非整数階時間微分を含む非線形発展方程式

赤木 剛朗 *
東北大学大学院理学研究科

Ver. 1.0.1 (2026.11.10)

概 要

非整数階微分の概念自体はライプニッツがロピタルに宛てた手紙 (1695) に登場し, その後, リーマン, リュービル, リースをはじめ多くの数学者によって研究されている古典的なテーマである. また, 非整数階解析学は, 物理学や機械工学などの応用分野との相互作用を通じて発展してきた. 例えば, 拡散の古典論から逸脱するいわゆる異常拡散 (現象) を記述するために, 分数冪ラプラシアンと並んで時間に関する非整数階微分が用いられている. 数学的な見地に立つと, 非整数階微分を含む線形微分方程式に対してはフーリエ解析やラプラス変換などの手法が引き続き適用できるが, 非整数階微分を含む非線形微分方程式に対しては有効な手法が確立していない. 特に非整数階微分に対する関数解析的手法はあまり普及していない状況で, 例えば変分法の適用にはさまざまな困難が生じる. ここでは非線形放物型方程式の研究にしばしば用いられる勾配流 (ある汎関数の値が最も急速に減少する方向に沿って状態が時間発展する系) の理論に着目し, その非整数階微分版, 言うなれば「非整数階勾配流の理論」の構築とその偏微分方程式への応用について, (執筆した時点で) 最新の話題にも触れながら解説する.

*goro.akagi@tohoku.ac.jp

目 次

1 導入 **6**

1.1 非整数階微分 6
1.2 非整数階微分と物理学 7
1.3 非整数階時間微分を含む非線形拡散方程式 8
1.4 非整数階勾配流方程式 9
1.5 関連する研究 ([6] 以前) 10
1.6 本稿の構成 11

2 連続時間ランダムウォークと非整数階微分 **14**

2.1 連続時間ランダムウォークと拡散方程式 14
2.2 非整数階フォッカー・プランク方程式 17
2.3 確率論による研究の紹介 19

3 作用素論からみた非整数階微分 **20**

3.1 半直線上で定義された関数に対する合成積と軟化子 20
3.2 第二種ヴォルテラ積分方程式 24
3.3 基本的な仮定と completely positive kernel 27
3.4 非局所微分作用素の m-増大性 33

4 ヒルベルト空間における非局所連鎖律公式 **37**

4.1 非局所連鎖律公式 37
4.2 局所微分作用素と非局所微分作用素の和の極大単調性 39
4.3 非整数階連鎖律不等式の積分形 42

5 非整数階時間微分を伴う勾配流方程式 **44**

5.1 設定と主定理 44
5.2 解のデータに対する連続依存性と一意性 47
5.3 近似問題と解の構築 48
5.4 ア・プリオリ評価 50
5.5 近似解の収束 52
5.6 エネルギー不等式 54
5.7 $f \in L^2(0,T;H)$ に対する解の存在 55
5.8 解作用素の非拡張性 (系 21 の証明) 56
5.9 非整数階勾配流の長時間挙動に関する考察 57

6 摂動理論と最近の進展 **61**

6.1 リプシッツ摂動問題 61
6.2 最小化移動法による凸エネルギーに対する非整数階勾配流の構成 64
6.3 非凸エネルギー汎関数に対する非整数階勾配流 66
6.4 時間依存する凸エネルギー汎関数に対する非整数階勾配流 67
6.5 非整数階勾配流に対するエネルギーの単調性について 67

7 偏微分方程式への応用 **71**

7.1 非整数階時間微分を伴う放物型 p-Laplace 方程式 71
7.2 非整数階時間微分を伴う非線形拡散方程式 72
7.3 非整数階時間微分を伴う Allen–Cahn 方程式 72

7.4 その他の応用 73

A 極大単調作用素と劣微分作用素 (サーベイ) 75

A.1 極大単調作用素とその性質 75
A.2 劣微分作用素とその性質 78
A.3 線形 m-増大作用素とその性質 80
A.4 劣微分作用素の例 81

B その他 84

参考文献 85

まえがき

本稿は, 令和 7 年 1 月 11 日から 13 日にかけて神戸大学深江キャンパスで開催された「応用数学勉強会 2024」のために準備した講義資料に加筆・修正を施したものである. 講義の機会をいただいた石渡哲哉氏 (芝浦工業大学) および高坂良史氏 (神戸大学) に心より御礼申し上げる. なお, 本稿の作成にあたり, JSPS 科研費 JP24H00184 および JP21KK0044 の助成を受けた.

令和 8 年 11 月 1 日
赤木 剛朗

記号

- ベクトルやベクトル値関数はボールドで表すが, 位置ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N)$ はイタリック x で表す.
- 偏微分作用素 $\dfrac{\partial}{\partial x}$ を ∂_x と書く. 他の変数に関しても同様.
- スカラー値関数 $u = u(x)$ の勾配 (gradient) ベクトルを ∇u で表す.

$$\nabla u = \operatorname{grad} u = (\partial_{x_1} u,\ \partial_{x_2} u,\ \ldots,\ \partial_{x_N} u\ ).$$

- ベクトル値関数 $\boldsymbol{J} = (J_1(x),\ J_2(x),\ \ldots,\ J_N(x))$ の発散 (divergence) を $\operatorname{div} \boldsymbol{J}$ で表す.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J} = \nabla \cdot \boldsymbol{J} = \partial_{x_1} J_1 + \partial_{x_2} J_2 + \cdots + \partial_{x_N} J_N.$$

- Δ はラプラシアン (Laplacian) を表す.

$$\Delta u := \operatorname{div}(\nabla u) = \partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u + \cdots + \partial_{x_N}^2 u, \qquad \partial_{x_i}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

- 放物型領域 (parabolic domain): $T \in (0, \infty]$ に対して

$$Q = \Omega \times (0, \infty), \quad Q_T = \Omega \times (0, T].$$

  放物型境界 (parabolic boundary):

$$\partial_p Q = \big(\partial\Omega \times (0, \infty)\big) \cup \big(\Omega \times \{0\}\big), \quad \partial_p Q_T := \big(\partial\Omega \times [0, T]\big) \cup \big(\Omega \times \{0\}\big).$$

- ノルム空間 X 上で定義された有界線形汎関数 $\xi : X \to \mathbb{R}$ に対して, $\xi(u)$ を双対性内積の形式で $\langle \xi, u \rangle_X$ と書く.
- 単調な冪関数 $s \mapsto |s|^{q-2}s$, $q \in (1, \infty)$ は, しばしば s^{q-1} と略記する. すなわち,

$$s^{q-1} := |s|^{q-2}s = \begin{cases} s^{q-1} & \text{if} \quad s \geq 0, \\ -(-s)^{q-1} & \text{if} \quad s < 0 \end{cases} \qquad \text{for} \quad s \in \mathbb{R}.$$

1　導入

本稿の主題は, 非整数階の勾配流方程式に関する抽象論とその応用に関するものである. しかし, 非整数階微分というあまり馴染みのない話題を扱うため, 本題に入る前に, 非整数階微分についてしばらく導入を行いたい.

1.1　非整数階微分

非整数階微分 (fractional derivative) の概念は, 1695 年のロピタルに宛てたライプニッツの手紙[1]に既に登場するほど, 古くから存在している. また, その理論の発展にはリーマン, リュービル, リースをはじめ多くの数学者が関わってきた. 非整数階微分の定義にはいくつかの流儀があるが, 中でもリーマンとリュービルの名を冠するものは基本的である. その定義のために, まずはコーシーの反復積分公式を思い出す. 可積分な関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を n 重に積分してできる関数 ${}_aI_t^n f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は,

$$ {}_aI_t^n f(t) := \underbrace{\int_a^t \int_a^{t_1} \cdots \int_a^{t_{n-1}}}_{n\text{ 重}} f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t_{n-1} \cdots \mathrm{d}t_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)\,\mathrm{d}s $$

のように, f の重み付き積分として書き直すことができる (${}_aI_t^n$ は t 変数に関する n 階の積分作用素と見なせる). ここでは n は自然数だったが, それを正の実数 α に置き換えることで, 次のように関数 f の α 階積分が定義される.

$$ {}_aI_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,\mathrm{d}s $$

(ただし $(n-1)! = \Gamma(n)$ であることに注意する). この ${}_aI_t^\alpha$ を (a を左端点とする t 変数に関する) α 階の**リーマン・リュービル積分作用素**と呼ぶ. これを用いることで, 滑らかな関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対して, α 階の**リーマン・リュービル微分作用素** ${}_aD_t^\alpha$ は次のように定義される: まず $0 < \alpha < 1$ のとき,

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left({}_aI_t^{1-\alpha} f\right)(t) $$

とする. すなわち, 微分をする前に f を $(1-\alpha)$ 階積分しておき, その微分をとることで, α 階微分を実現するという考え方である. さらに $k < \alpha < k+1$, $k \in \mathbb{N}$ のとき, ${}_aD_t^\alpha$ は次のように与えられる.

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}t^{k+1}}\left({}_aI_t^{k+1-\alpha} f\right)(t). $$

イタリアの地球物理学者である Michele Caputo [25, 26] は 1960 年代に 地球内部の振動の減衰や粘弾性体のエネルギー散逸を記述するために分数階微分を研究し, 現在でも Caputo 微分と呼ばれる非整数階微分が広く用いられている. Caputo 微分の定義は, リーマン・リュービル微分の定義と, 微分と積分の順序を入れ替えたものである. すなわち, $0 < \alpha < 1$ のとき, α 階の **Caputo 微分作用素** ${}_a^C D_t^\alpha$ は次のように定義される.

$$ {}_a^C D_t^\alpha f(t) := {}_aI_t^{1-\alpha}\left(f'\right)(t). $$

[1]資料 [66] などで確認できる. この書簡においてライプニッツは, 積分を負の階数の微分と捉えた上で, 微分の階数を非整数にまで拡張する可能性を考察した. 特に, 整数階の微分公式と二項定理との類似性から, 非整数階微分の無限級数による形式的な表示を考え, その幾何学的意味を問うている. なお, この書簡を収録した資料は Internet Archive で閲覧可能である (2026.10 現在). この資料についてご教示いただいた中村健一氏に感謝する.

また $k < \alpha < k+1$, $k \in \mathbb{N}$ のとき,

$$ {}^{C}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t) := {}_{a}I^{k+1-\alpha}_{t} \left(f^{(k+1)} \right) (t) $$

とする. 定数関数の Caputo 微分は 0 になることが定義から明らかだが, 定数関数のリーマン・リュービル微分は 0 にはならない. このように両者には違いがあるのだが, 滑らかな関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ と $0 < \alpha < 1$ に対して, 次の関係式が成り立つ.

$$ {}_{a}D^{\alpha}_{t} \left[f(\cdot) - f(a) \right] (t) = {}^{C}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t). $$

以下, 0 を左端点とするリーマン・リュービル微分を表すのに, ${}_{0}D^{\alpha}_{t}$ の代わりに ∂^{α}_{t} と書く.

1.2 非整数階微分と物理学

非整数階の解析学 (fractional calculus) は数学的な動機のみで発展したのではなく, Caputo のように物理学など応用的な観点を動機として発展してきた側面がある. 特に 1/2 階微分は機械工学, とりわけ流体力学や粘弾性力学において古くから注目を集めている (例えば [35] 参照). 例えば Basset (1888) が提案した粘性流体中を運動する小さな球の運動方程式には, (当時はそのように見なされてはいなかったが) 1/2 階の Caputo 微分を含む履歴力が導入されており, 粘性による運動量の拡散の記述に役立っている. さらに Bagley–Torvik (1983) の粘弾性材料の構成方程式では, 応力 σ とひずみ ε の関係に非整数階微分が用いられている. 邦文でも [112, 111, 113] をはじめ多くの文献において, 物理学や工学への応用と共に論じられている.

近年, 特に多くの注目を集めているのが, **異常拡散 (anomalous diffusion)** との関わりである. アインシュタインのブラウン運動理論 (1905) によれば, 拡散の古典論では, ランダムに運動する粒子の**平均二乗変位 (Mean-Squared Displacement)**

$$ \mathrm{MSD}(t) := \left\langle |X(t) - X(0)|^2 \right\rangle $$

(ただし, $X(t)$ は時刻 t における粒子の位置を, $\langle \cdot \rangle$ はアンサンブル平均を表す) が, 時間 t と比例する. さらに, 微視的な粒子運動を特徴づける平均二乗変位 $\mathrm{MSD}(t)$ と巨視的な拡散現象を特徴づける (拡散方程式に現れる) 拡散係数 D の間には, $\mathrm{MSD}(t) = 2dDt$ (d は空間次元) という関係式が成り立つ. よって, この場合, 拡散係数 D は時間に依存しない定数である. このような拡散現象をしばしば**正常拡散 (normal diffusion)** と呼ぶ. 一方, 平均二乗変位 $\mathrm{MSD}(t)$ が時間 t に関して非線形に増大するような現象が多く知られており, そのような現象を**異常拡散 (anomalous diffusion)** と呼ぶ. 異常拡散では, 拡散係数は定数にはならない. 異常拡散はさまざまな文脈に登場するが, 例えば土壌中の拡散[2]や細胞膜上の拡散[3]のように不均質媒質中の拡散現象や, プラズマ拡散のようにプラズマ特有の集団運動が影響する拡散現象などで観測されており, それらを物理的にどう理解するかが, 非平衡系物理学やそれにまつわる数学の重要な研究テーマとなっている.[4] 異常拡散を記述する数学モデルはボルツマンの時代から既に研究されており, ボルツマン本人も拡散係数 D が濃度 ρ に依存するような拡散方程式を考え, 特に拡散係数の依存性を特定する方法について研究している. このように拡散係数 D が拡散する物質の濃度 ρ に依存するような拡散モデルを, **非線形拡散 (nonlinear diffusion)** と呼ぶ. 一方, 非整数階微分の概念を用いると, 線形性を保ったまま異常拡散を記述することが可能である.

文献 [52] ([79, 80, 81] も参照) では, Montroll–Weiss [84] によって導入された**連続時間ランダムウォーク (Continuous-Time Random Walk, CTRW)** から, 時間に関する非整数階微分を含

[2] 例えば [32, 89, 19] 参照.
[3] 例えば [38, 41, 106, 96] 参照.
[4] 石渡哲哉氏・竹内慎吾氏と共同で開催した RIMS 共同研究でも, この研究テーマが取りあげられた. 報告集 [100, 5] に関連する論文が収集されている.

むフォッカー・プランク方程式が導出されている. CTRW は確率過程の一種であり, 各粒子の跳躍幅 Δx と待ち時間 Δt が, それぞれ所定の確率分布に従ってランダムに決定されるものである. 例えば, 跳躍幅と待ち時間がそれぞれ正規分布と指数分布に従う場合, CTRW の適切なスケーリング極限として Brown 運動が得られる. 一方, 跳躍幅が正規分布に従い, 待ち時間がべき乗則に従う重い裾を持つ分布, 例えば

$$\mathbb{P}(\Delta t > t) \sim Ct^{-\alpha} \quad \text{as} \ \ t \to \infty, \quad 0 < \alpha < 1,$$

に従う場合には, 適切なスケーリング極限において, 粒子の確率密度分布 $\rho(x,t)$ の時間発展は次の非整数階フォッカー・プランク方程式によって記述される.

$$ {}_0^C D_t^\alpha \rho(x,t) = \Delta \rho(x,t).$$

非整数階フォッカー・プランク方程式の解 $\rho(x,t)$ に関しては, 平均二乗変位 $\mathrm{MSD}(t)$ が t^α のオーダーで成長する. CTRW に基づく非整数階フォッカー・プランク方程式の導出については, §2 でもう少し詳しく解説する. このような非整数階微分を含む線形偏微分方程式は, これまで活発に研究されてきた (例えば, [94, 63, 44, 71, 72] およびそれらの参考文献を参照).

1.3 非整数階時間微分を含む非線形拡散方程式

非整数階微分を含む線形偏微分方程式に対しては, フーリエ変換やラプラス変換の手法が機能するが, 非線形問題に対しては, 他の手法を模索する必要がある. 半線形問題に関しては, 積分方程式の方法を拡張することで, 一定の解析が可能である (例えば, モノグラフ [42] 参照). しかし退化性や特異性を伴う非線形問題に対しては, 未開拓の領域が広く残されている. 以下ではいくつかの例を挙げる.

不飽和で膨潤しない土壌中の水分の運動は, しばしば **Richards 方程式 (Richards equation)**

$$\partial_t u(x,t) = \mathrm{div}\left(C(u)\nabla u(x,t)\right)$$

によって記述される. ここで $u = u(x,t)$ は水の局所的な体積分率を表し, $C(u) \geq 0$ は u に依存する拡散係数である. Richards 方程式は, 保存則と Darcy の法則から導出される. また, 土壌中の水分拡散係数 $C(u)$ に現れる非線形性は, 土壌, 砂, 粘土, シルトなどの各媒質を特徴づける水分保持曲線 (water retention curve) に由来するものであり, これらの曲線は実験によって決定される. 一方, 建築材料中における水分の拡散についても, 異常拡散が実験的に観測されている (例えば [101, 65, 1, 95] 参照). Richards 方程式は非線形拡散の一種であるが, $C(u)$ の特性から, 解 u は漸近的に正常拡散と同様の振る舞いをすることが知られている. そのため, 建築材料中への水分の拡散に見られる

$$\mathrm{MSD}(t) \sim t^\alpha$$

という非線形なスケーリングは, Richards 方程式によって再現することができない. この不一致を解消するため, [43, 34] では次の**時間非整数階 Richards 方程式 (time-fractional Richards equation)** が導入された.

$$\partial_t^\alpha \left[u(x,\cdot) - u_0(x)\right](t) = \mathrm{div}\left(C(u)\nabla u(x,t)\right).$$

ただし $0 < \alpha < 1$ とし, $u_0 := u|_{t=0}$ は初期値を表す. さらに, [92, 91, 93] では, $C(u) = m|u|^{m-1}$ で与えられる**時間非整数階多孔質媒質方程式 (time-fractional porous medium equation)** も考察されている.

$$\partial_t^\alpha \left[u(x,\cdot) - u_0(x)\right](t) = \Delta\left(|u|^{m-1}u\right)(x,t).$$

ただし $0 < m < \infty$ とする. これらの論文では, 時間に関する非整数階微分を含む非線形偏微分方程式に対する数値計算法が提案され, 上記の方程式に適用されている. また, [103, 104, 37, 3] では, このような非整数階の非線形拡散方程式の解の長時間挙動が研究されているが, 解の存在や正則性は仮定する必要があった. ごく最近, [20] のように非整数階の非線形拡散方程式に関する本格的な解析も始まりつつあるが, 解の存在と一意性, 基本的な解の平滑化評価と漸近挙動を調べている段階であり, 古典的な非線形拡散方程式の研究と比べると, 多くの課題が残されている.

