代数学序論 B 補足 4（ジョルダンの標準型）　（石田） 2017/6/15

K を体とする．$T : V \to V$ を有限次元 K ベクトル空間の線形変換とするとき，$\lambda \in K$ について V の基底 B が**固有値 λ のジョルダン基底**（λ ジョルダン基底）とは B が線形変換 $T - \lambda I_V$ に関する冪零ジョルダン基底であることと定義する．ここで I_V は V の恒等変換である．冪零ジョルダン基底の定義により，これはある非負整数 d と正の整数の列 $m_1 \geqq m_2 \geqq \cdots \geqq m_d$ について，$B = \{x_{i,j} \,;\, i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, m_i\}$ と書けて

$$(*) \qquad T(x_{i,j}) = \begin{cases} \lambda x_{i,j} + x_{i,j+1} & j < m_i \\ \lambda x_{i,j} & j = m_i \end{cases}$$

となっていることである．

線形変換は全単射となるとき**同型変換**という．これは基底を決めたとき表現行列が正則となることと同値である．

補題 4.1　T が λ ジョルダン基底 B を持てば，$\mu \in K$ について，$T - \mu I_V$ は $\mu = \lambda$ のとき冪零で $\mu \neq \lambda$ のときは同型変換となる．

証明　$\mu = \lambda$ であれば $T - \mu I_V$ は冪零ジョルダン基底 B を持つので，補題 3.1 により冪零である．

$\mu \neq \lambda$ とする．各 i について B の部分集合 $x_{i,1}, \dots, x_{i,m_i}$ をこれで生成される部分空間 W_i の基底と考えれば，$T - \mu I_V$ の W_i への制限の表現行列は $(*)$ から下三角行列となり，対角成分はすべて $\lambda - \mu$ である．したがって，行列式は $(\lambda - \mu)^{m_i}$ で 0 でないので正則で，この変換は W_i の同型変換となる．$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_d$ であるから $T - \mu I_V$ は V の同型変換となる．

V の基底 J が T に関する**ジョルダン基底**とは，整数 $r \geq 0$, 分割 $J = B_1 \cup \cdots \cup B_r$, K の元 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ があって，各 B_i で生成される V の部分空間 V_i が $T(V_i) \subset V_i$ を満たし，B_i が V_i の λ_i ジョルダン基底となっていることと定義する．

定理 4.2　V を有限次元 K ベクトル空間，$T : V \to V$ を線形変換とする．T の特性多項式 $g_T(t)$ が 1 次式の積に分解すれば，V は T に関するジョルダン基底を持つ．

証明　$\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ を T の固有値全体とする．冪零変換に対する冪零ジョルダン基底の存在証明と類似の数学的帰納法により証明を行う．

V の部分空間 V' で $T(V') \subset V'$ であってジョルダン基底を持つもの全体の集合 X を考える．$V' = \{0\}$ は自明なジョルダン基底を持つので X に含まれる．V' を X の極大元とし J をそのジョルダン基底とする．$V' = V$ であることを示せばよい．$V' \neq V$ とする．必要なら番号を付け替えて，ある $0 < r' \leq r$ により $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{r'}\}$ が $T|V'$ の固有値全体と仮定できる．T は線形変換 $T' : V/V' \to V/V'$ を引き起こす．T' の特性

多項式 $g_{T'}(t)$ は $g_T(t)$ の因子であるから，ある λ_l と $\bar{x} \in V/V'$ について $\bar{x} \neq 0$ かつ $T'(\bar{x}) = \lambda_l \bar{x}$ となる．このとき $x \in V$ を $\bar{x}$ の代表元とすると，$(T' - \lambda_i I_{V/V'})(\bar{x}) = 0$ より $(T - \lambda_i I_V)(x) \in V'$ となる．

$J = B_1 \cup \cdots \cup B_{r'}$ と λ_i ジョルダン基底の和に書き，$V' = V_1 \oplus \cdots \oplus V_{r'}$ をこれに伴う V' の直和分解とする．もし $l > r'$ であれば，補題 4.1 よりすべての $i = 1, \ldots, r'$ について $(T - \lambda_l I)|V_i$ は V_i の同型変換なので，$T - \lambda_l I$ の V' への制限も同型変換である．特に，ある $w \in V'$ について $(T - \lambda_l I_V)(w) = (T - \lambda_i I_V)(x)$ となる．このとき $y = x - w$ について $T(y) = \lambda_l y$ となる．よって $V' + Kx = V' + Ky$ は J に λ_l ジョルダン基底 $\{y\}$ を追加したジョルダン基底をもつ．これは V' の極大性に矛盾する．

次に $1 \leq l \leq r'$ とする．$(T - \lambda_i I_V)(x) = x_1 + \cdots + x_{r'} \in V'$ と直和成分の元の和に書いておく．$i \neq l$ については $(T - \lambda_l I_V)|V_i = V_i$ であるから，$(T - \lambda_l I_V)(w_i) = x_i$ となる $w_i \in V_i$ が存在する．$w \in V'$ をこれらの w_i の $i \neq l$ についての総和とすると，$(T - \lambda_i I_V)(x - w) = x_l \in V_l$ となる．B_l は V_l の $T - \lambda_i I_V$ に関する冪零ジョルダン基底であるから，冪零ジョルダン基底の存在証明で見たように，$x_l \neq 0$ なら B_l の $(T - \lambda_i I_V)$ 列の一つを x_l から始まる $(T - \lambda_i I_V)$ 列で置き換えることが可能で，さらに $y = x - w$ を加えて $V_l + Kx$ の冪零ジョルダン基底とすることができる．これにより $J \cup \{y\}$ が $V' + Ky$ のジョルダン基底となり V' の極大性に矛盾する．$x_l = 0$ の場合も定理 3.3 の証明と同様に V' の極大性に矛盾する．これで定理が証明された．

V の基底 J を T に関するジョルダン基底とする．各 $k = 1, \ldots, r$ について B_k を固有値 λ_k のジョルダン基底の部分とする．

$$B_k = \{x_{k,i,j}\,;\, i = 1, \ldots, d_k, j = 1, \ldots, m_{k,i}\}$$

とすると

$$J = \{x_{k,i,j}\,;\, k = 1, \ldots, r, i = 1, \ldots, d_k, j = 1, \ldots, m_{k,i}\}$$

となる．各組 (k, i) について $x_{k,i,j}$ を逆順 $x_{k,i,m_{k,i}}, \ldots, x_{k,i,1}$ に並べれば，この基底による表現行列は上三角行列となる．この行列を**ジョルダン細胞**と呼び $J(\lambda_k, m_{k,i})$ と書く．例として $\lambda_k = \lambda$, $m_{k,i} = 5$ であれば

$$J(\lambda, 5) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

となる．T の基底 J による表現行列は $\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{r}\bigoplus_{i=1}^{d_k} J(\lambda_k, m_{k,i})$ となる．