代数学序論 B 補足 1 （石田） 2017/5/11

定理 (代数学の基本定理)　$\mathbf{C}$ を複素数体とし $f(z)$ を 1 次以上の $\mathbf{C}$ 係数の多項式とする．すなわち整数 $n \geqq 1$ と複素数 $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$ があって

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

で $a_n \neq 0$ とする．このとき $f(\alpha) = 0$ となる複素数 α が存在する．

(1) 複素数は $i^2 = -1$ となる数 i を導入して実数 x, y により $z = x + yi$ と定義される．z は複素数平面の点と考えることもできる．$z = x + yi$ の共役が $\bar{z} = x - yi$ で定義され $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ となる．

(2) 任意の複素数 z_1, z_2 について不等式 $|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$ と $|z_1 + z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$ が成り立つ．前者は複素数平面上で $\mathbf{O} = 0$, $\mathbf{A} = z_1$, $\mathbf{B} = z_1 + z_2$ とすれば，三角形 $\mathbf{OAB}$ についての三角不等式 $\mathbf{OB} \leqq \mathbf{OA} + \mathbf{AB}$ による．ここで同じ不等式 $|w_1 + w_2| \leqq |w_1| + |w_2|$ で $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = -z_2$ と置けば

$$|z_1| = |w_1 + w_2| \leqq |w_1| + |w_2| = |z_1 + z_2| + |-z_2| = |z_1 + z_2| + |z_2|$$

となり，$|z_2|$ を移項して不等式 $|z_1 + z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$ も得られる．

(3) 定理の多項式 $f(z)$ について，ある正の数 R があって $|z| > R$ であれば $|f(z)| > |a_0|$ となる．これは

$$|f(z)| = |a_n z^n| \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n} \right|$$

であるから

$$|a_n| R^n > 2|a_0|\,,\quad \frac{|a_{n-1}|}{|a_n| R} + \cdots + \frac{|a_1|}{|a_n| R^{n-1}} + \frac{|a_0|}{|a_n| R^n} < \frac{1}{2}$$

となる R をとれば $|z| > R$ のとき $|f(z)| > 2|a_0|(1/2) = |a_0|$ となる．

(4) この R について複素数平面の原点から半径 R の閉円板内で $|f(z)|$ が最小となる $z = \alpha$ を考える．このとき $|f(z)| \leqq |a_0|$ であるから，この $|f(z)|$ は複素数平面全体でも最小である．

閉円板内での最小値の存在は次のように示される．

複素数列 $\{\alpha_i\}$ を $\{|f(\alpha_i)|\}$ が $\{|f(z)|\,;\,|z| \leqq R\}$ の下限となるようにとる．これは有界な複素数列なので収束する部分列が取れる．その極限を α とすれば $|f(\alpha)|$ は下限となり最小値である．

(5) k を 1 以上の整数，$h(z) = 1 + bz^k + z^k g(z)$ で $b \neq 0$, $g(z)$ が連続で $g(0) = 0$ とすると $|h(z)| < 1$ となる $z \in \mathbf{C}$ が存在する（文献 [1, p.128] 参照）．証明は $d^k = -1/b$ となる $d \in \mathbf{C}$ を取れば，$0 < t < 1$ なる実数 t に対し

$$|h(dt)| = 1 - t^k + |t^k d^k g(dt)|$$

となるので，t が十分小さければ $|d^k g(dt)| < 1/2$ より $|h(dt)| < 1 - t^k/2 < 1$ となる．

定理の証明：$|f(z)|$ が最小となる $z = \alpha$ について $f(\alpha) \neq 0$ と仮定して矛盾を導く．

$$h(z) = \frac{f(\alpha + z)}{f(\alpha)} = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0$$

と置く．右辺は左辺の多項式を展開したものである．$f(z)$ が n 次式なので $h(z)$ も n 次で $b_n \neq 0$ である．また $h(0) = f(\alpha)/f(\alpha) = 1$ なので $b_0 = 1$ である．$b_1, b_2, \ldots, b_n$ で最初に 0 でないものを b_k とする．このとき $b = b_k$, $g(z) = b_n z^{n-k} + b_{n-1} z^{n-k-1} + \cdots + b_{k+1} z$ と置けば

$$h(z) = 1 + b_k z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \cdots + b_n z^n = 1 + bz^k + z^k g(z)$$

となり (5) が適用できる．しったがって $|h(\beta)| < 1$ となる $\beta \in \mathbf{C}$ が存在する．このとき

$$\frac{|f(\alpha + \beta)|}{|f(\alpha)|} = |h(\beta)| < 1$$

より $|f(\alpha + \beta)| < |f(\alpha)|$ となり $|f(\alpha)|$ の最小性に矛盾する．したがって $f(\alpha) = 0$ であり，定理が証明された．

(6) 定理で $\alpha_1 = \alpha$ として $f(z)$ を $z - \alpha_1$ で割れば，ある定数 c により

$$f(z) = f_1(z)(z - \alpha_1) + c$$

と書けるが，z に α_1 を代入して $c = 0$ を得る．すなわち $f(z) = f_1(z)(z - \alpha_1)$ と書ける．$n-1$ 次多項式 $f_1(z)$ についても同様に $n - 1 \geqq 1$ なら $f_1(\alpha_2) = 0$ となる $\alpha_2 \in \mathbf{C}$ が存在し $f_1(z) = f_2(z)(z - \alpha_2)$ と書ける．以下同様に繰り返せば $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{C}$ が存在して

$$f(z) = a_n(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$$

となることがわかる．すなわち，これらは方程式 $f(z) = 0$ の解である．ただし $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ の中には重解として重複するものもあり得る．

[1] エビングハウス他著，成木勇夫訳,「数」上巻，シュプリンガー・フェアラーク東京，1991.