これらの問題に対して, 半線形問題の研究で用いられるような積分方程式の方法 [42] が十分に機能しない点は, 時間 1 階微分の場合と同様である. 古典的な非線形拡散方程式に対して, 積分方程式によるアプローチの代わりにしばしば用いられたのが, いわゆる**勾配流理論 (gradient flow theory)** である. 実際, 非線形拡散方程式をはじめ多くの非線形放物型方程式は, 勾配流方程式の構造を有しており, その構造を活用することで, 初期値境界値問題に対する解の存在や一意性, 解の正則化評価や漸近挙動を明らかにしてきた. ここで用いられる勾配流理論の基礎をなすのが, Brézis・高村理論である. **Brézis・高村理論**とは, 高村幸男 [64] によって構築された非線形半群の理論を以下に挙げるような抽象的な勾配流方程式のコーシー問題に適用し, さらに勾配流方程式が持つエネルギー構造を組み込むことで構築された Haim Brézis による理論である (例えば [22] 参照. 最近の文献でも [10] など):

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t) \ \text{ in } H, \quad 0 < t < T, \quad u(0) = u_0. \tag{1.1}$$

ただし, H はヒルベルト空間, $0 < T < \infty$ とし, $\partial\varphi : H \to 2^H$ は適正下半連続凸汎関数 $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ に対する劣微分作用素を表す. また, 初期値 $u_0 \in \overline{D(\varphi)}^H$ や $f \in L^2(0,T;H)$ は与えられたデータである.

その後, Brézis・高村理論は多くの方向に一般された他, 相転移モデルや自由境界問題の研究を中心に, 多くの具体的な非線形偏微分方程式 (系) へと応用されてきた. さらにそこで培われた手法や着眼点はさまざまな問題の研究に取り入れられており, 単なる抽象論の枠を超えて, 現代の非線形解析学に大きな影響を与えている. 非線形拡散方程式の研究においても, 抽象論を直接適用した例もあるが, それ以上に Brézis・高村理論の発展の過程で生まれた手法やアイディアが, 個別の解析に用いられており, 両者は切り離せないテーマと言える.

拙著 [6] では, 非整数階微分を伴う退化・特異放物型方程式に対して, 初期値境界値問題の適切性や解の正則性などの基本的問題を一括解決すること, および非整数階微分を伴う非線形問題の解析に有効な道具立てを開発することを目的とし, この Brézis・高村理論の非整数階版の構築に取り組んだ.

1.4 非整数階勾配流方程式

本稿の主な目的は, 論文 [6] で構築した非整数階の勾配流方程式に対するコーシー問題に関する抽象論を解説し, さらにそれを応用することで, 時間非整数階の放物型方程式の (退化性や特異性を伴うものも含む) 広いクラスに対して適切性を保証することである. 特に [6] ではサーベイに留めている非整数階微分の作用素論的枠組みを基礎から解説し, さらに [6] を執筆した時点では分かっていなかったことや, 最近の進展・関連する結果についても解説したい.

まず抽象的な枠組みを導入し, 問題を定式化しよう. 以下で述べる抽象理論を具体的な時間非整数階偏微分方程式にどのように適用するかについては, 後述の § 7 を参照されたい.

以下, H を実ヒルベルト空間とし, $\varphi : H \to [0, +\infty]$ を適正 ($\varphi \not\equiv +\infty$) な下半連続凸汎関数とする. また, その**有効定義域 (effective domain)** を

$$D(\varphi) := \{w \in H : \varphi(w) < +\infty\}$$

と定める.[5] 本稿では, **非整数階の勾配流方程式に対するコーシー問題**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(u-u_0)\right](t)+\partial\varphi(u(t))\ni f(t)\quad\text{in } H,\quad 0<t<T \tag{1.2}$$

に対する強解 $u:(0,T)\to H$ の存在, 一意性, および与えられたデータに関する連続依存性を考察する. ここで $T>0$, 初期値 $u_0\in H$ および外力 $f:(0,T)\to H$ は与えられたデータとする. また, 積分核 $k\in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ による合成積 $k*(u-u_0)$ は

$$(k*w)(t):=\int_0^t k(t-s)w(s)\,\mathrm{d}s\quad\text{for } w\in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty);H),\quad t>0$$

によって定義される. さらに, $\partial\varphi:H\to 2^H$ は φ の**劣微分作用素 (subdifferential operator)** を表す.[6] すなわち, $w\in H$ に対して

$$\partial\varphi(w):=\{\xi\in H\colon \varphi(z)-\varphi(w)\ge(\xi,z-w)_H \text{ for all } z\in D(\varphi)\}$$

と定める. その定義域は

$$D(\partial\varphi):=\{w\in D(\varphi)\colon \partial\varphi(w)\neq\emptyset\}$$

で与えられる. 劣微分作用素は H 上の極大単調作用素であることがよく知られている (例えば [22] 参照). 以下では, リーマン・リュービル微分を念頭に置き, 次の仮定を課す.

(H) 積分核 $k\in L^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ は非負かつ非増加とする. さらに非負かつ非増加な積分核 $\ell\in L^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ が存在して, 等式

$$k*\ell\equiv 1$$

が成立する.

仮定 **(H)** を満たす典型的な積分核の組 (k,ℓ) として, 次の**リーマン・リュービル核 (Riemann–Liouville kernel)** が挙げられる.

$$k_\alpha(t)=\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},\quad \ell_\alpha(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},\quad 0<\alpha<1.$$

このとき, 非局所微分 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)[k_\alpha*(u-u_0)]$ は $u-u_0$ の α 階リーマン・リュービル微分 $\partial_t^\alpha(u-u_0)$ と一致する. また u が微分可能であれば, 非局所微分 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)[k_\alpha*(u-u_0)]$ は u の Caputo 微分 ${}_0^C D_t^\alpha u$ と一致する.

1.5 関連する研究 ([6] 以前)

方程式 (1.2) の両辺に ℓ を畳み込み, 仮定 **(H)** を用いると, 非整数階勾配流方程式 (1.2) は次の非線形ヴォルテラ方程式 (nonlinear Volterra equation) に帰着される.

$$u(t)+\big(\ell*\xi\big)(t)=(\ell*f)(t)+u_0,\quad \xi(t)\in\partial\varphi(u(t)),\quad 0<t<T.$$

ヒルベルト空間やバナッハ空間における非線形ヴォルテラ方程式は, 1960 年代にはすでに研究されており (例えば [83] 参照), 一般に次の形で与えられる.

$$u(t)+\big(a*\xi\big)(t)=g(t),\quad \xi(t)\in A(u(t)),\quad 0<t<T. \tag{1.3}$$

[5] ここでは φ が非負であることを仮定しているが, 一般の下半連続凸汎関数は下からアフィン関数によって評価できるため, この仮定は本質的な制約ではない (例えば [15, Proposition] 参照).

[6] 劣微分は凸汎関数に対するフレッシェ微分の一般化であり, フレッシェ微分可能ではない汎関数に対しても定義される. ただし, 劣微分は一般に一価とは限らず, 複数の値をとり得る. そのため, 劣微分作用素は集合値作用素として定式化され, それを含む発展方程式 (1.2) も等号ではなく包含記号を用いて記述される.

ここで $A : D(A) \subset X \to X$ はヒルベルト空間またはバナッハ空間 X 上の非線形作用素とし, $g : (0,T) \to X$ は与えられた関数, $a : [0,+\infty) \to [0,+\infty]$ は少なくとも局所可積分な積分核である.

Barbu は [14, 16, 17] において, 記憶効果を伴う力学系の研究に現れる非線形ヴォルテラ方程式 (1.3) を考察した. そこでは, X をヒルベルト空間とし, $A = \partial\varphi$ とするとともに, 積分核 a が正値で $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ に属すること (特に, a は微分可能であり, $t = 0$ で有限値を取ること), および $g \in W^{1,2}(0,T;X)$ を仮定している. このような積分核の正則性により, (1.3) の両辺を時間微分すると,

$$u'(t) + a(0)\xi(t) + \big(a' * \xi\big)(t) = g'(t), \quad \xi(t) \in A(u(t)), \quad 0 < t < T$$

が得られる. この方程式は, 時間に関して局所的な非線形発展方程式の非局所的な摂動問題とみなすことができる. 関連する研究として [33, 49, 70, 62, 27, 4] も参照されたい.

特異性を伴う積分核に関しては, Clément–Nohel [30, Theorem 3.1] が, completely positive kernel $a \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ に対して (1.3) を研究し, generalized solution の存在を証明した. ここで generalized solution とは, あるクラスの近似解の弱極限として得られる解を意味する. さらに, この抽象論は, 時間に関して非局所的な偏微分方程式にも適用されている ([29] も参照). また, [50] も本稿と関連する研究として挙げられる ([61, Theorems 2 and 3] も参照). 実際, [50] の Theorem 1 は, 仮定 **(H)** といくつかの追加の仮定の下で, (1.3) の強解の存在と一意性を扱っている. そこでは特に, (1.3) の g に対して十分な正則性, 例えば

$$g \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty);X), \quad g' \in BV_{\mathrm{loc}}([0,+\infty);X)$$

が要求されている. さらに [28, 51, 31] では, 仮定 **(H)** の下では非局所微分作用素がボッホナー空間上の m-増大作用素となることを明らかにすることで, リーマン・リュービル微分などの非局所微分を含む発展方程式が研究されている. 一方, 解の存在に関する結果の多くは generalized solution に関するものであり, 著者の知る限り, 強解の存在に関する結果は長らく得られていなかった.

今世紀に入ると, Zacher は [110] において, ゲルファントの三つ組

$$V \hookrightarrow H \equiv H^* \hookrightarrow V^*$$

の枠組みの下で, 次の抽象コーシー問題に対する (時間に関する) 強解の存在と一意性を証明した.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big([k * (u - u_0)](t), v\big)_H + b(t,u(t),v) = \langle f(t), v\rangle_V \quad \text{for all } v \in V, \quad t \in (0,T).$$

ここで V はヒルベルト空間, V^* はその双対空間であり, H はヒルベルト空間である. また, $(\cdot,\cdot)_H$ は H の内積, $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ は V と V^* の双対性内積を表す. さらに, k は completely positive kernel とし, 外力 $f : (0,T) \to V^*$ および初期値 $u_0 \in H$ は与えられたものとし, さらに $b(t,\cdot,\cdot)$ は V 上で定義された有界かつ強圧的な双線形形式である. 証明では, 非局所微分作用素の m-増大性と非局所的なエネルギー不等式 (補題 14 参照) が鍵となる役割を果たしている. さらに [102] では, 仮定 **(H)** と追加の仮定の下で, 全空間 $\mathbb{R}^d$ における非整数階勾配流方程式の解の平衡点への収束が議論されている. その他, 解の有界性, 正則性, 減衰評価, 爆発現象などのさまざまな性質については, [109, 56, 103, 104, 105] も参照されたい.

1.6 本稿の構成

本稿の構成は以下のとおりである. まず本稿の主題である非整数階勾配流方程式の話に入る前に, 第 2 節では, 非整数階時間微分を含む拡散方程式 (フォッカー・プランク方程式) の導出について解説する. このことは非整数階時間微分の物理的な役割を理解する上で有益と考える. ここでは,

Montroll–Weiss [84] によって導入された連続時間ランダムウォーク (Continuous-Time Random Walk, CTRW) を用いる. はじめに, CTRW のスケール極限から古典的な拡散方程式が導出されることを概観し, 次に待ち時間分布を片側安定分布に取り替えることで, 同様のスケール極限に関する議論から非整数階フォッカー・プランク方程式を導出する. ここでは Hilfer–Anton [52] や Metzler–Klafter [79, 80, 81] をベースに, 低周波近似の部分をスケール極限をとる議論で置き換えて解説する. 最後に, 異常拡散を特徴づける平均二乗変位の増大度に関しても考察する.

第 3 節では, 非整数階微分を作用素論的な立場から扱うための枠組みを整備する. ここでは 1960–1980 年代にかけて成熟した, ヴォルテラ積分方程式や completely positive kernel の理論, そして非整数階微分を含む非局所微分作用素の m-増大性について, 証明付きで解説する. 特に非局所微分の m-増大性は, その単調性やグラフの閉性, そして対応する積分核の正則化に関して重要な事実を与える. 実際, これらの事実は論文 [6] の結果を得る上で, 重要な柱となっている.

第 4 節では, 論文 [6] で構築された非局所連鎖律公式について解説する. 古典的な勾配流方程式の解説において, 連鎖律公式は核心的な役割を果たすが, 非整数階微分に対してはライプニッツ則や連鎖律が成立しない.[7] ここでは (正則化された積分核に対する) 非局所微分作用素と凸汎関数の劣微分作用素に関して, 連鎖律公式を与える (ライプニッツ則もその特殊なケースとして与えられる). さらに m-増大作用素に対する吉田近似の収束性を用いることで, 非整数階微分と劣微分に対する連鎖律不等式が従う. この非整数階微分に対する連鎖律不等式も, 論文 [6] の結果を得る上で, 欠かすことのできないもう一本の柱である. さらに 1 階の微分作用素と非局所微分作用素に関する「角度条件」を証明する (系 16 参照). この事実は, 近似解の構成やエネルギー評価において, 重要な役割を果たす.

第 5 節では, 非整数階勾配流方程式の初期値問題に対する適切性と解の平滑化効果や正則性に関する抽象論を与え, その証明について順を追って解説する. ここでは第 3 節と第 4 節で準備した事柄を活用し, はじめに外力 $f \in W^{1,2}(0,T;H)$ に対して, 近似問題の導入とその可解性, エネルギー評価と極限移行の議論を行う. 次に, 非局所微分に対する連鎖律公式を用いることで, より一般的な外力 $f \in L^2(0,T;H)$ に対して結果を拡張する.

発展方程式 (1.2) を「非整数階の勾配流方程式」と呼称することに関しては, 議論のあるところであろう. 古典的な勾配流方程式を思い出せば, その解が時間発展とともにエネルギーを減少させ, 最終的にエネルギー汎関数の臨界点へと収束するような挙動が特徴的であろう. そのような性質が (1.2) の解に対しても確認できるかは, 重要な問題であり, 筆者の知る範囲では, まだ完全な解決はなされていない. 第 5.9 小節では, エネルギー汎関数に一様凸性を課すことで, リーマン・リュービル核 k_α に関して, 発展方程式 (1.2) の解がエネルギー汎関数の最小点に収束することを証明する. このように (1.2) を非整数階の勾配流方程式と呼称するにあたっては, 方程式の形状の類似性に加えて, 一定の理由を伴っている. 他方, エネルギーの単調性に関しては, 長らく完全に未解決であったが, 近年, 部分的な進展があったので, 第 6.5 小節で最新の結果を紹介する.

第 6 節では, まず論文 [6] でも扱われている (1.2) に対するリプシッツ摂動問題の解析について解説する. さらに, 近年の進展についても解説したい. 特に第 6.5 小節では, 非整数階勾配流方程式の解がエネルギーを減少させるかどうかについて論じる. 線形問題に関してはエネルギーが単調減少であるのに対し, 非線形問題に関しては, 長らくエネルギーの単調性が未解決問題となっていた. 近年, Fritz [40] がこの問いに対して半凸なエネルギー汎関数の反例を挙げているので, その構成についても紹介したい. ただし, 凸エネルギーに関しては依然として未解決であることに注意する. その他にも, 最小化移動法による非整数階勾配流の構成 [69], 半凸ですらないエネルギー汎関数への拡張 [7], 時間依存するエネルギー汎関数への拡張 [85] に関する結果についても概説する.

第 7 節では, ここまでに構築した抽象論を, いくつかの時間非整数階の非線形放物型方程式に適用する. 特に, p-Laplacian を伴う非線形拡散方程式や多孔質媒体方程式 (Fast Diffusion 方程式), そして Allen–Cahn 方程式の時間非整数階版に対する初期値境界値問題の適切性を保証すること

[7] 厳密に言えば, 無限級数の形では成立するが, 解析に役立つ形とは言い難い.

ができる.

補遺では, 極大単調作用素, 劣微分作用素, m-増大作用素に関するまとめを与える. 一般的な事実に関しては証明を与えず, 参考文献を挙げるに留めたが, あまり一般的ではない事実であり, かつ本編の証明に必要ないくつかの重要な命題に関しては, 証明を与えた.

2　連続時間ランダムウォークと非整数階微分

2.1　連続時間ランダムウォークと拡散方程式

古典的な単純ランダムウォークは通常, 格子点上の粒子が決まった時間間隔で隣接する格子点に跳躍する確率過程を意味する. 従って, 空間的にも時間的にも離散的な設定を考えることになる. そのような時間の離散的な構造を連続的なものに置き換えて考えると, 粒子の次の跳躍までの (タイム) インターバル $\Delta t \geq 0$ は連続値をとるものとし, それを確率的なものとして扱うことになる. 詳細は以下に述べるが, このようなランダム過程は**連続時間ランダムウォーク (Continuous-Time Random Walk, CTRW)** と呼ばれており, Montroll–Weiss [84] によって導入された. ここでは CTRW のうち, 粒子の位置が $\mathbb{R}^d$ に値を取り, 跳躍幅 $\Delta x \in \mathbb{R}^d$ と待ち時間 $\Delta t \geq 0$ がいずれも連続型確率変数で与えられる場合を考える.[8]

ここでは「粒子が (前回跳躍した時刻から) Δt だけ待ってから, Δx だけ跳躍する」という事象を特徴づける連続型確率変数 $(\Delta x, \Delta t)$ に対する確率密度関数を $\phi(\Delta x, \Delta t)$ で表す. ここで ϕ は

$$\phi \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty \phi(\Delta x, \Delta t)\, \mathrm{d}(\Delta t)\, \mathrm{d}(\Delta x) = 1$$

を満たすものとする. 以下, 各跳躍における跳躍幅と待ち時間の組 $(\Delta x, \Delta t)$ は, 独立同分布に従うものとする. これに関連して

$$w(\Delta t) := \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\Delta x, \Delta t)\, \mathrm{d}(\Delta x) \quad (\Delta t \geq 0),$$
$$\lambda(\Delta x) := \int_0^\infty \phi(\Delta x, \Delta t)\, \mathrm{d}(\Delta t) \quad (\Delta x \in \mathbb{R}^d)$$

とおくと, $w(\Delta t)$ は「次の跳躍までの待ち時間が Δt である」という事象の確率変数 Δt に対する確率密度関数を表し, また $\lambda(\Delta x)$ は「粒子が (跳躍のタイミングは問わず) いずれ Δx だけ跳躍する」という事象の確率変数 Δx に対する確率密度関数を表す. 当然, 以下が成り立つ.

$$w, \lambda \geq 0, \quad \int_0^\infty w(\Delta t)\, \mathrm{d}(\Delta t) = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \lambda(\Delta x)\, \mathrm{d}(\Delta x) = 1.$$

次に粒子の存在確率について考えるために, いくつか準備をしよう. ここでは, 初期時刻 $t = 0$ において原点 $x = 0$ にあった粒子について, 時刻 t から $t + \mathrm{d}t$ までの間に位置 x の近傍の微小領域 $\mathrm{d}x$ に到着する回数の期待値を $\eta(x, t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$ と表すことにする.[9] また, 初期時刻 $t = 0$ における原点への到着も含め, その寄与をデルタ測度 δ_0 で表す. 以下では, このデルタ測度の寄与も含めて形式的に $\eta(x, t)$ と表すことにする. すなわち, η は次の積分方程式を満たすものとする.

$$\eta(x, t) = \delta_0(x, t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x - x', t - t')\eta(x', t')\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}t' \quad (x \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0). \tag{2.1}$$

ただし δ_0 は $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ におけるデルタ関数を表す.[10] ここで η は粒子の位置の確率分布 (存在確率) ではなく, 到着回数の期待値を表す測度であることに注意したい. 次に, 初期時刻 $t = 0$ において

[8] 本節の解説にあたっては, 日本語による要約 [114] を足がかりに, Metzler–Klafter [79, 80, 81] などの総説を参考にした. ただし, 非整数階フォッカー・プランク方程式の導出については, これらの総説で用いられる低周波・長時間領域での漸近近似に代えて, Gorenflo–Mainardi [45, 46] らの議論に従い, 跳躍幅と待ち時間のスケーリング極限を用いて説明する.

