T で 0 に移される．

線形変換 T はある $n>0$ について $T^n=0$ となるとき**冪零** という．

補題 3.1 V が T に関する冪零ジョルダン基底を持てば，線形変換 T は冪零である．

証明 $(*)$ から，任意の $x_{i,j}$ について $T^{m_i-j}(x_{i,j})=x_{i,m_i}$ であり，$T^{m_i-j+1}(x_{i,j})=0$ となる．すべての i,j について $m_i-j+1 \le m_i \le m_1$ であるから $T^{m_1}(x_{i,j})=0$ となる．$\mathrm{Ker}(T^{m_1})$ の部分集合 $B=\{x_{i,j}\}$ は V を生成するので $\mathrm{Ker}(T^{m_1})=V$ すなわち $T^{m_1}(V)=0$ となり，T は冪零である．

B を T に関する V の冪零ジョルダン基底とする．$B_1=\{x_{1,1},x_{2,1},\ldots,x_{d,1}\}$, $B_2=\{x_{i,j}\ ;\ i=1,\ldots,d, j=2,\ldots,m_i\}$ とし，V_1 と V_2 をそれぞれ B_1 と B_2 で生成される V の部分空間とする．$B_1 \cap B_2=\emptyset$ で $B_1 \cup B_2 = B$ なので，$V=V_1 \oplus V_2$ となる．また，$(*)$ より $T(B)=B_2 \cup \{0\}$ であるから $T(V)=V_2$ となる．

補題 3.2 0 でない元 $x=a_1x_{1,1}+\cdots+a_dx_{d,1} \in V_1$ について $a_1=\cdots=a_{s-1}=0$, $a_s \neq 0$ を満たす s を考え $x'_{s,1}=x, x'_{s,2}=T(x),\ldots,x'_{s,m_s}=T^{m_s-1}(x)$ とおく．このとき， B の T 列 $x_{s,1},x_{s,2},\ldots,x_{s,m_s}$ を T 列 $x'_{s,1},x'_{s,2},\ldots,x'_{s,m_s}$ で置き換えた B' も T に関する V の冪零ジョルダン基底となる．

証明 $j<m_s$ について $T(x'_{s,j})=x'_{s,j+1}$ は明らかである．$j=m_s$ の場合は， s の取り方より $x=a_sx_{s,1}+\cdots+a_dx_{d,1}$ であるから

$$T(x'_{s,m_s})=T^{m_s}(x)=a_sT^{m_s}(x_{s,1})+\cdots+a_dT^{m_s}(x_{d,1})$$

であるが，$i=s,\dots,d$ について $m_i \le m_s$ であるから右辺は 0 である．したがって $x'_{s,1},\dots,x'_{s,m_s}$ も $(*)$ の条件を満たす．B' が V の基底であることは，$C=\{x_{i,j}\ ;\ i=s+1,\dots,d, j=1,\dots,m_i\}$ と置いて W を C で生成される V の部分空間とすると，$C\subset B'$ であることから $B'\setminus C$ の商空間 V/W への像が V/W の基底であることを示せばよい（補題 3.4 参照）．これは $B\setminus C$ の像が基底であることと，各 $x'_{s,j}$ の像が $x_{s,j}$ の像の a_s 倍であることからわかる．

定理 3.3　V の線形変換 T が冪零であれば，V は T に関する冪零ジョルダン基底を持つ．

証明　V の部分空間 V' で $T(V')\subset V'$ であって冪零ジョルダン基底を持つもの全体の集合 X を考える．$V'=\{0\}$ は $d=0$ として条件を満たす．V' を X の極大元とする．$V'=V$ であることを示せばよい．$V'\neq V$ とする．T は線形変換 $T':V/V'\to V/V'$ を引き起こす．T' も冪零であるから，ある 0 でない $\bar v\in V/V'$ について $T'(\bar v)=0$ となる．$v\in V$ を $\bar v$ の代表元とすると $v\notin V'$ かつ $T(v)\in V'$ である．V' の冪零ジョルダン基底 B をとり，これについて上記の直和分解 $V'=V_1\oplus V_2$ を考え $T(v)=x_1+x_2$ と書く．$T(V')=V_2$ であるから， $T(y)=x_2$ となる $y\in V'$ が存在し $T(v-y)=x_1$ となる．$x_1\neq 0$ の場合，$x_1\in V_1$ について補題の T 列 $x'_{s,1},\dots,x'_{s,m_s}$ を考え，B の T 列 $x_{s,1},x_{s,2},\dots,x_{s,m_s}$ と取り替えた冪零ジョルダン基底を B' とする．ここで $x=v-y$ と置けば $T(x)=x_1$ より， $x,x_{s,1},x_{s,2},\dots,x_{s,m_s}$ は長さ m_s+1 の T 列となる．

$$m_1,\dots,m_{s-1},m_s+1,m_{s+1},\dots,m_d$$

を大きさの順に並べ換えて $x_{i,j}$ の番号を付け直せば $B'\cup\{x\}$ が $V'+Kv$ の冪零ジョルダン基底となる．$x_1=0$ の場合は $d'=d+1$, $m_{d'}=1$, $x_{d',1}=v-y$ と置けば $V'+Kv$ の冪零ジョルダン基底となる．いずれにしても，これは V' の極大性に矛盾する．よって $V'=V$ であり，V は冪零ジョルダン基底を持つ．

補題 3.4　$x_1,\dots,x_n$ が有限次元ベクトル空間 V の元で，ある $0\leqq d<n$ について $x_1,\dots,x_d$ が 1 次独立とする．W を $\{x_1,\dots,x_d\}$ で生成される部分空間とし $\bar x_{d+1},\dots,\bar x_n$ を $x_{d+1},\dots,x_n$ の商空間 V/W への像とする．このとき，もし $\{\bar x_{d+1},\dots,\bar x_n\}$ が V/W の基底であれば，$\{x_1,\dots,x_n\}$ は V の基底である（教科書の命題 10.2.13 参照）．

証明　$\phi: V\to V/W$ を自然な全射とする．$x_1,\dots,x_n$ の 1 次独立性を示すため $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ とする．$0=\phi(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)=a_{d+1}\bar x_{d+1}+\cdots+a_n\bar x_n$ であるが，$\bar x_{d+1},\dots,\bar x_n$ は 1 次独立なので $a_{d+1}=\cdots=a_n=0$ となる．したがって $a_1x_1+\cdots+a_dx_d=0$ であるが，$x_1,\dots,x_d$ は 1 次独立なので $a_1=\cdots=a_d=0$ もわかる．また，$x_1,\dots,x_n$ 生成する部分空間を V' とすると $W\subset V'$ かつ $\bar x_{d+1},\dots,\bar x_n\in V'/W$ となり，$V'/W=V/W$ より $V'=V$ で $x_1,\dots,x_n$ は V を生成する．