代数学序論 B 補足 2 （石田） 2015/5/18

定理 (ケーリー・ハミルトンの定理) A を可換環 R の元を要素とする正方行列とし，$p_A(t)$ を特性多項式（p.141, 固有多項式）とすると，等式

$$p_A(A) = 0$$

が成り立つ（教科書では pp.207–208 にジョルダン標準型を使う証明がある）.

証明を始める前にいくつか説明を行う．行列全体を表す記号は本によって異なるが，教科書 p.3 に合わせて，R の元を要素とする $m \times n$ 行列全体を $\mathrm{M}(m,n)_R$ で表す．正方行列 $A \in \mathrm{M}(n,n)_R$ に対しては行列式 $\det(A) \in R$ が実行列と同様に定義される．A の特性多項式 $p_A(t)$ は固有多項式とも呼ばれ $\det(tI_n - A)$ で定義される．$tI_n - A$ は $\mathrm{M}(n,n)_{R[t]}$ に属する行列であるから，$p_A(t)$ は多項式環 $R[t]$ の元である．実行列の場合と同様に $p_A(t)$ は最高次の係数が 1 の n 次多項式となる．例として $n = 2$ で

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

であれば $p_A(t) = t^2 - (a+d)t + (ad - bc)$ となる．$p_A(A)$ の意味は

$$p_A(t) = t^n + p_{n-1}t^{n-1} + \cdots + p_1 t + p_0$$

とすれば

$$p_A(A) = A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \cdots + p_1 A + p_0 I_n$$

である．このように，1 変数多項式の変数に行列を代入することは可能であるが，行列の式の変数に行列を代入することはできない．例えば $B(tI_n) = (tB)I_n$ であるが，t を行列 T に置き換えると，左辺は $B(TI_n) = BT$ で右辺は $(TB)I_n = TB$ となり，一般には等しくない.

正方行列 $C \in \mathrm{M}(n,n)_{R[t]}$ の各成分がすべて l 次以下の多項式とすると，R の元を成分とする正方行列 $C_0, C_1, \ldots, C_l$ が一意的に存在して

$$C = t^l C_l + t^{l-1} C_{l-1} + \cdots + tC_1 + C_0$$

と書ける．同様に $D \in \mathrm{M}(n,n)_{R[t]}$ の各成分が m 次以下の多項式で

$$D = t^m D_m + t^{m-1} D_{m-1} + \cdots + tD_1 + D_0$$

とする．このとき $F = CD \in \mathrm{M}(n,n)_{R[t]}$ の各成分は $l+m$ 次以下であるから

$$F = t^{l+m} F_{l+m} + t^{l+m-1} F_{l+m-1} + \cdots + tF_1 + F_0$$

と書ける．

補題　正方行列 $T \in \mathrm{M}(n,n)_R$ が $C_0, C_1, \dots, C_l$ と交換可能，すなわち

$$C_0T = TC_0\ ,\ \ C_1T = TC_1\ ,\ \ \dots\ ,\ \ C_lT = TC_l$$

を満たせば，上記の $F_0, F_1, \dots, F_{l+m}$ により等式

$$\begin{aligned}(T^lC_l + T^{l-1}C_{l-1} + \cdots + TC_1 + C_0)(T^mD_m + T^{m-1}D_{m-1} + \cdots + TD_1 + D_0) \\ = \ \ T^{l+m}F_{l+m} + T^{l+m-1}F_{l+m-1} + \cdots + TF_1 + F_0\end{aligned}$$

が成り立つ．

証明　$0 \le k \le l+m$ とすると F_k は C_iD_j の $i+j=k$ となる (i,j) についての和である．一方，補題の式の左辺を展開した式の項 $T^iC_iT^jD_j$ は C_i と T の交換可能性から $T^{i+j}C_iD_j$ に等しい．したがって，これらの $i+j=k$ となる (i,j) についての和は T^kF_k に等しい．これらを $k=0,\dots,l+m$ について足したものが左辺の展開式なので，右辺に等しい．

定理の証明　$B = tI_n - A$ と置き $B^* = [b^*_{ij}] \in \mathrm{M}(n,n)_{R[t]}$ を B の余因子行列とする．B の各要素は t の高々 1 次式で，B^* の各要素 b^*_{ij} は B から第 j 行と第 i 列を除いた $n-1$ 次行列の行列式の $(-1)^{i+j}$ 倍なので，多項式としては高々 $n-1$ 次である．可換環上の余因子行列の一般論から等式

$$BB^* = p_A(t)I_n \tag{1}$$

が成り立つ．$B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathrm{M}(n,n)_R$ により

$$B^* = t^{n-1}B_{n-1} + \cdots + tB_1 + B_0$$

と書けば (1) は

$$(tI_n - A)(t^{n-1}B_{n-1} + \cdots + tB_1 + B_0) = t^nI_n + t^{n-1}p_{n-1}I_n + \cdots + tp_1I_n + p_0I_n$$

となる．ここで A が I_n および $-A$ と可換であることから，補題を適用して，等式

$$(AI_n - A)(A^{n-1}B_{n-1} + \cdots + AB_1 + B_0) = A^nI_n + A^{n-1}p_{n-1}I_n + \cdots + Ap_1I_n + p_0I_n$$

を得る．ここで左辺の因子 $AI_n - A$ は 0 行列であるから，左辺は 0 である．$A^ip_iI_n = p_iA^i$ $(i=0,\dots,n)$ に注意すれば右辺は $p_A(A)$ であり，定理が得られた．