[9] 到着は各跳躍について数えるものとする (同じ粒子がある領域に 2 回到着したら, 2 回と数える). 従って, $\eta(x, t)$ は確率密度関数とは限らない. 言い換えれば, η は各跳躍における到着位置と到着時刻の同時確率分布をすべて足し合わせた測度である.

[10] 正確には時空間の原点を台とするデルタ測度である. よって η は測度 μ_η として与えられるべきであり, 方程式 (2.1) は測度 μ_η に関する方程式

$$\mu_\eta(A) = \delta_0(A) + \int_A \left(\int_{\mathbb{R}^d \times [0,t)} \phi(x - x', t - t')\, \mathrm{d}\mu_\eta(x', t') \right) \mathrm{d}\mathcal{L}^{d+1}(x, t)$$

として与えられる. ただし $A \subset \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ は任意の $d + 1$ 次元ルベーグ可測集合とする.

粒子の位置が確率密度関数 $\rho_0(x)$ に従って分布している場合を考える. ただし, 粒子の初期位置はその後の跳躍過程と独立であるとする. このとき, $\chi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ を, 時刻 t から $t+\mathrm{d}t$ までの間に位置 x の近傍の微小領域 $\mathrm{d}x$ に到着する回数の期待値として導入する. ただし, η と同様に, 各跳躍について到着を数え, 初期時刻における粒子の位置も含めるものとする. このとき,

$$\chi(x,t) = \eta(\cdot,t) * \rho_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \eta(x-x',t)\rho_0(x')\,\mathrm{d}x' \quad (x \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0).$$

が成り立つ. 従って, (2.1) より χ は次の積分方程式を満たす.

$$\chi(x,t) = \rho_0(x)\delta_0(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-x',t-t')\chi(x',t')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t' \quad (x \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0). \tag{2.2}$$

次に粒子の存在確率について考えよう. 「初期時刻 $t=0$ において確率密度関数 $\rho_0(x)$ に従って分布していた粒子が, 時刻 t において位置 x に存在する」という事象の確率変数 x に対する確率密度関数 $\rho(x,t)$ は

$$\rho(x,t) = \int_0^t \chi(x,\tau)\Phi(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad \Phi(\Delta t) = 1 - \int_0^{\Delta t} w(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\Delta t}^{\infty} w(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

によって与えられる.[11] ここで $\Phi(\Delta t)$ は待ち時間が Δt を超える確率 (生存関数) なので, 上の積分は時刻 τ に位置 x に到着した粒子が $t-\tau$ の間 (すなわち時刻 t までの間) 他へ跳躍しない確率を積算していることに対応する. よって (2.2) を上の定義式に代入すると, 簡単な変数変換と Tonelli の定理から

$$\begin{aligned}
\rho(x,t) &= \rho_0(x)\Phi(t) + \int_0^t \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-x',\tau-t')\chi(x',t')\Phi(t-\tau)\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}\tau \\
&= \rho_0(x)\Phi(t) + \int_0^t \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-x',s)\chi(x',\tau-s)\Phi(t-\tau)\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau \quad (s := \tau - t') \\
&= \rho_0(x)\Phi(t) + \int_0^t \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-x',s)\chi(x',\tau-s)\Phi(t-\tau)\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s \\
&= \rho_0(x)\Phi(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-x',s) \left(\int_s^t \chi(x',\tau-s)\Phi(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}s \\
&= \rho_0(x)\Phi(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-x',s) \left(\int_0^{t-s} \chi(x',\sigma)\Phi(t-s-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}s \quad (\sigma := \tau - s) \\
&= \rho_0(x)\Phi(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-x',s)\rho(x',t-s)\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

が従う. 両辺を t についてラプラス変換, x についてフーリエ変換し, ラプラス変換の変数を s, フーリエ変換の変数を ξ で表すことにすると

$$\widehat{\widetilde{\rho}}(\xi,s) = \widehat{\rho}_0(\xi)\widetilde{\Phi}(s) + \widehat{\widetilde{\phi}}(\xi,s)\widehat{\widetilde{\rho}}(\xi,s)$$

が得られる. ただし, フーリエ変換は $\widehat{\rho}_0$ のように, ラプラス変換は $\widetilde{\Phi}$ のように, フーリエ・ラプラス変換は $\widehat{\widetilde{\rho}}$ のように記す. よって **Montroll–Weiss の公式** [84]

$$\widehat{\widetilde{\rho}}(\xi,s) = \frac{\widehat{\rho}_0(\xi)\widetilde{\Phi}(s)}{1-\widehat{\widetilde{\phi}}(\xi,s)} = \frac{\widehat{\rho}_0(\xi)}{1-\widehat{\widetilde{\phi}}(\xi,s)} \frac{1-\widetilde{w}(s)}{s}$$

[11] ただし, $\rho(x,t)$ を与える積分は初期時刻におけるデルタ測度の寄与も含めて解釈するものとする.

が従う.[12] これをラプラス逆変換, フーリエ逆変換すれば $\rho(x,t)$ が得られるのだが, それらを計算して解の表現公式を得ることは一般的に困難である.

CTRW から非整数階フォッカー・プランク方程式を導出する研究は, Hilfer–Anton [52] による非整数階マスター方程式の研究をはじめ, Metzler–Klafter–Sokolov [82], Metzler–Barkai–Klafter [78], Barkai–Metzler–Klafter [18] などによって発展してきた. 特に, 待ち時間分布の裾が冪乗則に従う場合には, 適切なスケーリング極限を通じて非整数階時間微分を含む拡散方程式が導かれる. 以下では, この導出を具体的な確率分布に対して説明する. そのためにまず, 古典的な拡散現象について見てみよう.

例 1 (正常拡散)**.** ここでは ϕ が $\phi(\Delta x, \Delta t) = \lambda(\Delta x)w(\Delta t)$ のように変数分離型であり, さらに λ と w が次のように与えられる場合について考察する.

$$\lambda(x) = \frac{1}{(4\pi\sigma^2)^{d/2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4\sigma^2}} \quad \text{(正規分布)},$$
$$w(t) = \frac{1}{\tau} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{(指数分布)}.$$

ただし σ と τ は正定数とする. よって

$$\widehat{\lambda}(\xi) = \mathrm{e}^{-\sigma^2|\xi|^2}, \quad \widetilde{w}(s) = \frac{1}{s\tau + 1}$$

より

$$\widehat{\widetilde{\rho}}(\xi, s) = \frac{\widehat{\rho}_0(\xi)}{1 - \widehat{\lambda}(\xi)\widetilde{w}(s)} \frac{1 - \widetilde{w}(s)}{s} = \frac{\widehat{\rho}_0(\xi)}{s + \tau^{-1}(1 - \mathrm{e}^{-\sigma^2|\xi|^2})} \tag{2.3}$$

となる. 従って

$$s\widehat{\widetilde{\rho}}(\xi, s) - \widehat{\rho}_0(\xi) + \tau^{-1}(1 - \mathrm{e}^{-\sigma^2|\xi|^2})\widehat{\widetilde{\rho}}(\xi, s) = 0$$

が従うので, 両辺を逆変換するとマスター方程式

$$\tau\partial_t\rho(x,t) = (\lambda * \rho)(x,t) - \rho(x,t), \quad \rho(x,0) = \rho_0(x)$$

が導出される.

一般に, CTRW における粒子の運動は跳躍過程であり, その存在確率密度関数 $\rho = \rho(x,t)$ が拡散方程式を厳密に満たすわけではない. 拡散方程式は, 個々の跳躍幅と待ち時間が十分小さく, 多数の跳躍が起こる状況における粒子の巨視的な挙動を記述するものと考えられる. このような極限を考察するため, 以下ではスケーリングパラメータ $h > 0$ を導入し, 跳躍幅と待ち時間をそれぞれ h 倍および h^2 倍する.[13] このスケーリングの下では, 跳躍幅と待ち時間の確率密度関数はそれぞれ

$$\lambda_h(x) = h^{-d}\lambda(x/h), \quad w_h(t) = h^{-2}w(t/h^2)$$

となる. 従って, それらのフーリエ変換およびラプラス変換は

$$\widehat{\lambda}_h(\xi) = \widehat{\lambda}(h\xi) = \mathrm{e}^{-\sigma^2h^2|\xi|^2}, \quad \widetilde{w}_h(s) = \widetilde{w}(h^2s) = \frac{1}{sh^2\tau + 1}$$

---

[12] ここで $\xi = 0$ とすると, $\widehat{\widetilde{\phi}}(0,s) = \widetilde{w}(s)$ より $\widehat{\widetilde{\rho}}(0,s) = \frac{\widehat{\rho}_0(0)}{s}$ が成り立つ. 従って

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_0(x)\,\mathrm{d}x$$

が成り立つので, 質量保存が確認できる.

[13] [79] では, スケーリングの代わりに低周波近似, すなわち $|\xi| \ll 1$ とすることによる近似を用いて, 拡散方程式を導出している. 非整数階フォッカー・プランク方程式の導出においては, $|\xi| \ll 1$ に加えて, $s \ll 1$ も課した近似を用いる.

で与えられる. よって, (2.3) と同様にすれば

$$\begin{aligned}\widehat{\widetilde{\rho}}_h(\xi,s) &= \frac{\widehat{\rho}_0(\xi)}{1-\widehat{\lambda}_h(\xi)\widetilde{w}_h(s)}\frac{1-\widetilde{w}_h(s)}{s} \\ &= \frac{h^2\widehat{\rho}_0(\xi)}{h^2 s+\tau^{-1}(1-\mathrm{e}^{-\sigma^2h^2|\xi|^2})} \to \frac{\widehat{\rho}_0(\xi)}{s+D|\xi|^2} \quad \text{as} \ \ h\to 0_+ \end{aligned} \tag{2.4}$$

となる. ただし $D := \frac{\sigma^2}{\tau} > 0$ とする. 従って, $\widehat{\widetilde{\rho}}_*(\xi,s) := \lim_{h\to 0_+}\widehat{\widetilde{\rho}}_h(\xi,s)$ が満たす関係式

$$s\widehat{\widetilde{\rho}}_*(\xi,s) - \widehat{\rho}_0(\xi) + D|\xi|^2\widehat{\widetilde{\rho}}_*(\xi,s) = 0$$

から, よく知られた拡散方程式 (またはフォッカー・プランク方程式) が形式的に導出される.[14]

$$\partial_t\rho_*(x,t) - D\Delta\rho_*(x,t) = 0, \quad \rho_*(x,0) = \rho_0(x).$$

2.2 非整数階フォッカー・プランク方程式

次に変数分離型の確率密度関数 $\phi(\Delta x,\Delta t) = \lambda(\Delta x)w(\Delta t)$ を構成する w のラプラス変換が次のように与えられるとする (一方, λ は正常拡散と同様に正規分布として与える).

$$\widetilde{w}(s) = \mathrm{e}^{-s^\alpha} \quad (s>0).$$

ただし $0<\alpha<1$ とする. 上のように特徴づけされた確率分布は**片側 α-安定分布 (one-sided α-stable distribution)** と呼ばれるものであり

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(-\alpha n)}t^{-1-\alpha n} \quad (t>0)$$

のように表すことができる. 特に $\alpha = 1/2$ の場合, w は **Lévy 分布**の密度と一致する.

$$w(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{4t}\right) \quad (t>0).$$

次に Gorenflo–Mainardi [45, 46] や Scalas ら [98, 97] の議論に従い, パラメータ $h>0$ を導入して

$$\lambda_h(x) = h^{-d}\lambda(x/h), \quad w_h(t) = h^{-2/\alpha}w(t/h^{2/\alpha}) \quad (x\in\mathbb{R}^d,\ t\ge 0)$$

とスケーリングすれば

$$\widehat{\lambda}_h(\xi) = \widehat{\lambda}(h\xi) = \mathrm{e}^{-\sigma^2h^2|\xi|^2}, \quad \widetilde{w}_h(s) = \widetilde{w}(h^{2/\alpha}s) = \mathrm{e}^{-h^2s^\alpha}$$

となる. ここで, 正常拡散では時空変数に関して $(h\Delta x, h^2\Delta t)$ とスケーリングしていたのに対し, ここでは $(h\Delta x, h^{2/\alpha}\Delta t)$ とスケーリングしている. よって, 対応する存在確率密度関数を ρ_h で表せば, Montroll–Weiss の公式より

$$\begin{aligned}\widehat{\widetilde{\rho}}_h(\xi,s) &= \frac{\widehat{\rho}_0(\xi)}{1-\mathrm{e}^{-h^2s^\alpha}\mathrm{e}^{-h^2\sigma^2|\xi|^2}}\frac{1-\mathrm{e}^{-h^2s^\alpha}}{s} \\ &= \frac{\widehat{\rho}_0(\xi)}{1-\mathrm{e}^{-h^2(s^\alpha+\sigma^2|\xi|^2)}}\frac{1-\mathrm{e}^{-h^2s^\alpha}}{s} \to \frac{\widehat{\rho}_0(\xi)s^{\alpha-1}}{s^\alpha+\sigma^2|\xi|^2} \quad \text{as} \ \ h\to 0_+ \end{aligned} \tag{2.5}$$

[14] ただし, 極限関数 $\lim_{h\to 0_+}\widehat{\widetilde{\rho}}_h(\xi,s)$ がある関数 $\rho_*(x,t)$ のフーリエ・ラプラス変換になっているかは自明ではない. また密度関数 ρ_h のフーリエ・ラプラス変換 $\widehat{\widetilde{\rho}}_h$ の各点収束のみから, 各時刻における密度関数 $\rho_h(\cdot,t)$ の $L^1(\mathbb{R}^d)$ における収束が直ちに従うわけではない.

が得られる. 従って, $\widehat{\widetilde{\rho}}_*(\xi,s) := \lim_{h\to 0_+}\widehat{\widetilde{\rho}}_h(\xi,s)$ は

$$s^\alpha\widehat{\widetilde{\rho}}_*(\xi,s) - s^{\alpha-1}\widehat{\rho}_0(\xi) = -\sigma^2|\xi|^2\widehat{\widetilde{\rho}}_*(\xi,s) \tag{2.6}$$

を満たす. ここで α 階の **Caputo 微分作用素** ${}_0^C D_t^\alpha$ を次のように定義する.

$${}_0^C D_t^\alpha f := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}\partial_t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

するとそのラプラス変換は以下のようになることに注意する.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[{}_0^C D_t^\alpha f](s) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\mathcal{L}\left[\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}\partial_t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right](s)\\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\mathcal{L}[t^{-\alpha}](s)\mathcal{L}[\partial_t f](s)\\ &= s^{\alpha-1}\left(s\mathcal{L}[f](s) - f(0)\right) = s^\alpha\mathcal{L}[f](s) - s^{\alpha-1}f(0).\end{aligned}$$

このようにして, 次の**時間非整数階フォッカー・プランク方程式 (time-fractional Fokker–Planck equation)**

$${}_0^C D_t^\alpha \rho_*(x,t) = \sigma^2\Delta\rho_*(x,t), \quad \rho_*(x,0) = \rho_0(x) \tag{2.7}$$

が形式的に導出される.[15]

最後に (2.7) の解 $\rho_*(x,t)$ から**平均二乗変位 (mean-squared displacement)** を計算してみよう. まず, (2.6) より

$$-\Delta_\xi\widehat{\widetilde{\rho}}_*(0,s) = \frac{-\Delta_\xi\widehat{\rho}_0(0)}{s} + \frac{2d\sigma^2\widehat{\rho}_0(0)}{s^{\alpha+1}}$$

が成り立つので, 初期分布の二次モーメントが有限 $\int_{\mathbb{R}^d}|x|^2\rho_0(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ であれば

$$\int_{\mathbb{R}^d}|x|^2\rho_*(x,t)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^d}|x|^2\rho_0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2d\sigma^2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

が従う.[16] 従って, (2.7) に対応する確率過程を $(X_*(t))$ と表せば, 平均二乗変位は (変位 $X_*(t)-X_*(0)$ の平均がゼロで, 初期位置 $X_*(0)$ と $X_*(t)-X_*(0)$ が独立であるとすれば)

$$\begin{aligned}\langle|X_*(t)-X_*(0)|^2\rangle &= \langle|X_*(t)|^2\rangle - \langle|X_*(0)|^2\rangle\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}|x|^2\rho_*(x,t)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^d}|x|^2\rho_0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2d\sigma^2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\end{aligned}$$

となる. このことよりしばしば, (2.7) は**異常拡散方程式 (anomalous diffusion equation)** と呼ばれる.[17] また $0<\alpha<1$ であることから特に **subdiffusion equation** と呼ばれることもある.

---

[15] なお, 待ち時間分布を $\widetilde{w}(s) = (1+s^\alpha)^{-1}$ で与えられる Mittag–Leffler 型分布とすれば, スケーリング極限をとる前から時間に関する Caputo 微分を含む非整数階のマスター方程式

$${}_0^C D_t^\alpha \rho(x,t) = (\lambda * \rho)(x,t) - \rho(x,t), \quad \rho(x,0) = \rho_0(x)$$

が得られる. さらにこの待ち時間分布を用いても, 同様のスケーリング極限をとることで非整数階フォッカー・プランク方程式 (2.7) が導出できる ([73] 参照). 一方, ここでは片側 α-安定分布を待ち時間分布として採用し, CTRW の巨視的なスケーリング極限を通して非整数階拡散方程式を導出した.

[16] $\alpha > -1$ のとき $\mathcal{L}[t^\alpha] = \Gamma(\alpha+1)s^{-\alpha-1}$ である.

[17] 例 1 で扱ったケースでは平均二乗変位 $\langle|X(t)-X(0)|^2\rangle$ が t に比例する. このような状況を正常拡散と呼ぶ.

2.3 確率論による研究の紹介

最後に, CTRW のスケーリング極限と非整数階フォッカー・プランク方程式の導出を確率論的に正当化する研究について, いくつか紹介する. 非整数階拡散方程式の確率論的な解の表示については, Baeumer–Meerschaert [13] および Meerschaert 他 [74] による研究がある. これらの研究では, 逆安定劣過程を用いた時間変更と非整数階発展方程式との関係が明らかにされている. CTRW のスケーリング極限については Meerschaert–Scheffler [75] による確率過程としての極限定理が知られている ([76, 77] も参照). 特に, Meerschaert–Scheffler [75, Theorem 4.2] は, 適切な仮定の下で, 確率過程としての弱収束を証明している. ここで扱った非整数階フォッカー・プランク方程式の例で言えば, 対応するスケーリングされた CTRW $(X_h(t))$ は, 極限移行 $h \to 0_+$ によって, 逆 α-安定劣過程 (E_t) によって時間変更されたブラウン運動

$$X_*(t) = X_0 + \sqrt{2\sigma^2}\, B(E_t), \quad E_t = \inf\{r \geq 0 : D_r > t\}$$

に確率過程として収束する. ここで B は標準 d 次元 Brown 運動, D は

$$\mathbb{E}[e^{-sD_r}] = \mathrm{e}^{-rs^\alpha}$$

を満たす α-安定劣過程であり, X_0, B, D は互いに独立とする. また, 上の表示から, 変位 $X_*(t) - X_*(0)$ は初期位置 $X_*(0)$ と独立であり, その平均はゼロとなる. さらに, 平均二乗変位が

$$\mathbb{E}|X_*(t) - X_*(0)|^2 = \frac{2d\sigma^2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

となることも知られている. さらに CTRW から 非整数階フォッカー・プランク方程式の導出も, [75, Theorem 5.1] で保証されている (Caputo 微分は, 次節でも触れるようなリーマン・リュービル微分を用いた弱形式になっている).

3　作用素論からみた非整数階微分

3.1　半直線上で定義された関数に対する合成積と軟化子

以下, X はバナッハ空間とし, $T \in (0,\infty]$ とする. (半) 区間上で定義された関数 $f \in L^1(0,T;X)$ と $g \in L^1(0,T)$ の**合成積 (convolution)** $f * g$ を次のように定義する.

$$(f*g)(t) := \int_0^t f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in (0,T). \tag{3.1}$$

この定義は f と g を零拡張することで, $\mathbb{R}$ 上の関数に対する合成積として書き換えることもできる.

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t-s)\bar{g}(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in (0,T).$$

ただし $\bar{f}$ と $\bar{g}$ はそれぞれ f と g を $\mathbb{R}$ 上に零拡張したものを表す. 従って, $\bar{f} \in L^1(\mathbb{R};X)$, $\bar{g} \in L^1(\mathbb{R})$ であることから, 合成積 $f*g$ が well-defined であることが直ちに分かる. さらにヤングの畳み込み不等式も成り立つ.

命題 1 (ヤングの畳み込み不等式)

(i) 指数 $1 \le p,q,r \le \infty$ が以下を満たすと仮定する:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \ge 0. \tag{3.2}$$

このとき, 任意の $f \in L^p(0,T;X)$ および $g \in L^q(0,T)$ に対して

$$\|f*g\|_{L^r(0,T;X)} \le \|f\|_{L^p(0,T;X)}\|g\|_{L^q(0,T)}$$

が成り立つ.

(ii) **(O'Neil の畳み込み不等式)** 指数 $1 < p,q,r < \infty$ が (3.2) を満たすと仮定する. このとき, ある正定数 $C_{p,q,r}$ が存在し, 任意の $f \in L^p(0,T;X)$ および $g \in L^{q,\infty}(0,T)$ に対して, $f*g \in L^r(0,T;X)$

$$\|f*g\|_{L^r(0,T;X)} \le C_{p,q,r}\|f\|_{L^p(0,T;X)}\|g\|_{L^{q,\infty}(0,T)}$$

が成り立つ.

(iii) 指数 $1 \le p \le \infty$ とそのヘルダー共役指数 $p' = p/(p-1)_+$ を考える (ただし $1' = \infty$, $\infty' = 1$ とする. 特に $1 < p < \infty$ ならば $1/p + 1/p' = 1$ が成り立つ). このとき, 任意の $f \in L^p(0,T;X)$, $g \in L^{p'}(0,T)$ に対して, $f*g \in C([0,T];X)$ であり, さらに次の不等式が成立する:

$$\|(f*g)(t)\|_X \le \|f\|_{L^p(0,t;X)}\|g\|_{L^{p'}(0,t)} \quad \text{for} \quad t \in [0,T].$$

このとき, 特に $(f*g)(0) = 0$ が成り立つ.

証明. (i) 零拡張を用いることで, 通常のヤングの畳み込み不等式から

$$\|f*g\|_{L^r(0,T;X)} \le \|\bar{f}*\bar{g}\|_{L^r(\mathbb{R};X)} \le \|\bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R};X)}\|\bar{g}\|_{L^q(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^p(0,T;X)}\|g\|_{L^q(0,T)}$$

が従う.

(ii) [48] 参照.

(iii) 定義より p と p' のどちらか一方は有限値である. 以下, p が有限であるものとする. 任意の $s,t\in[0,T]$ をとり, 簡単のため $s<t$ としておく. するとヘルダーの不等式より, 以下が成立する:

$$\begin{aligned}\|(f*g)(t)-(f*g)(s)\|_X &\le \int_s^t \|f(t-\tau)g(\tau)\|_X\,\mathrm{d}\tau+\int_0^s \|f(t-\tau)-f(s-\tau)\|_X\,|g(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\\ &\le \|f\|_{L^p(0,t-s;X)}\|g\|_{L^{p'}(s,t)}+\|f(t-s+\cdot)-f\|_{L^p(0,s;X)}\|g\|_{L^{p'}(0,s)}\\ &\to 0\end{aligned}$$

as $t-s\to 0$. 従って $f*g\in C([0,T];X)$ である. さらに

$$\begin{aligned}\|(f*g)(t)\|_X &= \left\|\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_X\\ &\le \int_0^t \|f(t-\tau)\|_X\,|g(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\\ &\le \|f\|_{L^p(0,t;X)}\|g\|_{L^{p'}(0,t)} \quad \text{for } \ t\in[0,T]\end{aligned}$$

が従うので, 特に $(f*g)(0)=0$ が成り立つ. □

半区間上の関数に対する合成積では, 微分可能性やその導関数について注意が必要である.

命題 2 (半区間上の関数に対する合成積の微分可能性とその導関数)

以下, $1\le p<\infty$ および $0<T<\infty$ とする.

(i) $f\in W^{1,p}(0,T;X)$, $f(0)=0$, $g\in L^1(0,T)$ ならば, $f*g\in W^{1,p}(0,T;X)$ かつ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f*g)(t)=(f'*g)(t) \quad \text{for a.e. } t\in(0,T).$$

同じ結果が $f\in W^{1,p}(0,T)$, $f(0)=0$, $g\in L^1(0,T;X)$ に対しても成り立つ.

(ii) $f\in W^{1,p}(0,T;X)$, $g\in L^1(0,T)$ ならば, $f*g\in W^{1,1}(0,T;X)$ かつ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f*g)(t)=(f'*g)(t)+f(0)g(t) \quad \text{for a.e. } t\in(0,T).$$

同じ結果が $f\in W^{1,p}(0,T)$, $g\in L^1(0,T;X)$ に対しても成り立つ.

(iii) 任意の $f\in L^1(0,T;X)$ と $g\in L^1(0,T)$ に対して

$$\int_0^t (f*g)(s)\,\mathrm{d}s=(\hat{f}*g)(t) \quad \text{for a.e. } t\in(0,T)$$

が成り立つ. ただし $\hat{f}(s):=\int_0^s f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$, $s\in(0,T)$ とする. 同じ結果が $f\in L^1(0,T)$ と $g\in L^1(0,T;X)$ に対しても成り立つ.

証明. 簡単のため $X=\mathbb{R}$ の場合について示すが, 一般化は容易である.

(i) まず

$$\tilde{f}(t)=\begin{cases}0 & \text{if } \ t<0,\\ f(t) & \text{if } \ t\in[0,T],\\ f(T)\mathrm{e}^{-(t-T)} & \text{if } \ t>T\end{cases}$$

とおく. すると仮定 $f \in W^{1,p}(0,T)$, $f(0)=0$ より $\tilde{f} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ である (注意: 単なる f の零拡張 $\bar{f}$ は $W^{1,p}(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ には属さない可能性がある). よって $\bar{g} \in L^1(\mathbb{R})$ を $g \in L^1(0,T)$ の零拡張とすれば, $\tilde{f} * \bar{g} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ なので, $\tilde{f} = \bar{g} = 0$ on $(-\infty, 0)$ より $f * g = (\tilde{f} * \bar{g})|_{[0,T]} \in W^{1,p}(0,T)$ である. さらに $f' \equiv 0$, $g \equiv 0$ in $(-\infty, 0)$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f*g)(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{f}*\bar{g})\Big|_{[0,T]}(t) \\ &= (\tilde{f}' * \bar{g})|_{[0,T]}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}'(t-s)\bar{g}(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t f'(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s = (f'*g)(t)\end{aligned}$$

がほとんどすべての $t \in (0,T)$ に対して成り立つ.

(ii) 以下, $h(t) := f(t) - f(0) \in W^{1,p}(0,T)$ とする. すると $h(0) = 0$ である. (i) を h および g に適用すると, $h * g \in W^{1,p}(0,T)$ および

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h*g)(t) = (h'*g)(t) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T)$$

が成り立つ. さらに $h' = f'$ なので

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f*g)(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(h+f(0))*g\right](t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h*g)(t) + f(0)g(t) = (f'*g)(t) + f(0)g(t)$$

for a.e. $t \in (0,T)$.

(iii) フビニの定理より, 任意の $f, g \in L^1(0,T)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_0^t (f*g)(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^t \int_0^s f(s-\sigma)g(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \int_\sigma^t f(s-\sigma)g(\sigma)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_0^t \hat{f}(t-\sigma)g(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = (\hat{f}*g)(t) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T)\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし $\hat{f}(s) := \int_0^s f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$ とする. □

次に (3.1) によって定義される合成積に基づき, 軟化子 (ρ_n) は以下を満たす関数列として定める.

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \rho_n \geq 0, \quad \operatorname{supp}\rho_n = [0, 1/n], \quad \int_0^\infty \rho_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

通常の $\mathbb{R}$ 上全体で定義された軟化子との違いはその台の位置にあるだろう. 以下に軟化子にまつわる事実を列挙する.

命題 3 (半区間上で定義された関数に対する軟化子の性質)

(i) 指数 $1 \leq p < \infty$ と任意の $f \in L^p(0,T;X)$ に対して, $\rho_n * f$ は $C^\infty([0,T];X)$ に属し, 以下が成立する:

$$\rho_n * f \to f \quad \text{strongly in } L^p(0,T;X).$$

(ii) $T < \infty$ のとき, 任意の $f \in C([0,T];X)$ に対して, $\rho_n * f$ は $C^\infty([0,T];X)$ に属し, 以下が成立する:

$$\rho_n * f \to f \quad \text{strongly in } C([\delta,T];X)$$

for any $\delta \in (0,T)$.

証明. (i) まず f を零拡張することで $f*\rho_\varepsilon \in C^\infty([0,T];X)$ となることが定理 2 の (i) と同様に確認できる. 任意の $\varepsilon>0$ について以下のように考える. 稠密性の結果から, ある $f_\varepsilon \in C_c(0,T;X)$ が存在して $\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(0,T;X)} < \varepsilon$ が成り立つ. このとき $T' \in (0,T)$ が存在して, $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset [0,T']$ が成り立つ. すると f_ε は有界閉区間 $[0,T']$ 上で一様連続になるため, ある $\delta_\varepsilon>0$ が存在し, 任意の $t\in[0,T']$ と $s>0$ に対して

$$|s|<\delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|f_\varepsilon(t-s)-f_\varepsilon(t)\|_X < \varepsilon$$

が成立する. 従って $1/n<\delta_\varepsilon$ を満たすような十分大きい $n\in\mathbb{N}$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}\|(\rho_n * f_\varepsilon)(t) - f_\varepsilon(t)\|_X &= \left\| \int_0^t \rho_n(s) f_\varepsilon(t-s)\,\mathrm{d}s - \left(\int_0^t \rho_n(s)\,\mathrm{d}s\right) f_\varepsilon(t)\right\|_X \\ &\le \int_0^t \rho_n(s)\,\|f_\varepsilon(t-s)-f_\varepsilon(t)\|_X\,\mathrm{d}s \\ &\le \left(\int_0^{1/n}\rho_n(s)\,\mathrm{d}s\right) \sup_{s\in[0,1/n]} \|f_\varepsilon(t-s)-f_\varepsilon(t)\|_X \le \varepsilon.\end{aligned}$$

よって

$$\sup_{t\in[0,T]} \|(\rho_n * f_\varepsilon)(t) - f_\varepsilon(t)\|_X \le \varepsilon.$$

また $\operatorname{supp}(\rho_n * f_\varepsilon) \subset [0,T'+1/n] \subset [0,T'+1]$ となるので

$$\|(\rho_n * f_\varepsilon) - f_\varepsilon\|_{L^p(0,T;X)} \le C\varepsilon$$

が成り立つ. さらにヤングの畳み込み不等式より

$$\begin{aligned}\|(\rho_n * f) - (\rho_n * f_\varepsilon)\|_{L^p(0,T;X)} &= \|\rho_n * (f-f_\varepsilon)\|_{L^p(0,T;X)} \\ &\le \|\rho_n\|_{L^1(0,T)} \|f-f_\varepsilon\|_{L^p(0,T;X)} \le \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ. これらを組み合わせると結論を得る.

(ii) まず f を $\mathbb{R}$ 上に零拡張すると, $\rho_n * f \in C^\infty([0,T];X)$ であることが分かる. 次に $t\in(0,T)$ に対して, $\operatorname{supp}\rho_n = [0,1/n]$ および $\int_0^{1/n}\rho_n(s)\,\mathrm{d}s = 1$, さらにヘルダーの不等式から

$$\begin{aligned}\|(\rho_n * f)(t) - f(t)\|_X &= \left\| \int_0^{1/n} \rho_n(s)\,(f(t-s)-f(t))\,\mathrm{d}s\right\|_X \\ &\le \sup_{s\in[0,1/n]} \|f(t)-f(t-s)\|_X\end{aligned}$$

が従う. ここで $\delta>0$ を固定すると, f は有界閉区間 $[0,T]$ 上で一様連続なので, 右辺は $n\to\infty$ によって, $t\in[\delta,T]$ に関して一様に, 0 に収束する. よって

$$\|\rho_n * f - f\|_{C([\delta,T];X)} \to 0 \quad \text{as } n\to\infty$$

が従う. □

3.2 第二種ヴォルテラ積分方程式

本小節では $T \in (0,\infty)$ とし, 有限なもののみを考えることにする. このようなバナッハ空間 X 上の第二種ヴォルテラ積分方程式を考える.

$$u(t) + (a * u)(t) = f(t) \ \text{ in } X, \quad t \in (0,T). \tag{3.3}$$

ただし $a \in L^1(0,T)$ と $f \in L^1(0,T;X)$ は与えられたものとする.

命題 4 (第二種ヴォルテラ積分方程式の解の存在と一意性)

任意の $a \in L^1(0,T)$ と $f \in L^1(0,T;X)$ に対して, 第二種ヴォルテラ積分方程式 (3.3) はただ 1 つの解 $u \in L^1(0,T;X)$ を持つ.

証明. 次のように定義される写像 $F : L^1(0,T;X) \to L^1(0,T;X)$ が不動点を持つことを示せば十分である.

$$F(u) := f - a * u \quad \text{for } \ u \in L^1(0,T;X)$$

(命題 1 参照). 次に $L^1(0,T;X)$ 上のノルム $\|\cdot\|_\omega$ を次のように与える.

$$\|u\|_\omega := \int_0^T \|u(t)\|_X \mathrm{e}^{-\omega t}\,\mathrm{d}t \quad \text{for } \ u \in L^1(0,T;X).$$

ただし $\omega > 0$ は後ほど決定する. このとき

$$\begin{aligned}(a * u)(t)\mathrm{e}^{-\omega t} &= \int_0^t a(t-\tau)u(\tau)\mathrm{e}^{-\omega t}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t a(t-\tau)u(\tau)\mathrm{e}^{-\omega(t-\tau)}\mathrm{e}^{-\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= (a\mathrm{e}^{-\omega t}) * (u\mathrm{e}^{-\omega t})(t) \quad \text{for } \ u \in L^1(0,T;X)\end{aligned}$$

より, ヤングの畳み込み不等式を用いることで $u_1, u_2 \in L^1(0,T;X)$ に対して

$$\begin{aligned}\|F(u_1) - F(u_2)\|_\omega &\le \int_0^T \|a * (u_1-u_2)(t)\|_X\, \mathrm{e}^{-\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \left\|a * (u_1-u_2)(t)\mathrm{e}^{-\omega t}\right\|_X \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \left\|(a\mathrm{e}^{-\omega t}) * [(u_1-u_2)\mathrm{e}^{-\omega t}](t)\right\|_X \,\mathrm{d}t \\ &\le \int_0^T (|a|\mathrm{e}^{-\omega t}) * \left(\|u_1-u_2\|_X \mathrm{e}^{-\omega t}\right)\,\mathrm{d}t \\ &\le \|a\mathrm{e}^{-\omega t}\|_{L^1(0,T)} \|u_1-u_2\|_\omega\end{aligned}$$

が従う. ここでパラメータ ω を十分大きく選べば, $\|a\mathrm{e}^{-\omega t}\|_{L^1(0,T)} < 1$ が成り立つ. 実際, $a(t)\mathrm{e}^{-\omega t} \to 0$ a.e. in $(0,T)$ as $\omega \to +\infty$ および $|a(t)\mathrm{e}^{-\omega t}| \le |a(t)| \in L^1(0,T)$ が成り立つので, ルベーグの優収束定理より以下が従う:

$$a(t)\mathrm{e}^{-\omega t} \to 0 \quad \text{strongly in } \ L^1(0,T) \ \text{ as } \ \omega \to +\infty.$$

よって, バナッハの縮小写像の原理より, F がただ一つの不動点を持つことが示される. □

特に $X=\mathbb{R}$ としたとき, 積分核 a に対する第二種ヴォルテラ積分方程式 (3.3) の解の中でも, 次の 2 つは重要な役割を果たす.

補題 5 (レゾルベント核 $r[a]$ と基本解 $s[a]$)

定数 $T>0$ と積分核 $a\in L^1(0,T)$ について, 次の (i) と (ii) が成立する.

(i) 次の第二種ヴォルテラ積分方程式 (3.4) の解 $r\in L^1(0,T)$ が一意的に存在する:

$$r(t)+(a*r)(t)=a(t),\quad 0<t<T. \tag{3.4}$$

この r を a の**レゾルベント核**と呼び, $r[a]$ で表す.

(ii) 次の第二種ヴォルテラ積分方程式 (3.5) の解 $s\in W^{1,1}(0,T)$ が一意的に存在する:

$$s(t)+(a*s)(t)=1,\quad 0<t<T. \tag{3.5}$$

さらに $s(0)=1$ が成り立つ. この s を第二種ヴォルテラ積分方程式 (3.3) の**基本解**と呼び, $s[a]$ で表す.

注意 1. (i) 基本解 $s[a]$ とレゾルベント核 $r[a]$ を用いると, 任意の $T>0$, $u_0\in\mathbb{R}$ と $g\in L^1(0,T)$ に対する第二種ヴォルテラ積分方程式

$$u(t)+(a*u)(t)=u_0+(a*g)(t),\quad 0<t<T$$

の解 $u\in L^1(0,T)$ を

$$u(t)=u_0\,s[a](t)+(r[a]*g)(t),\quad 0<t<T$$

と表現することができる.

(ii) 次の第二種ヴォルテラ積分方程式を考える.

$$u(t)+(a*u)(t)=f(t),\quad 0<t<T.$$

ただし $f\in L^1(0,T)$ とする. ここで $u=f+v$ を代入すると

$$v+a*v=-a*f$$

となるので, (3.4) を思い出せば $v=-r[a]*f$ となる. 以上より

$$u(t)=f(t)-(r[a]*f)(t),\quad 0<t<T$$

と表現することができる.

(iii) 特に (ii) で得られた公式に $f=1$ を代入すると

$$s[a](t)=1-(r[a]*1)(t)=1-\int_0^t r[a](\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad 0<t<T \tag{3.6}$$

という関係式が導かれる.

証明. 命題 4 より第二種ヴォルテラ積分方程式 (3.4) および (3.5) を満たす $r[a]\in L^1(0,T)$ と $s[a]\in L^1(0,T)$ がただ一つ存在することが保証される. よって, ここでは (ii) について $s[a]\in W^{1,1}(0,T)$ と $s[a](0)=1$ のみを示す. ここで $r[a]\in L^1(0,T)$ を (3.4) の一意解とするとき

$$s(t)=1-\int_0^t r[a](\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad 0<t<T$$

とおくと, $s \in W^{1,1}(0,T)$ および $s(0)=1$ が成り立つ. さらに s は第二種ヴォルテラ積分方程式 (3.5) の解になることも分かる. 従って, 命題 4 で得られた第二種ヴォルテラ積分方程式の解の一意性より, $s[a]=s$ が分かる. 従って, $s[a] \in W^{1,1}(0,T)$ かつ $s[a](0)=1$ が成立する. □

一般的にヴォルテラ積分方程式について最大値原理は成立しないが, 以下の命題は成立する.

命題 6 (cf. [67])

定数 $T>0$ に対して関数 $f \in L^1(0,T)$ と積分核 $a \in L^1(0,T)$ が

- a は $(0,T)$ 上で非負かつ非増加,
- f は $(0,T)$ 上で非負かつ非減少

を満たすものとする. 次の第二種ヴォルテラ積分方程式

$$u(t)+(a*u)(t)=f(t), \quad 0<t<T$$

の解 $u \in L^1(0,T)$ は $(0,T)$ 上で非負値をとる.

証明. まず $\varepsilon>0$ に対して $f_\varepsilon := f*\rho_\varepsilon+\varepsilon$ とおく. ただし ρ_ε は半区間上で定義された関数に対する軟化子とする. すると $f_\varepsilon \in C^\infty([0,T])$ も非負かつ非減少となる.[18] さらに

$$f_\varepsilon \to f \quad \text{strongly in } L^1(0,T) \ \text{ as } \ \varepsilon \to 0_+$$

が成り立つ. 次に近似問題

$$u_\varepsilon(t)+(a*u_\varepsilon)(t)=f_\varepsilon(t), \quad 0<t<T$$

を考えると, レゾルベント核を用いた解の公式から

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &= f_\varepsilon - r[a]*f_\varepsilon \in C([0,T]) \\ &\to f - r[a]*f = u \quad \text{strongly in } L^1(0,T) \quad \text{as } \ \varepsilon \to 0_+ \end{aligned}$$

が成り立つ. よって $u_\varepsilon \geq 0$ in $(0,T)$ が示されれば, $u \geq 0$ a.e. in $(0,T)$ も従う. 以下, 前者を示す.

まず

$$u_\varepsilon(0)=f_\varepsilon(0)-(r[a]*f_\varepsilon)(0)=f_\varepsilon(0)=\varepsilon>0$$

が成り立つ. ここで「$u_\varepsilon \geq 0$ on $[0,T]$」の否定を仮定しよう. すると u_ε は $[0,T]$ 上で連続なので, ある $0<t_0<t_1 \leq T$ が存在して

$$u_\varepsilon \geq 0 \ \text{ on } [0,t_0], \quad u_\varepsilon < 0 \ \text{ on } (t_0,t_1]$$

が成り立つ. 従って

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t_1)+\int_0^{t_1} a(t_1-s)u_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s &= f_\varepsilon(t_1), \\ \int_0^{t_0} a(t_0-s)u_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s &= f_\varepsilon(t_0) \end{aligned}$$

[18] f_ε が非負であることは自明だが, f_ε の単調性は以下に示しておく. 以下, $0 \leq s_0 \leq s_1 \leq T$ とする. 定義より

$$f_\varepsilon(s_1)-f_\varepsilon(s_0)=\int_{s_0}^{s_1} f(s_1-s)\rho_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s+\int_0^{s_0}\left(f(s_1-s)-f(s_0-s)\right)\rho_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s \geq 0$$

が成り立つ. 実際, f と ρ_ε は非負なので $f(s_1-s)\rho_\varepsilon(s) \geq 0$, また f は非減少なので $f(s_1-s)-f(s_0-s) \geq 0$ である.

より

$$u_\varepsilon(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} a(t_1-s)u_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^{t_0} \left(a(t_1-s)-a(t_0-s)\right)u_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s = f_\varepsilon(t_1) - f_\varepsilon(t_0) \geq 0 \tag{3.7}$$

となる. 最後の不等式は f_ε が非減少であることから従う. ここで a は非負かつ $u_\varepsilon < 0$ on $(t_0, t_1]$ なので

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t_1-s)u_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s \leq 0$$

である. また a は非増加かつ $u_\varepsilon \geq 0$ on $[0, t_0]$ なので

$$\int_0^{t_0} \left(a(t_1-s)-a(t_0-s)\right)u_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s \leq 0$$

である. よって, $u(t_1) < 0$ より (3.7) に矛盾が起きていることが分かる. 従って (任意の $\varepsilon > 0$ に対して) $u_\varepsilon \geq 0$ on $[0, T]$ が成り立つ. よって $\varepsilon \to 0_+$ とすれば, $u \geq 0$ a.e. in $(0, T)$ であることも示される. □

3.3 基本的な仮定と completely positive kernel

本稿では以下の仮定が基本となる.

(H)$_0$ 積分核 $k \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ は非負かつ非増加とする. さらに非負値をとる積分核 $\ell \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ が存在して, 等式

$$\ell * k \equiv 1 \tag{3.8}$$

が成立する.

注意 2. 仮定 **(H)$_0$** を満たす積分核 k の典型例として, 次の**リーマン・リュービル核**が知られている.

$$k_\beta(s) := \frac{s^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}, \quad 0 < \beta < 1. \tag{3.9}$$

ここで k_β は $(0,\infty)$ 上で正値をとり, かつ減少する. さらに ℓ に対応する k_β の共役な核は次のように与えられる.

$$\ell_\beta(s) := \frac{s^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \quad 0 < \beta < 1.$$

さらに ℓ_β も $(0,\infty)$ 上で正値をとり, かつ減少する. よって仮定 **(H)$_0$** が成り立つことが分かる. このように **(H)$_0$** に加えて, ℓ にも非増加性を仮定する条件を後で **(H)** として導入する. また $f \in L^1(0,T;X)$ に対して

$$k_\beta * f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} f(s)\,\mathrm{d}s$$

は f の $(1-\beta)$ 階**リーマン・リュービル積分**に対応する. 同じように $\ell_\beta * f$ は f の β 階リーマン・リュービル積分と一致する.

次の定理からこの基本的な仮定の有用性を垣間見ることができるだろう.

定理 7 (非局所微分作用素に対するコーシー・リプシッツ・ピカールの定理)

指数 $1 \le p < \infty$, 定数 $T \in (0,\infty)$ とバナッハ空間 X に対して, 以下の仮定を満たす作用素 $A : (0,T) \times X \to X$ について考える:

- 各 $x \in X$ に対して, $t \mapsto A(t,x)$ はボッホナー強可測である.
- ある定数 $L > 0$ が存在して

$$\|A(t,x_1) - A(t,x_2)\|_X \le L\|x_1 - x_2\|_X \quad \text{for } x_1, x_2 \in X \text{ and a.e. } t \in (0,T).$$

- ある $v \in L^p(0,T;X)$ が存在して, $t \mapsto A(t,v(t))$ は $L^p(0,T;X)$ に属する.

さらに積分核 $k \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ は (3.8) を満たすような共役な積分核 $\ell \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ を持つものとする. このとき, 任意の $u_0 \in X$ および $f \in L^p(0,T;X)$ に対して, コーシー問題

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k * (u - u_0)](t) + A(t,u(t)) = f(t), \quad 0 < t < T \tag{3.10}$$

は次の条件を満たすような解 $u \in L^p(0,T;X)$ をただ一つ持つ:

$$k * (u - u_0) \in W^{1,p}(0,T;X), \quad [k * (u - u_0)](0) = 0. \tag{3.11}$$

注意 3. この定理では仮定 $(\mathbf{H})_0$ の中でも k の共役な積分核 ℓ の存在のみを用いており, k や ℓ の単調性や符号は一切用いていない. そのことはここで考えている微分方程式がまさに常微分方程式であるからであり, PDE や消散構造が本質的な役割を果たす発展方程式の場合は k や ℓ の単調性や符号が必須の役割を果たすことになる.

証明. 次の積分方程式を考える:

$$u = u_0 + \ell * [f - A(\cdot, u(\cdot))]. \tag{3.12}$$

ここで作用素 $F : L^p(0,T;X) \to L^p(0,T;X)$ を次のように定義する: 各 $v \in L^p(0,T;X)$ に対して

$$F(v) := u_0 + \ell * [f - A(\cdot, v(\cdot))]$$

とする. すると冒頭の積分方程式 (3.12) は以下のように書き換えられる:

$$u = F(u).$$

さらに簡単な計算をすることで, 任意の $\mu > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\|F(v_1)(t) - F(v_2)(t)\|_X &\le \int_0^t |\ell(t-s)| \, \|A(s,v_1(s)) - A(s,v_2(s))\|_X \, \mathrm{d}s \\
&\le L \int_0^t |\ell(t-s)| \, \|v_1(s) - v_2(s)\|_X \, \mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{\mu t/p} L \int_0^t |\ell(t-s)| \mathrm{e}^{-\mu(t-s)/p} \mathrm{e}^{-\mu s/p} \, \|v_1(s) - v_2(s)\|_X \, \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる. ここで $\|\cdot\|_{L^p(0,T;X)}$ と同値なノルム $\|\cdot\|_\mu$ を次のように与える.

$$\|g\|_\mu^p = \int_0^T \|g(t)\|_X^p \mathrm{e}^{-\mu t} \, \mathrm{d}t \quad \text{for } g \in L^p(0,T;X).$$

するとヤングの畳み込み不等式より

$$\|F(v_1) - F(v_2)\|_\mu \le L \left(\int_0^T \mathrm{e}^{-\mu\tau/p} |\ell(\tau)| \, \mathrm{d}\tau \right) \|v_1 - v_2\|_\mu$$

が従う. よってパラメータ $\mu > 0$ を十分大きく選び, 縮小写像の原理を用いることで, 作用素 F はバナッハ空間 $L^p(0,T,X)$ 上に不動点 u を持つことが分かり, さらに不動点 u は積分方程式 (3.12) を満たす. さらに仮定より $k * \ell = 1$ なので

$$k * (u - u_0) = \Big[k * \ell * \big(f - A(\cdot, u(\cdot)) \big) \Big](t) = \int_0^t \big(f(\tau) - A(\tau, u(\tau)) \big) \, \mathrm{d}\tau$$

であることに注目すれば (3.11) も確認される. 従って u は (3.10) の解である. □

仮定 $\mathbf{(H)}_0$ に関する注意を続ける.

注意 4. (i) 仮定 $\mathbf{(H)}_0$ に現れる k と ℓ の対応は 1 対 1 である. 実際, $T \in (0,\infty)$ に対して, $k \in L^1(0,T)$ と $\ell_i \in L^1(0,T)$ $(i = 1,2)$ が $k * \ell_i = 1$ a.e. in $(0,T)$ を満たすとする. すると

$$1 * \ell_1 = k * \ell_2 * \ell_1 = k * \ell_1 * \ell_2 = 1 * \ell_2 \quad \text{on } [0,T]$$

が成立するので, 両辺を微分すると $\ell_1 = \ell_2$ a.e. in $(0,T)$ が従う. ここで k, ℓ の役割を入れ替えても同じことが従う. また $T = \infty$ としても同様である.

(ii) 非負かつ非増加な関数 $k \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ に対して, $\mathbf{(H)}_0$ を満たすような関数 $\ell \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ が存在するかどうかという問題は自明ではない. 実際, $k * \ell = 1$ を満たすような非増加関数 $\ell \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ が存在しないような非負かつ非増加な $k \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty])$ の例も知られている. 一方, [Gripenberg 1980] では, k が非負かつ非増加で $\lim_{s\to 0_+} k(s) = +\infty$ が成り立つならば, $[0,T]$ 上の有限な Borel 測度 μ が一意的に存在し

$$\forall t \ge 0, \quad \int_0^t k(t-s) \, \mathrm{d}\mu(s) = 1$$

が成り立つことが示されている.

(iii) 仮定 $\mathbf{(H)}_0$ は ℓ が "completely positive kernel" であることを示唆する. 詳細は以下に述べていく. 後者では積分核 ℓ の方が主役で, 存在するのはむしろ積分核 k の方である. しかし本稿では積分核 k から生成される非局所微分作用素を含む発展方程式が主役であるため, このような仮定の書き方をしていることに注意する.

Completely positive kernel の定義を与えるために, 定数 $T \in (0,\infty)$, 積分核 $\ell \in L^1(0,T)$ と正数 $\lambda > 0$ に対して (積分核 $\lambda\ell$ に対する) レゾルベント核 $r_\lambda := r[\lambda\ell]$ と基本解 $s_\lambda := s[\lambda\ell]$ を考える. すなわち $r_\lambda \in L^1(0,T)$ と $s_\lambda \in W^{1,1}(0,T)$ はそれぞれ以下の第二種ヴォルテラ方程式の解である.

$$r_\lambda(t) + \lambda (\ell * r_\lambda)(t) = \lambda\ell(t), \quad 0 < t < T, \tag{3.13}$$

$$s_\lambda(t) + \lambda (\ell * s_\lambda)(t) = 1, \qquad 0 < t < T. \tag{3.14}$$

Completely positive kernel の定義は以下のように与えられる (例えば [30]).

定義 8 (Completely positive kernel)

定数 $T \in (0,\infty)$ に対して, 関数 $\ell \in L^1(0,T)$ が $[0,T]$ 上で **completely positive kernel** であるとは, 任意の $\lambda > 0$ に対して, 積分核 ℓ に関する第二種ヴォルテラ方程式 (3.13) と (3.14) の解 $r_\lambda \in L^1(0,T)$ と $s_\lambda \in W^{1,1}(0,T)$ の双方が非負値をとることを意味する. このとき (3.6) より $s_\lambda' = -r_\lambda \le 0$ なので, s_λ は非負かつ非増加になる.

注意 5. 積分核 $\ell \in L^1(0,T)$ が $[0,T]$ 上で completely positive kernel ならば, ℓ は少なくとも非負である, すなわち $\ell \geq 0$ a.e. in $(0,T)$ が成り立つ. 実際, $v_\lambda := \lambda^{-1} r_\lambda$ とおくと

$$v_\lambda(t) + \lambda \ell * v_\lambda(t) = \ell(t), \quad 0 < t < T$$

が成り立つ. よってヤングの畳み込み不等式より

$$\|v_\lambda\|_{L^1(0,T)} \leq \|\ell\|_{L^1(0,T)} \left(1 + \lambda \|v_\lambda\|_{L^1(0,T)}\right)$$

が従う. よって

$$\|v_\lambda\|_{L^1(0,T)} \leq \frac{\|\ell\|_{L^1(0,T)}}{1 - \lambda \|\ell\|_{L^1(0,T)}}, \quad 0 < \lambda \ll 1$$

となるので, $v_\lambda \to \ell$ strongly in $L^1(0,T)$ as $\lambda \to 0_+$ が成り立つ. 今, ℓ は $[0,T]$ 上で completely positive なので, $v_\lambda \geq 0$ a.e. in $(0,T)$ である. 従って, $\ell \geq 0$ a.e. in $(0,T)$ である.

積分核が completely positive であることに対する必要十分条件として以下の便利な定理が知られている.

定理 9 (Clément–Nohel [30, Theorem 2.2])

定数 $T \in (0,\infty)$ とする. 積分核 $\ell \in L^1(0,T)$ に対して, 次の (i) と (ii) は同値である.

(i) ℓ は $[0,T]$ 上で completely positive である.

(ii) ℓ は非負であり, さらに次の等式を満たすような定数 $\alpha \geq 0$ と非負かつ非増加な関数 $k \in L^1(0,T)$ がただ一つ存在する:

$$\alpha \ell(t) + k * \ell(t) = 1, \quad 0 < t < T.$$

注意 6. 上の命題の (ii) が正の定数 $\alpha > 0$ について成立するとき, $k, \ell \geq 0$ なので $\ell \in L^\infty(0,T)$ である. また $\alpha > 0$ なので, $\ell = \alpha^{-1} s_{\alpha^{-1}} \in W^{1,1}(0,T)$ である. 従って

$$1 = \alpha \ell(0) + k * \ell(0) = \alpha \ell(0)$$

より $\ell(0) > 0$ かつ $\alpha = \ell(0)^{-1} > 0$ である. また $\ell > 0$ in $(0,T)$ であることも分かる. 本稿の主テーマであるリーマン・リュービル核 $\ell_\beta \notin W^{1,1}(0,T)$ の場合, $\alpha = 0$ となることは必然である.

証明. (ii) $\Rightarrow$ (i) を示す. まず $\alpha > 0$ の場合について示す. このときは上の注意より $\ell \in W^{1,1}(0,T)$ および $\ell > 0$ in $(0,T)$ となっていることが分かる. (3.14) の両辺を微分すると

$$s_\lambda' + \lambda \ell' * s_\lambda + \lambda \ell(0) s_\lambda = 0$$

となる. ここで $s_\lambda = 1 - 1 * r_\lambda$ より $s_\lambda' = -r_\lambda$ である. 従って

$$\lambda \ell' * s_\lambda + \lambda \ell(0) s_\lambda = -s_\lambda' = r_\lambda$$

となる. これから

$$s_\lambda + \frac{\ell'}{\ell(0)} * s_\lambda = \frac{r_\lambda}{\lambda \ell(0)}$$

なので, 解の公式 (先の注意の (iii) 参照) より

$$s_\lambda = \frac{r_\lambda}{\lambda \ell(0)} - r\left[\frac{\ell'}{\ell(0)}\right] * \frac{r_\lambda}{\lambda \ell(0)}$$

となる．ただし $r[\ell'/\ell(0)]$ は積分核 $\ell'/\ell(0) \in L^1(0,T)$ に対するレゾルベント核を表す．以下，$r[\ell'/\ell(0)]$ の表現を導出する．ここで $\alpha > 0$, $\alpha\ell + k * \ell = 1$ より

$$\alpha = \ell(0)^{-1}, \quad \alpha\ell' + k * \ell' + \ell(0)k = 0$$

が従うので

$$\ell(0)k + \frac{\ell'}{\ell(0)} * (\ell(0)k) = -\frac{\ell'}{\ell(0)}$$

となる．よって

$$r\left[\frac{\ell'}{\ell(0)}\right] = -\ell(0)k$$

と $r[\ell'/\ell(0)]$ の表現を得る．従って

$$s_\lambda = \frac{r_\lambda}{\lambda\ell(0)} + \ell(0)k * \frac{r_\lambda}{\lambda\ell(0)} = \frac{r_\lambda}{\lambda\ell(0)} + \frac{k * r_\lambda}{\lambda}. \tag{3.15}$$

さらに

$$1 - 1 * r_\lambda = s_\lambda = \frac{r_\lambda}{\lambda\ell(0)} + \frac{k * r_\lambda}{\lambda}.$$

よって

$$\lambda\ell(0) - \lambda\ell(0) * r_\lambda = r_\lambda + \ell(0)k * r_\lambda,$$

つまり

$$r_\lambda + \ell(0)(\lambda + k) * r_\lambda = \lambda\ell(0) > 0 \tag{3.16}$$

が成立する．よって補題 6 から, 任意の $\lambda > 0$ に対して $r_\lambda \geq 0$ in $(0,T)$ であることが従う．さらに任意の $\lambda > 0$ に対して

$$s_\lambda \overset{(3.15)}{=} \frac{r_\lambda}{\lambda\ell(0)} + \frac{k * r_\lambda}{\lambda} \geq 0 \ \text{ in } (0,T)$$

が成り立つ．

次に $\alpha = 0$ の場合について示す．任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $b_\varepsilon \in W^{1,1}(0,T)$ が存在して

$$\varepsilon b_\varepsilon + k * b_\varepsilon = 1 \ \text{ on } [0,T]$$

が成立する．先に示したことから, 任意の $\lambda > 0$ に対して

$$r_\lambda^\varepsilon := r[\lambda b_\varepsilon] \geq 0, \quad s_\lambda^\varepsilon := s[\lambda b_\varepsilon] \geq 0$$

であることが分かる．すると (3.16) より

$$r_\lambda^\varepsilon + b_\varepsilon(0)\,(\lambda + k) * r_\lambda^\varepsilon = \lambda b_\varepsilon(0) = \lambda\varepsilon^{-1},$$

すなわち

$$\lambda^{-1}\varepsilon r_\lambda^\varepsilon + \lambda^{-1}(\lambda + k) * r_\lambda^\varepsilon = 1 \tag{3.17}$$

が成り立つ．他方, $\lambda^{-1}r_\lambda + \ell * r_\lambda = \ell$ および $k * \ell = 1$ より

$$\lambda^{-1}(k + \lambda) * r_\lambda = 1 \tag{3.18}$$

が成り立つ．以下, テスト関数 $z \in W^{1,1}(0,T)$, $z(0) = 0$, $z \geq 0$ in $(0,T)$ をとり,

$$u := \lambda^{-1} r_\lambda * z, \quad u_\varepsilon := \lambda^{-1} r_\lambda^\varepsilon * z \geq 0$$

とする. さらに (3.18) と z の合成積をとると

$$(k+\lambda)*u = 1*z,$$

両辺に $\varepsilon u = \varepsilon * u'$ をそれぞれ加えると

$$\varepsilon u + (k+\lambda)*u = 1*z + \varepsilon * u'$$

が成り立つ. さらに (3.17) と z の合成積をとると

$$\varepsilon u_\varepsilon + (\lambda+k)*u_\varepsilon = 1*z.$$

よって

$$\varepsilon(u-u_\varepsilon) + (\lambda+k)*(u-u_\varepsilon) = \varepsilon * u'$$

が成り立つ. さらに $w_\varepsilon \in L^1(0,T)$ を

$$\varepsilon w_\varepsilon + (\lambda+k)*w_\varepsilon = \varepsilon * |u'| \in L^1(0,T),\ \geq 0,\ \nearrow \tag{3.19}$$

の解とすると, 補題 6 から $w_\varepsilon \geq 0$ である. よって $\zeta := w_\varepsilon - (u-u_\varepsilon)$ とおくと

$$\varepsilon\zeta + (\lambda+k)*\zeta = \varepsilon * \big(|u'| - u'\big) \in L^1(0,T),\ \geq 0,\ \nearrow \quad \text{in } (0,T)$$

を満たすので, 補題 6 より $\zeta \geq 0$ in $(0,T)$, すなわち $w_\varepsilon \geq u - u_\varepsilon$ in $(0,T)$ が成立する. 同様に $\zeta = w_\varepsilon + (u-u_\varepsilon)$ として議論すると $w_\varepsilon \geq -(u-u_\varepsilon)$ in $(0,T)$ が成り立つ. 以上より

$$|u-u_\varepsilon| \leq w_\varepsilon \ \text{ in } (0,T) \tag{3.20}$$

が成り立つ. ここで (3.19) を思い出すと

$$(\lambda + k(T))\int_0^T w_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s \leq \varepsilon w_\varepsilon(T) + [(\lambda+k)*w_\varepsilon](T) = \varepsilon\int_0^T |u'(s)|\,\mathrm{d}s$$

となるので, $\varepsilon \to 0_+$ とすれば

$$\int_0^T |w_\varepsilon(s)|\,\mathrm{d}s \to 0$$

となるので, (3.20) から

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{strongly in } L^1(0,T)$$

が成り立つ. ここで $u_\varepsilon \geq 0$ in $(0,T)$ より, $u \geq 0$ in $(0,T)$ が従う. ここで u の定義に立ち返ると

$$\int_0^T r_\lambda(T-s)z(s)\,\mathrm{d}s \geq 0 \quad \forall z \in W^{1,1}(0,T),\ z \geq 0,\ z(0) = 0$$

より, 任意の $\lambda > 0$ に対して $r_\lambda \geq 0$ in $(0,T)$ が成立する. さらに任意の $\lambda > 0$ に対して

$$s_\lambda = k * \lambda^{-1} r_\lambda \geq 0 \ \text{ in } (0,T)$$

が成立する. 実際, (3.18) より

$$k*\lambda^{-1}r_\lambda + \lambda\ell * k * \lambda^{-1}r_\lambda = (1+\lambda\ell)*k*\lambda^{-1}r_\lambda = (k+\lambda)*\lambda^{-1}r_\lambda \overset{(3.18)}{=} 1.$$

よって $s_\lambda = k*\lambda^{-1}r_\lambda \geq 0$ in $(0,T)$ が成り立つ.

逆向きの主張 (i) $\Rightarrow$ (ii) は本稿では直接必要ないため証明は省略する. 詳しくは [30, Theorem 2.2] の証明を参照してほしい. □

3.4 非局所微分作用素の m-増大性

仮定 $(\mathbf{H})_0$ を満たす積分核 k に対して, 非局所微分作用素を次のように定義する.

定義 10 (非局所微分作用素)

積分核 k が仮定 $(\mathbf{H})_0$ を満たすとする. 指数 $1 \le p \le \infty$ と定数 $T \in (0, \infty]$ に対して, **非局所微分作用素 (nonlocal differential operator)** $\mathcal{B}^p : D(\mathcal{B}^p) \subset L^p(0,T;X) \to L^p(0,T;X)$ を以下のように定義する:

$$D(\mathcal{B}^p) := \left\{ u \in L^p(0,T;X) \colon k * u \in W^{1,p}(0,T;X) \ \text{ and } \ (k*u)(0) = 0 \right\},$$
$$\mathcal{B}^p(u) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k*u) \quad \text{for} \quad u \in D(\mathcal{B}^p).$$

以下, 特に問題がなければ $\mathcal{B}^p$ は単に $\mathcal{B}$ と書くことにする.

注意 7 (リーマン・リュービル微分と Caputo 微分)**.** 特に $k = k_\beta$ としたとき

$$\mathcal{B}(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k_\beta * f)$$

は f の β 階の**リーマン・リュービル微分**と一致する. 一般にリーマン・リュービル微分と **Caputo 微分**, すなわち

$$k_\beta * \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$$

は一致しない. しかし f が C^1 級でかつ $f(0) = 0$ であるとき, 両者は一致する:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k_\beta * f) = k_\beta * \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \quad \text{if} \ \ f \in C^1([0,T];X) \ \text{ and } \ f(0) = 0.$$

古典的な 1 階微分作用素 $\mathcal{A}^p : D(\mathcal{A}^p) \subset L^p(0,T;X) \to L^p(0,T;X)$ の定義もおさらいしておこう. ただし $1 \le p \le \infty$ と $T \in (0, \infty]$ とする.

$$D(\mathcal{A}^p) := \left\{ w \in W^{1,p}(0,T;X) \colon w(0) = 0 \right\},$$
$$\mathcal{A}^p(w) := \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \quad \text{for} \quad w \in D(\mathcal{A}^p).$$

以下, 問題がなければ $\mathcal{A}^p$ を $\mathcal{A}$ と書くことにする. また

$$D(\mathcal{A}^p) \subset D(\mathcal{B}^p)$$

が成り立つ. 実際, $u \in D(\mathcal{A}^p)$ ならば $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ かつ $u(0) = 0$ なので, $k * u \in W^{1,p}(0,T;X)$ かつ $(k*u)(0) = 0$ が成立する. よって $u \in D(\mathcal{B}^p)$ である.

さらに線形作用素 $\mathcal{A}^p$ が $L^p(0,T;X)$ において m-増大作用素 (m-accretive operator) になることが知られている. 本小節の主定理は以下のとおりである.

定理 11 (非局所微分作用素の m-増大性)

積分核 k が仮定 $\mathbf{(H)}_0$ を満たすと仮定する. 指数 $1 \le p \le \infty$, $T \in (0, \infty]$ およびバナッハ空間 X に対して定義される非局所微分作用素 $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset L^p(0,T;X) \to L^p(0,T;X)$ を考える. このとき, 以下の (i) – (iv) が成立する.

(i) 非局所微分作用素 $\mathcal{B}$ は $L^p(0,T;X)$ 上で m-増大である.

(ii) m-増大作用素 $\mathcal{B}$ のレゾルベント $\mathcal{J}_{1/n} : L^p(0,T;X) \to D(\mathcal{B})$ は次のように表現される:

$$\mathcal{J}_{1/n} f = n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (s_n * \ell * f) = r_n * f \quad \text{for} \quad f \in L^p(0,T;X).$$

ただし $r_n = r[n\ell]$ と $s_n = s[n\ell]$ はそれぞれ $n\ell$ に対するレゾルベント核と基本解である. また $p < \infty$ ならば, 任意の $f \in L^p(0,T;X)$ に対して

$$r_n * f \to f \quad \text{strongly in } L^p(0,T;X) \ \text{ as } \ n \to \infty.$$

(iii) m-増大作用素 $\mathcal{B}$ の吉田近似 $\mathcal{B}_{1/n}$ は次のように表現される:

$$\mathcal{B}_{1/n}(f) := \mathcal{B}(\mathcal{J}_{1/n} f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k_n * f) \quad \text{for} \quad f \in L^p(0,T;X).$$

ただし $k_n := n s_n = r_n * k$ とする. すると $k_n \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0,T))$ ($T < \infty$ なら $k_n \in W^{1,1}(0,T)$) は非負かつ非増加である. また, 基本解 s_n と積分核 k_n は X と p の選び方によらないことに注意する.

(iv) 以下, $T < \infty$ とする. $k_n \to k$ strongly in $L^1(0,T)$ as $n \to \infty$ が成り立つ. もし $k \in L^q(0,T)$, $1 \le q < \infty$ ならば, $k_n \to k$ strongly in $L^q(0,T)$ as $n \to \infty$ が成り立つ.

証明. (i) 作用素 $\mathcal{B}$ が増大 (accretive) であることの証明は後回しにして, 先に任意の $\lambda > 0$ に対して $R(I + \lambda\mathcal{B}) = L^p(0,T;X)$ が成り立つことを示そう. 各 $f \in L^p(0,T;X)$ に対して, 方程式 $u + \lambda\mathcal{B}(u) = f$, すなわち

$$u + \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (k * u) = f, \quad u \in D(\mathcal{B}) \tag{3.21}$$

を考える. この方程式の両辺と ℓ の合成積をとると

$$\ell * u + \lambda \ell * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (k * u) = \ell * f.$$

従って $u \in D(\mathcal{B})$ より $(k * u)(0) = 0$ なので, 仮定 $k * \ell = 1$ より

$$\ell * u + \lambda u = \ell * f \tag{3.22}$$

が成り立つ. 実は (3.22) と (3.21) は同値である. 実際, (3.22) と仮定 $k * \ell = 1$ から $u = \lambda^{-1}\ell * (f - u) \in D(\mathcal{B})$ であることが分かる. さらに (3.22) の両辺と k の合成積をとり, さらに両辺を微分すると (3.21) が従う (ここでも仮定 $\ell * k = 1$ を用いる). さて (3.22) は第二種ヴォルテラ方程式なので, 解を

$$u = r_{\lambda^{-1}} * f \in L^p(0,T;X) \tag{3.23}$$

と表せる. ただし $r_{\lambda^{-1}} = r[\lambda^{-1}\ell]$ は $\lambda^{-1}\ell$ に対するレゾルベント核を表す. よって (3.22) と (3.21) は同値だったので, $R(I + \lambda\mathcal{B}) = L^p(0,T;X)$ である.

次に $\mathcal{B}$ が $L^p(0,T;X)$ 上で増大作用素であること, すなわち

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} \le \|u + \lambda\mathcal{B}(u)\|_{L^p(0,T;X)} \quad \text{for all } \ u \in D(\mathcal{B}), \ \lambda > 0$$

が成り立つことを示す. ここで $f = u + \lambda\mathcal{B}(u)$ とおくと, (3.23) より $u = r_{\lambda^{-1}} * f$ である. また $r_{\lambda^{-1}} = -s'_{\lambda^{-1}}$ が成り立つ. ただし $s_{\lambda^{-1}} := s[\lambda^{-1}\ell]$ とする. まず ℓ は completely positive kernel なので, $s_{\lambda^{-1}}$ および $-s'_{\lambda^{-1}}$ は非負値をとる. 従って

$$\|r_{\lambda^{-1}}\|_{L^1(0,T)} = \|s'_{\lambda^{-1}}\|_{L^1(0,T)} = \int_0^T -s'_{\lambda^{-1}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = s_{\lambda^{-1}}(0) - s_{\lambda^{-1}}(T) \le 1. \tag{3.24}$$

よって, ヤングの畳み込み不等式を用いると

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \|r_{\lambda^{-1}} * f\|_{L^p(0,T;X)} \le \|f\|_{L^p(0,T;X)}\|r_{\lambda^{-1}}\|_{L^1(0,T)} \overset{(3.24)}{\le} \|f\|_{L^p(0,T;X)}.$$

よって $\mathcal{B}$ は増大作用素である. 以上のことから $\mathcal{B}$ は m-増大作用素であることが示された.

(ii) レゾルベントは $\mathcal{J}_{1/n} = (I + (1/n)\mathcal{B})^{-1}$ として定義されるため, $f \in L^p(0,T;X)$ と $\lambda = 1/n$ に対して, 上の証明で扱った方程式 (3.21) の解 u が $J_{1/n}f$ に他ならない. そこで (3.21) と同値な方程式 (3.22) とその解の表現 (3.23) を思い出し, $r_n = -s'_n$ ((3.6) 参照. ただし $r_n := r[n\ell]$, $s_n := s[n\ell]$ とする) と (3.14) の両辺を微分することで得られる関係式 $-s'_n = n(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(s_n * \ell)$ より

$$u = r_n * f = -s'_n * f = n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(s_n * \ell) * f$$

が成り立つ. ここで $s_n \in W^{1,1}(0,T)$ より $(s_n * \ell)(0) = 0$ なので

$$u = r_n * f = n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(s_n * \ell * f) \tag{3.25}$$

が成立する. よって

$$\mathcal{J}_{1/n}f = u = n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(s_n * \ell * f) = r_n * f \quad \text{for} \quad f \in L^p(0,T;X)$$

として表現される. また $p < \infty$ ならば $D(\mathcal{B})$ は $L^p(0,T;X)$ 上で稠密になるため[19], m-増大作用素の一般論から

$$r_n * f = \mathcal{J}_{1/n}f \to f \quad \text{strongly in } L^p(0,T;X) \text{ as } n \to \infty$$

が成り立つ.

(iii) 任意の $f \in L^p(0,T;X)$ に対して, 吉田近似の定義に従い, 直接計算する.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{1/n}(f) &= \mathcal{B}(\mathcal{J}_{1/n}f) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(s_n * \ell * f)\right] \\
&= n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * \ell * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(s_n * f)\right] \\
&= n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[1 * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(s_n * f)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ns_n * f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k_n * f).
\end{aligned}$$

ただし $k_n := ns_n \in W^{1,1}(0,T)$ とする.

(iv) ここでは $X = \mathbb{R}$ および $p = q$ とおく. すると吉田近似の性質から, 任意の $f \in D(\mathcal{B})$ に対して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k_n * f) = \mathcal{B}_{1/n}(f) \to \mathcal{B}(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k * f) \quad \text{strongly in } L^q(0,T)$$

[19] 実際, $D(\mathcal{A}) \subset D(\mathcal{B}) \subset L^p(0,T;X)$ であり, さらに $p \in [1,\infty)$ に対しては, $C^1([0,T];X)$ は $L^p(0,T;X)$ 上で稠密であるため.

as $n \to \infty$. 特に $f \equiv 1 \in D(\mathcal{B})$ (ここで仮定 $k \in L^q(0,T)$ を用いている) とおけば

$$k_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k_n * 1) \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k * 1) = k \quad \text{strongly in } L^q(0,T)$$

as $n \to +\infty$. □

最後に $\mathcal{B}$ のドメイン $D(\mathcal{B})$ には初期値の情報 (初期条件) が内包されていることを確認する.

命題 12 (初期条件)

初期値 $u_0 \in X$ に対して $u - u_0 \in D(\mathcal{B}^p)$ および $\ell \in L^{p'}(0,T)$ が成り立つとき, 初期条件 $u(0) = u_0$ が (古典的な意味で) 成立する.

証明. 実際, $u - u_0 \in D(\mathcal{B}^p)$ より, $\mathcal{B}^p(u - u_0) \in L^p(0,T;X)$ である. 従って

$$u - u_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\ell * k * (u - u_0)\right] = \ell * \mathcal{B}^p(u - u_0) + \ell[k * (u - u_0)](0) = \ell * \mathcal{B}^p(u - u_0)$$

が従う. ここで $\ell \in L^{p'}(0,T)$ より, $\ell * \mathcal{B}^p(u - u_0) \in C([0,T];X)$ かつ $(\ell * \mathcal{B}^p(u - u_0))(0) = 0$ が成り立つので

$$u - u_0 \in C([0,T];X) \quad \text{かつ} \quad u(0) = u_0$$

であることが示された. □

4　ヒルベルト空間における非局所連鎖律公式

本節以降は [6] に基づく (cf. [2]). 以下, 定数 $T > 0$ および実ヒルベルト空間 H について考える.

4.1　非局所連鎖律公式

ここでは非局所微分作用素と凸汎関数に対する連鎖律公式について論じる. 以下, 凸汎関数 $\psi : H \to (-\infty, +\infty]$ の**ルジャンドル変換** $\psi^* : H \to (-\infty, +\infty]$ (もしくは**共役凸汎関数**) がしばしば登場するので, その定義についておさらいしておく.

$$\psi^*(g) := \sup_{v \in H} \big[(g, v)_H - \psi(v)\big] \quad \text{for } g \in H. \tag{4.1}$$

もし ψ が適正 (すなわち $\psi \not\equiv \infty$ である), 下半連続, 凸ならば, ψ^* も適正, 下半連続, 凸になる (例えば [23] 参照). また次の事実を **Fenchel–Moreau 恒等式**と呼ぶ.

$$g \in \partial\psi(u) \quad \Leftrightarrow \quad \psi^*(g) = (u, g)_H - \psi(u).$$

つまり ψ^* の定義に現れる上限は $g \in \partial\psi(u)$ となる $u \in H$ が存在するならば u で到達される. また逆に上限が u で到達するならば, $g \in \partial\psi(u)$ が成り立つ.

命題 13 (凸汎関数に対する非局所連鎖律公式)

積分核 $h \in W^{1,1}(0,T)$, 適正凸汎関数 $\psi : H \to (-\infty, +\infty]$, $u_0 \in H$ を考える. また $u \in L^1(0,T;H)$ が

$$\psi(u(\cdot)) \in L^1(0,T), \quad u(t) \in D(\partial\psi) \ \text{ for a.e. } t \in (0,T)$$

を満たすとする. このとき, ほとんどすべての $t \in (0,T)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[h * (u - u_0)](t), g\right)_H \\
&\quad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[h * \psi(u(\cdot))\big](t) + h(t)\big[(u(t) - u_0, g)_H - \psi(u(t))\big] \\
&\qquad + \int_0^t h'(\tau)\big[(u(t-\tau) - u(t), g)_H + \psi(u(t)) - \psi(u(t-\tau))\big]\,\mathrm{d}\tau \quad \forall g \in \partial\psi(u(t))
\end{aligned}$$

が成立する. さらに $h' \le 0$ a.e. in $(0,T)$ が成り立つならば

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[h * (u - u_0)](t), g\right)_H \ge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[h * \psi(u(\cdot))\big](t) + h(t)\left[\psi^*(g) - (u_0, g)_H\right]$$

が成立する. 加えて $u_0 \in D(\psi)$ および $h \ge 0$ が成り立つならば

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[h * (u - u_0)](t), g\right)_H \ge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[h * (\psi(u(\cdot)) - \psi(u_0))\big](t)$$

が成立する.

証明. まず $u \in L^1(0,T;H)$ および $\psi(u(\cdot)) \in L^1(0,T)$ なので, $h * (u - u_0) \in W^{1,1}(0,T;H)$ および $h * \psi(u(\cdot)) \in W^{1,1}(0,T)$ が成り立つ. 従って $t \mapsto h * (u - u_0)(t)$ と $t \mapsto h * \psi(u(\cdot))(t)$ は $(0,T)$ 上ほとんどいたるところで微分可能である. さらにほとんどすべての $t \in (0,T)$ に対して, $\partial\psi(u(t)) \neq \emptyset$ が成り立つ. 以下, $h * (u - u_0)$ と $h * \psi(u(\cdot))$ が微分可能であり, かつ $\partial\psi(u(t)) \neq \emptyset$

となるような $t \in (0,T)$ について考える (そのような t は $(0,T)$ 上ほとんどいたるところでとれる).

任意の $g \in \partial\psi(u(t))$ に対して, 以下のようになることが分かる.

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[h*(u-u_0)](t), g\right)_H \\
&\quad = h(0)\,(u(t)-u_0, g)_H + \int_0^t h'(t-s)\,(u(s)-u_0, g)_H \,\mathrm{d}s \\
&\quad = h(0)\psi(u(t)) + h(0)\big[(u(t)-u_0, g)_H - \psi(u(t))\big] \\
&\qquad + \int_0^t h'(t-s)\psi(u(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t h'(t-s)\big[(u(s)-u_0, g)_H - \psi(u(s))\big]\,\mathrm{d}s \\
&\quad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[h*\psi(u(\cdot))\big](t) - \int_0^t h'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\big[(u(t)-u_0, g)_H - \psi(u(t))\big] \\
&\qquad + h(t)\big[(u(t)-u_0, g)_H - \psi(u(t))\big] \\
&\qquad + \int_0^t h'(\tau)\big[(u(t-\tau)-u_0, g)_H - \psi(u(t-\tau))\big]\,\mathrm{d}\tau \\
&\quad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[h*\psi(u(\cdot))\big](t) + h(t)\big[(u(t)-u_0, g)_H - \psi(u(t))\big] \\
&\qquad + \int_0^t h'(\tau)\big[(u(t-\tau)-u(t), g)_H + \psi(u(t)) - \psi(u(t-\tau))\big]\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

ここで $\partial\psi$ の定義を用いると

$$(u(t-\tau)-u(t), g)_H + \psi(u(t)) - \psi(u(t-\tau)) \le 0$$

が成り立つ. さらに Fenchel–Moreau の恒等式より

$$(u(t), g)_H - \psi(u(t)) = \psi^*(g) \quad \Leftrightarrow \quad g \in \partial\psi(u(t)).$$

加えて, $u_0 \in D(\psi)$ と $h \ge 0$ を仮定すると

$$(u(t)-u_0, g)_H - \psi(u(t)) \ge -\psi(u_0)$$

が成り立つので

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[h*(u-u_0)](t), g\right)_H &\ge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[h*\psi(u(\cdot))\big] - \psi(u_0)h(t) \\
&\ge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[h*\big(\psi(u(\cdot)) - \psi(u_0)\big)\Big](t).
\end{aligned}
$$

こうしてすべての主張が示された. □

命題 13 を特別な汎関数 $\psi(w) = (1/2)\|w\|_H^2$ と $u_0 = 0$ に適用することで, 次のよく知られた事実が従う. 例えば [110, Lemma 2.1] を参照せよ.

補題 14 (非整数階ライプニッツ則)

積分核 $h \in W^{1,1}(0,T)$ と $u \in L^2(0,T;H)$ に対して, 以下が成立する:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h*u)(t), u(t)\right)_H = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(h*\|u(\cdot)\|_H^2\right)(t) + \frac{1}{2}h(t)\|u(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\int_0^t h'(s)\|u(t)-u(t-s)\|_H^2\,\mathrm{d}s \tag{4.2}$$

for a.e. $t \in (0,T)$. ここで右辺の各項は $L^1(0,T)$ に属する. 特に $h' \le 0$ ならば

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h*u)(t), u(t)\right)_H \ge \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(h*\|u(\cdot)\|_H^2\right)(t) + \frac{1}{2}h(t)\|u(t)\|_H^2$$

for a.e. $t \in (0,T)$.

4.2 局所微分作用素と非局所微分作用素の和の極大単調性

本小節では $\mathcal{A} = \mathcal{A}^p$ と $\mathcal{B} = \mathcal{B}^p$ を $X = H$ かつ $p = 2$ に対して考える. さらに $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$ と書くことにする. さらに以下のように仮定する.

(H) 積分核 $k \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ は非負かつ非増加とする. さらに非負かつ非増加な積分核 $\ell \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ が存在して, 等式

$$\ell * k \equiv 1$$

が成立する.

ここでの主定理は以下のとおりである. この定理は非整数階勾配流方程式に対する近似解の構成やそのア・プリオリ評価の導出に用いられる.

定理 15 (和 $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ の極大単調性)

仮定 **(H)** の下で, 和 $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ は $\mathcal{H}$ 上で極大単調である.

証明. まずはじめに

$$(\mathcal{A}(u), \mathcal{B}(u))_{\mathcal{H}} = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k*u)\right)_{\mathcal{H}} \ge 0 \quad \text{for all } \ u \in D(\mathcal{A}) \tag{4.3}$$

を示す. ここで $u \in D(\mathcal{A})$ より

$$u,\ k*u \in W^{1,2}(0,T;H),\ u(0) = 0 \ \text{ and } (k*u)(0) = 0$$

が成り立つことに注意する. 仮定 **(H)** より

$$\mathcal{A}(u) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\ell*k*u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\ell * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k*u)\right] \tag{4.4}$$

と書き直すことができる. また $v := \mathcal{B}(u) = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(k*u) \in \mathcal{H}$ とおくと

$$\ell * v = u \in D(\mathcal{A})$$

が成り立つ. 従って $v \in D(\mathcal{B}_\ell)$ である. ここで $\mathcal{B}_\ell$ は定義 10 に現れる積分核 k を ℓ で置き換えたもので定義される非局所微分作用素である. よって $\mathcal{H}$ 上で $\mathcal{B}_\ell$ は単調作用素なので[20]

$$(\mathcal{A}(u), \mathcal{B}(u))_{\mathcal{H}} = (\mathcal{B}_\ell(v), v)_{\mathcal{H}} \ge 0$$

[20]実際, ヒルベルト空間上で増大作用素と単調作用素は同義である.

となり, (4.3) が従う.

次に $\mathcal{B}$ のレゾルベントを $\mathcal{J}_{1/n} := (I + n^{-1}\mathcal{B})^{-1} : \mathcal{H} \to D(\mathcal{B})$ を定義する. ここでは以下を示す.

$$\mathcal{J}_{1/n}(D(\mathcal{A})) \subset D(\mathcal{A}) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

実際, $u \in D(\mathcal{A})$ に対して $u_n := \mathcal{J}_{1/n}u$ は $\mathcal{J}_{1/n}$ の定義および $\mathcal{B}_{1/n}(u) = \mathcal{B}(\mathcal{J}_{1/n}u)$ (ただし $\mathcal{B}_{1/n}$ は $\mathcal{B}$ の吉田近似とする) より

$$u_n = u - \frac{1}{n}\mathcal{B}_{1/n}(u)$$

と表されるが, 定理 11 と命題 2 を用いると, $u \in W^{1,2}(0,T;H)$, $u(0) = 0$ と $k_n \in W^{1,1}(0,T)$ より

$$\mathcal{B}_{1/n}(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k_n * u) = k_n(0)u + k_n' * u \in W^{1,2}(0,T;H)$$

となるので, $u_n \in W^{1,2}(0,T;H)$ が従う. また $u_n(0) = u(0) - \frac{1}{n}\mathcal{B}_{1/n}(u)(0) = -\frac{1}{n}\mathcal{B}_{1/n}(u)(0)$ であることも分かる. さらに $k_n' \in L^1(0,T)$ と $u \in D(\mathcal{A}) \subset C([0,T];H)$ より

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}_{1/n}(u)(t)\|_H &\le k_n(0)\|u(t)\|_H + \int_0^t |k_n'(t-s)|\|u(s)\|_H \,\mathrm{d}s \\ &\le k_n(0)\|u(t)\|_H + \sup_{\tau\in[0,t]}\|u(\tau)\|_H \int_0^t |k_n'(\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma \to 0\end{aligned}$$

as $t \to 0_+$ が成り立つ. よって $\mathcal{B}_{1/n}(u)(0) = 0$ なので $u_n(0) = 0$ である. 以上より $u \in D(\mathcal{A})$ ならば $\mathcal{J}_{1/n}u = u_n \in D(\mathcal{A})$ が成り立つ.

次に以下を示そう.

$$\big(\mathcal{A}(u), \mathcal{B}_{1/n}(u)\big)_{\mathcal{H}} \ge 0 \quad \text{for all } \ u \in D(\mathcal{A}) \ \text{ and } \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

実際, $u \in D(\mathcal{A})$ ならば $\mathcal{J}_{1/n}u \in D(\mathcal{A})$ なので, 以下が成立する.

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{A}(u), \mathcal{B}_{1/n}(u)\big)_{\mathcal{H}} &= \big(\mathcal{A}(\mathcal{J}_{1/n}u), \mathcal{B}_{1/n}(u)\big)_{\mathcal{H}} + \big(\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(\mathcal{J}_{1/n}u), \mathcal{B}_{1/n}(u)\big)_{\mathcal{H}} \\ &= \big(\mathcal{A}(\mathcal{J}_{1/n}u), \mathcal{B}(\mathcal{J}_{1/n}u)\big)_{\mathcal{H}} + n\big(\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(\mathcal{J}_{1/n}u), u - \mathcal{J}_{1/n}u\big)_{\mathcal{H}} \overset{(4.3)}{\ge} 0.\end{aligned}$$

ここで $\mathcal{B}_{1/n}(u) = \mathcal{B}(\mathcal{J}_{1/n}u)$ および $\mathcal{A}$ の単調性を用いた. 従って (4.5) が従う.

これで準備が整ったのでいよいよ $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ の極大単調性の証明に進もう. 単調作用素の和 $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ が単調になることは明らかなので, ここでは $I + \mathcal{A} + \mathcal{B}$ が $\mathcal{H}$ 上で全射になることを示せば十分である. まず吉田近似 $\mathcal{B}_{1/n} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は単調かつリプシッツ連続になるので, 補遺 §A.1 の命題 35 より和 $\mathcal{A} + \mathcal{B}_{1/n} : D(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$ は極大単調である. よって任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して, ある $u_n \in D(\mathcal{A})$ が存在して

$$u_n + \mathcal{A}(u_n) + \mathcal{B}_{1/n}(u_n) = f \ \text{ in } \mathcal{H} \tag{4.6}$$

が成り立つ. 上式の両辺と u_n の内積をとり, さらに $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の単調性を用いると

$$\|u_n\|_{\mathcal{H}} \le \|f\|_{\mathcal{H}}$$

が従うので, 部分列をとることで

$$u_n \to u \quad \text{weakly in } \mathcal{H}$$

が成り立つ. 次に (4.6) の両辺と $\mathcal{A}(u_n)$ の内積をとると

$$(u_n, \mathcal{A}(u_n))_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{A}(u_n)\|_{\mathcal{H}}^2 + \big(\mathcal{B}_{1/n}(u_n), \mathcal{A}(u_n)\big)_{\mathcal{H}} = (f, \mathcal{A}(u_n))_{\mathcal{H}}$$

を得る. よって (4.5) から

$$\|\mathcal{A}(u_n)\|_{\mathcal{H}} \le \|f\|_{\mathcal{H}}.$$

さらに (4.6) の両辺と $\mathcal{B}_{1/n}(u_n)$ の内積をとると, 同様にして (4.5) から

$$\|\mathcal{B}_{1/n}(u_n)\|_{\mathcal{H}} \le \|f\|_{\mathcal{H}}.$$

従って, $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は $\mathcal{H}$ 上で弱閉 (∵ 極大単調作用素の demiclosedness および Mazur の定理) なので, 次の弱収束が従う.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u_n) &\to \mathcal{A}(u) \quad \text{weakly in } \mathcal{H}, \\ \mathcal{J}_{1/n}u_n &\to u \quad \text{weakly in } \mathcal{H}, \\ \mathcal{B}_{1/n}(u_n) &\to \mathcal{B}(u) \quad \text{weakly in } \mathcal{H}. \end{aligned}$$

実際, 2 つ目は $\mathcal{J}_{1/n}u_n = u_n - (1/n)\mathcal{B}_{1/n}(u_n)$ と $(\mathcal{B}_{1/n}(u_n))$ の有界性から, 3 つ目は $\mathcal{B}_{1/n}(u_n) = \mathcal{B}(\mathcal{J}_{1/n}u_n)$ から従う. よって極限 u は $u + \mathcal{A}(u) + \mathcal{B}(u) = f$ を満たす. 以上より $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ は $\mathcal{H}$ 上で極大単調であることが示された. □

定理 15 の証明の冒頭で (4.3) を示したが, この不等式を補題 14 を用いて精密化することによって次の系が得られる. この系はア・プリオリ評価を導出する際に有用である.

系 16 (エネルギー不等式)

仮定 **(H)** を仮定する. 任意の $u \in D(\mathcal{A})$ に対して, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} &\int_s^t (\mathcal{A}(u)(\tau), \mathcal{B}(u)(\tau))_H \, \mathrm{d}\tau \\ &\qquad \ge \frac{1}{2}\left(\ell * \|\mathcal{B}(u)(\cdot)\|_H^2\right)(t) - \frac{1}{2}\left(\ell * \|\mathcal{B}(u)(\cdot)\|_H^2\right)(s) + \frac{1}{2}\int_s^t \ell(\tau)\|\mathcal{B}(u)(\tau)\|_H^2 \, \mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{4.7}$$

for a.e. $s, t \in (0,T)$ with $s < t$. 特に $\ell(\cdot)\|\mathcal{B}(u)(\cdot)\|_H^2$ は $(0,T)$ 上で可積分である. さらに任意の $u \in D(\mathcal{A})$ に対して, 以下が成り立つ:

$$\int_0^t (\mathcal{A}(u)(\tau), \mathcal{B}(u)(\tau))_H \, \mathrm{d}\tau \ge \frac{1}{2}\left(\ell * \|\mathcal{B}(u)(\cdot)\|_H^2\right)(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \ell(\tau)\|\mathcal{B}(u)(\tau)\|_H^2 \, \mathrm{d}\tau \tag{4.8}$$

for all $t \in (0,T]$. また, 任意の $u \in D(\mathcal{A})$ に対して, 関数 $t \mapsto (\ell * \|\mathcal{B}(u)(\cdot)\|_H^2)(t)$ は $(0,T)$ 上ほとんどいたるところで微分可能であり, それゆえ, 次が成り立つ:

$$(\mathcal{A}(u)(t), \mathcal{B}(u)(t))_H \ge \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ell * \|\mathcal{B}(u)(\cdot)\|_H^2\right)(t) + \frac{1}{2}\ell(t)\|\mathcal{B}(u)(t)\|_H^2 \tag{4.9}$$

for a.e. $t \in (0,T)$.

証明. 定理 15 の証明の冒頭で (4.3) を示した際に, $u \in D(\mathcal{A})$ ならば $v = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(k * u) \in D(\mathcal{B}_\ell)$ かつ $\mathcal{A}(u) = \mathcal{B}_\ell(v)$ となることを確認した. ただし $\mathcal{B}_\ell$ は定義 10 に現れる積分核 k を ℓ で置き換えたもので定義される非局所微分作用素である. 仮定 **(H)** と定理 11 より, ある $\ell_n \in W^{1,1}(0,T)$ が存在して

$$(\mathcal{B}_\ell)_{1/n}(v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ell_n * v) \quad \text{かつ} \quad \ell_n \to \ell \quad \text{strongly in } L^1(0,T)$$

が成り立つ. ただし $(\mathcal{B}_\ell)_{1/n}$ は $\mathcal{B}_\ell$ の吉田近似を表す. 補題 14 より

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}(u)(t),\mathcal{B}(u)(t))_H &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ell*v)(t),v(t)\right)_H \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ell_n*v)(t),v(t)\right)_H + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ell*v)(t)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ell_n*v)(t),v(t)\right)_H \\ &\geq \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ell_n*\|v\|_H^2\right)(t)+\frac{1}{2}\ell_n(t)\|v(t)\|_H^2+h_n(t) \qquad (4.10)\end{aligned}$$

が従う. ここで $h_n\in L^1(0,T)$ は以下のように与えられる.

$$h_n(t):=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ell*v)(t)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ell_n*v)(t),v(t)\right)_H\to 0 \quad \text{strongly in } L^1(0,T).$$

実際, $\mathcal{B}_\ell$ は $\mathcal{H}$ 上の (線形) 極大単調作用素なので, 任意の $v\in D(\mathcal{B}_\ell)$ に対して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ell_n*v)=(\mathcal{B}_\ell)_{1/n}(v)\to\mathcal{B}_\ell(v)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ell*v) \quad \text{strongly in } \mathcal{H}$$

が成り立つ. 従って, $h_n\to 0$ strongly in $L^1(0,T)$ となる. 不等式 (4.10) の両辺を (s,t), $0<s<t<T$, 上で積分すれば

$$\begin{aligned}&\int_s^t(\mathcal{A}(u)(\tau),\mathcal{B}(u)(\tau))_H\,\mathrm{d}\tau \\ &\quad\geq\frac{1}{2}\left(\ell_n*\|\mathcal{B}(u)(\cdot)\|_H^2\right)(t)-\frac{1}{2}\left(\ell_n*\|\mathcal{B}(u)(\cdot)\|_H^2\right)(s)+\frac{1}{2}\int_s^t\ell_n(\tau)\|\mathcal{B}(u)(\tau)\|_H^2\,\mathrm{d}\tau \\ &\qquad-\int_0^T|h_n(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

が従う. ここで $s=0$ の場合は $\left(\ell_n*\|\mathcal{B}(u)(\cdot)\|_H^2\right)(0)=0$ であることに注意する. さらに $\ell_n\to\ell$ strongly in $L^1(0,T)$ および $\mathcal{B}(u)\in D(\mathcal{B}_\ell)\subset L^2(0,T;H)$ より, ファトウの補題を用いることで $\ell(\cdot)\|\mathcal{B}(u)(\cdot)\|_H^2\in L^1(0,T)$ と次の不等式が成立する:

$$\begin{aligned}&\int_s^t(\mathcal{A}(u)(\tau),\mathcal{B}(u)(\tau))_H\,\mathrm{d}\tau \\ &\quad\geq\frac{1}{2}\left(\ell*\|\mathcal{B}(u)(\cdot)\|_H^2\right)(t)-\frac{1}{2}\left(\ell*\|\mathcal{B}(u)(\cdot)\|_H^2\right)(s)+\frac{1}{2}\int_s^t\ell(\tau)\|\mathcal{B}(u)(\tau)\|_H^2\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

for a.e. $0<s<t<T$ (ただし $s=0$ ならば, 右辺第 2 項は無視できる). 以上より関数 $t\mapsto(\ell*\|\mathcal{B}(u)(\cdot)\|_H^2)(t)$ は $(0,T)$ 上ほとんどいたるところで微分可能である. 従って両辺を $t-s>0$ で割り, 極限移行 $s\to t-0$ を行えば, (4.9) がほとんどすべての $t\in(0,T)$ に対して成り立つことが分かる. □

4.3 非整数階連鎖律不等式の積分形

以下では, 非整数階微分に対する連鎖律不等式について述べる. 非整数階微分の場合, 通常の連鎖律公式は成立しない. しかし, ここまでの結果を組み合わせることで, 凸汎関数に対しては連鎖律不等式の積分形式を得ることができる ([2] 参照).

以下, 仮定 **(H)** を満たす積分核 k に対して定義される非局所微分作用素 $\mathcal{B}$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}=L^2(0,T;H)$ 上で考える. さらに $\psi:H\to(-\infty,\infty]$ は適正下半連続凸汎関数とする. また $u\in L^2(0,T;H)$ と $u_0\in D(\psi)$ に対して, $u-u_0\in D(\mathcal{B})$ および $u(t)\in D(\partial\psi)$ for a.e. $t\in(0,T)$ が成り立つとし, ある $\xi\in L^2(0,T;H)$ が存在して, $\xi(t)\in\partial\psi(u(t))$ for a.e. $t\in(0,T)$ が成り立つ

と仮定する. 定理 11 で述べたように, 極大単調作用素 $\mathcal{B}$ の吉田近似を $\mathcal{B}_n$, それに対応する積分核を $k_n \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ とする. この積分核 $k_n \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ に命題 13 を適用すると, ほとんどすべての $t \in (0,T)$ に対して

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k*(u-u_0)](t), g\right)_H &= (\mathcal{B}(u-u_0)(t), g)_H \\ &= \left(\mathcal{B}_{1/n}(u-u_0)(t), g\right)_H + \left(\mathcal{B}(u-u_0)(t) - \mathcal{B}_{1/n}(u-u_0)(t), g\right)_H \\ &\geq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_n * \left(\psi(u(\cdot)) - \psi(u_0)\right)\right](t) \\ &\quad + \left(\mathcal{B}(u-u_0)(t) - \mathcal{B}_{1/n}(u-u_0)(t), g\right)_H \quad \forall g \in \partial\psi(u(t))\end{aligned}$$

が成り立つ. さらに $g = \xi(t)$ として, 両辺を (s,t) 上で積分すると

$$\begin{aligned}&\int_s^t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k*(u-u_0)](\tau), \xi(\tau)\right)_H \mathrm{d}\tau \\ &\quad \geq \left[k_n * \left(\psi(u(\cdot)) - \psi(u_0)\right)\right](t) - \left[k_n * \left(\psi(u(\cdot)) - \psi(u_0)\right)\right](s) \\ &\qquad - \left\|\mathcal{B}(u-u_0) - \mathcal{B}_{1/n}(u-u_0)\right\|_{\mathcal{H}} \|\xi\|_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

for $0 \leq s \leq t \leq T$. さらに $n \to \infty$ とすると, 吉田近似の性質より $\mathcal{B}_{1/n}(u-u_0) \to \mathcal{B}(u-u_0)$ in $\mathcal{H}$ となるので, (部分列をとれば) $\mathcal{B}_{1/n}(u-u_0)(t) \to \mathcal{B}(u-u_0)(t)$ in H for a.e. $t \in (0,T)$ が従うため, 次の**非整数階微分に対する連鎖律不等式**の積分形を得る.

$$\begin{aligned}&\int_s^t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k*(u-u_0)](\tau), \xi(\tau)\right)_H \mathrm{d}\tau \\ &\quad \geq \left[k * \left(\psi(u(\cdot)) - \psi(u_0)\right)\right](t) - \left[k * \left(\psi(u(\cdot)) - \psi(u_0)\right)\right](s)\end{aligned}$$

for a.e. $0 \leq s \leq t \leq T$.

命題 17 (非整数階微分に対する連鎖律不等式の積分形)

汎関数 $\psi : H \to (-\infty, \infty]$ は適正下半連続凸であるとする. また $u \in L^2(0,T;H)$ と $u_0 \in D(\psi)$ に対して, $u - u_0 \in D(\mathcal{B})$ および $u(t) \in D(\partial\psi)$ for a.e. $t \in (0,T)$ が成り立つとし, さらにある $\xi \in L^2(0,T;H)$ が存在して, $\xi(t) \in \partial\psi(u(t))$ for a.e. $t \in (0,T)$ が成り立つとする. このとき, 次の不等式が成立する.

$$\begin{aligned}&\int_s^t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k*(u-u_0)](\tau), \xi(\tau)\right)_H \mathrm{d}\tau \\ &\quad \geq \left[k * \left(\psi(u(\cdot)) - \psi(u_0)\right)\right](t) - \left[k * \left(\psi(u(\cdot)) - \psi(u_0)\right)\right](s)\end{aligned}$$

for a.e. $0 \leq s \leq t \leq T$.

5　非整数階時間微分を伴う勾配流方程式

5.1　設定と主定理

本節では実ヒルベルト空間 H における次の非線形発展方程式の初期値問題 (コーシー問題) について考察する. ただし, $\varphi : H \to [0, +\infty]$ は適正下半連続凸汎関数とし,[21] 積分核 k は仮定 **(H)** を満たすものとする.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * (u - u_0)\right](t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t) \ \text{ in } H, \quad 0 < t < T. \tag{5.1}$$

ただし $T \in (0, \infty]$ とし, $u_0 \in H$ と $f \in L^2(0, T; H)$ は与えられたデータである. ここで (5.1) には初期値 u_0 が組み込まれているが, 以下に述べるように (5.1) には初期条件も組み込まれていることが分かる. よって (5.1) はコーシー問題と呼ぶべきだろう. コーシー問題 (5.1) の強解は次のように定義される.

定義 18 (コーシー問題 (5.1) の強解)

定数 $T \in (0, \infty)$ に対して, 関数 $u \in L^2(0, T; H)$ が次の条件をすべて満たすとき, u を $[0, T]$ におけるコーシー問題 (5.1) の**強解 (strong solution)** と呼ぶ.

(i) 次の条件が成り立つ.

$$k * (u - u_0) \in W^{1,2}(0, T; H), \quad \left[k * (u - u_0)\right](0) = 0,$$
$$u(t) \in D(\partial\varphi) \ \text{ for a.e. } t \in (0, T).$$

(ii) ある関数 $\xi \in L^2(0, T; H)$ が存在して, 以下が成り立つ.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * (u - u_0)\right](t) + \xi(t) = f(t) \ \text{ かつ } \ \xi(t) \in \partial\varphi(u(t)) \ \text{ in } H \tag{5.2}$$

for a.e. $t \in (0, T)$.

また $T = \infty$ に対して, 関数 $u \in L^2_{\mathrm{loc}}([0, \infty); H)$ が $[0, \infty)$ におけるコーシー問題 (5.1) の強解になるとは, 任意の $S \in (0, \infty)$ に対して u の制限 $u|_{[0,S]}$ が $[0, S]$ における (5.1) の強解になることを意味する.

注意 8.　(i) 強解の定義より

$$k * \|u - u_0\|_H^2 \in L^\infty(0, T), \quad k\|u - u_0\|_H^2 \in L^1(0, T) \tag{5.3}$$

であることも分かる. さらに劣微分作用素の定義より

$$\varphi(u(\cdot)) \in L^1(0, T)$$

が成り立つことも分かる.

[21] 本節では簡略化のため非負の汎関数 φ のみを考えるが, 非負であることは本質的ではない. 実際, ハーン・バナッハの定理より, 任意の適正下半連続凸汎関数 $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ は下からアフィン関数でおさえることができる. すなわち, ある定数 $k \in \mathbb{R}$ と $v_* \in H$ が存在して

$$\forall u \in H, \quad \varphi(u) \geq (v_*, u)_H - k$$

が成り立つ. ここで $\tilde{\varphi}(u) := \varphi(u) - (v_*, u)_H + k \geq 0$ とおくと, $\partial\tilde{\varphi}(u) = \partial\varphi(u) - v_*$ なので, (5.1) を $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)[k * (u - u_0)] + \partial\tilde{\varphi}(u) \ni \tilde{f} := f - v_*$ と書き換えることができる.

(ii) (5.2) の両辺と ℓ の合成積をとることで

$$u-u_0=\ell*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(u-u_0)\right]\right)=\ell*(f-\xi)$$

が成り立つため, $f-\xi\in L^2(0,T;H)$ より, 特に k がリーマン・リュービル核 k_β (すなわち $\ell=k_{1-\beta}\in L^{1/(1-\beta),\infty}(0,\infty)$) のとき, 命題 1 の (ii) より, 次が成り立つことも分かる.

$$u\in\begin{cases}L^{\frac{2}{1-2\beta}}(0,T;H) & \text{if } \beta\in(0,1/2),\\ \bigcap_{p<+\infty}L^p(0,T;H) & \text{if } \beta=1/2.\end{cases}\tag{5.4}$$

また $\beta>1/2$ の場合, 後述の命題 20 より $u\in C([0,T];H)$ となることが分かる.

本節の主結果は以下のとおりである.

定理 19 (コーシー問題 (5.1) の適切性)

積分核 k が仮定 **(H)** を満たすと仮定する. また $T\in(0,\infty)$ とする.

(i) データ $(u_{0,1},f_1),(u_{0,2},f_2)\in H\times L^2(0,T;H)$ に対するコーシー問題 (5.1) の強解をそれぞれ u_1 と u_2 とする. このとき $w:=u_1-u_2$ と $w_0:=u_{0,1}-u_{0,2}$ は以下を満たす:

$$\int_0^T\|w(t)-w_0\|_H^2\,\mathrm{d}t\le C\left(\|f_1-f_2\|_{L^2(0,T;H)}^2+\|w_0\|_H^2\right).\tag{5.5}$$

ただし, C は $\|k\|_{L^1(0,T)}$ と $\|\ell\|_{L^1(0,T)}$ のみに依存する定数を表す. このようにコーシー問題 (5.1) の強解は与えられたデータ u_0, f に連続依存する. よってコーシー問題 (5.1) の強解は一意的である.

(ii) 任意の $f\in L^2(0,T;H)$ と $u_0\in D(\varphi)$ に対して, コーシー問題 (5.1) はただ一つの強解 $u\in L^2(0,T;H)$ を持つ. さらに $\mathcal{F}(0)=0$ および以下を満たすような非増加関数 $\mathcal{F}:[0,T]\to(-\infty,0]$ が存在する:

$$\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(u-u_0)\right](t)\right\|_H^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}(t)\le0\quad\text{for a.e. } t\in(0,T)\tag{5.6}$$

および

$$\mathcal{F}(t)=\left[k*\left(\varphi(u(\cdot))-\varphi(u_0)\right)\right](t)-\int_0^t\left(f(\tau),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(u-u_0)\right](\tau)\right)_H\mathrm{d}\tau\tag{5.7}$$

for a.e. $t\in(0,T)$.

(iii) 加えて $f\in W^{1,2}(0,T;H)$ であるとき, 以下が成立する:

$$u\in L^\infty(0,T;H),\quad \ell*\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k*(u-u_0)](\cdot)\right\|_H^2\in L^\infty(0,T),\quad \varphi(u(\cdot))\in L^\infty(0,T).\tag{5.8}$$

さらに次のエネルギー不等式も成立する:

$$\begin{aligned}&\frac12\left(\ell*\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k*(u-u_0)](\cdot)\right\|_H^2\right)(t)+\varphi(u(t))\\&\qquad\le\varphi(u_0)+(f(t),u(t))_H-(f(0),u_0)_H-\int_0^t\left(f'(\tau),u(\tau)\right)_H\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{5.9}$$

for a.e. $t\in(0,T)$. また (5.7) はすべての $t\in[0,T]$ に対して成立する.

注意 9. (i) 強解の正則性 (5.8) およびエネルギー不等式 (5.9) は強解の定義 18 から直ちに従うものではない. 実際, これらの情報は方程式 (5.1) に解の導関数 u' を形式的にかけることで得られるが, (5.1) に解の 1 階導関数自体は現れないため, (非線形である発展方程式 (5.1) の) 強解の自明な正則性ではない.

(ii) 特に $f \equiv 0$ の場合, エネルギー不等式 (5.6) から関数 $t \mapsto \mathcal{F}(t) = \Big[k * \big(\varphi(u(\cdot)) - \varphi(u_0)\big)\Big](t)$ が $[0,T]$ 上で非増加になることが分かる. また $k = k_\beta$ がリーマン・リュービル核のとき, エネルギー不等式 (5.6) は (正則性が不足しているので形式的に)

$$\left\|\partial_t^\beta (u - u_0)\right\|_H^2 + \partial_t^\beta \big[\varphi(u(\cdot)) - \varphi(u_0)\big] \le 0 \quad \text{for} \ \ t > 0$$

と見なすことができる. しかし, この事実から関数 $t \mapsto \varphi(u(t))$ の非増加性が直ちに従うわけでは無い点に注意する. 実際, 非整数階導関数の符号が定まっていても, 関数が単調にならない例が知られている (例えば [36, Example 2.1] 参照). 一方, 上で述べたように関数 $t \mapsto \mathcal{F}(t)$ の単調性は担保されている.

(iii) 古典的な勾配流の場合 (すなわち非局所微分作用素を通常の 1 階微分作用素に置き換えた場合), 次の非拡張性評価が知られている.

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_H \le \|u_{0,1} - u_{0,2}\|_H + \int_0^t \|f_1(\tau) - f_2(\tau)\|_H \,\mathrm{d}\tau \quad \text{for all} \ \ t > 0.$$

この事実から凸汎関数に対する (古典的な) 勾配流が縮小半群を生成することが分かる (例えば [22, Lemma 3.1] 参照). 以下に述べる系 21 は非整数階勾配流に関する対応物と理解することができるだろう.

(iv) 定理 19 より, コーシー問題 (5.1) は $[0,\infty)$ 上の強解 $u \in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty); H)$ を持つことが分かる. 実際, 任意の $S \in (0,\infty)$ に対して, (5.1) は $[0,S]$ 上の強解 u_S を持つ. また $S' \in (0,S)$ に対して $u_S|_{[0,S']}$ は $[0,S']$ における (5.1) の強解になることも分かるので, 強解の一意性から $u_S|_{[0,S']} = u_{S'}$ が成立する. 従って, 任意の $t \in [0,\infty)$ に対して $u(t) := u_{t+1}(t)$ とおくと, $u \in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty); H)$ が well-defined であることが分かり, さらに定義より u は $[0,\infty)$ における (5.1) の強解になる.

次の命題では $\ell \in L^2(0,T)$ の下で初期条件 $u(0) = u_0$ が古典的な意味で成立することが保証される. 特に $k = k_\beta = t^{-\beta}/\Gamma(1-\beta)$ がリーマン・リュービル核であるとき, $\ell_\beta = t^{\beta-1}/\Gamma(\beta) \in L^2(0,T)$ は $\beta > 1/2$ を要請する.

命題 20 (初期条件について)

積分核 k が仮定 **(H)** を満たすとする. さらに $\ell \in L^2(0,T)$ を仮定する. このとき, 任意の $f \in L^2(0,T;H)$ および $u_0 \in D(\varphi)$ に対して, (5.1) の強解は連続な表現 $u \in C([0,T]; H)$ を持ち, さらに

$$u(t) \to u_0 \quad \text{strongly in } H \ \ \text{as} \ \ t \to 0_+$$

が成立する. すなわち, 初期条件 $u(0) = u_0$ が古典的な意味で成立する.

証明. 方程式 (5.2) の両辺と ℓ の合成積をとると

$$\left(\ell * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * (u - u_0)\right]\right)(t) + \left[\ell * (\xi - f)\right](t) = 0, \quad \xi(t) \in \partial\varphi(u(t))$$

for a.e. $t \in (0,T)$. 強解の定義より $[k * (u - u_0)](0) = 0$ なので

$$\ell * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * (u - u_0)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\ell * k * (u - u_0)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[1 * (u - u_0)\right] = u - u_0$$

for a.e. $t \in (0,T)$. よって $\ell \in L^2(0,T)$ および $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)[k*(u-u_0)] \in L^2(0,T;H)$ なので, $u-u_0$ が連続代表元を持つ, すなわち $u-u_0 \in C([0,T];H)$ と見なせる (命題 12 参照). こうして任意の $t \in [0,T]$ に対して

$$\begin{aligned}\|u(t)-u_0\|_H &= \|[\ell*(\xi-f)](t)\|_H \\ &\le \int_0^t \ell(s)\|\xi(t-s)-f(t-s)\|_H \,\mathrm{d}s \le \|\ell\|_{L^2(0,t)}\|\xi-f\|_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

が成立する. 従って, 以下が成立する: $u(t) \to u_0$ strongly in H as $t \to 0_+$. □

次の系は [27] と同様に示すことができる.[22]

系 21 (解作用素の非拡張性 (cf. [6, Corollary 2.7]))

積分核 k が条件 **(H)** を満たすとする. また $i=1,2$ に対して, データ $u_{0,i}$ と f_i が定理 19 の (ii) の u_0, f に関する仮定を満たすものとする. またそれらに対応するコーシー問題 (5.1) の強解を u_i で表す. このとき, 以下が成立する:

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_H \le \|u_{0,1}-u_{0,2}\|_H + \big(\ell * \|f_1-f_2\|_H\big)(t) \tag{5.10}$$

for a.e. $t \in (0,T)$. 特に $\ell \in L^2(0,T)$ のとき, 任意の $t \in [0,T]$ に対してコーシー問題 (5.1) は H 上で非拡張的な作用素 $S(t): D(\varphi) \to D(\varphi)$, $u_0 \mapsto u(t)$ を生成する. ただし $u \in C([0,T];H)$ は初期値 u_0 に対する (5.1) の強解を表すものとする.

5.2 解のデータに対する連続依存性と一意性

本小節では定理 19 の (i) を証明する. 任意の $f_1, f_2 \in L^2(0,T;H)$ と $u_{0,1}, u_{0,2} \in H$ に対して, 定義 18 によって定義されるコーシー問題 (5.1) の強解をそれぞれ $u_1, u_2 \in L^2(0,T;H)$ として考える. そして $w := u_1 - u_2$ と $w_0 := u_{0,1} - u_{0,2}$ とおく. すると $w - w_0 \in D(\mathcal{B})$ が成り立つ. よって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(w-w_0)\right](t) + \partial\varphi(u_1(t)) - \partial\varphi(u_2(t)) \ni f_1(t) - f_2(t) \ \text{ in } H$$

for a.e. $t \in (0,T)$. 両辺と w の内積をとり, 劣微分作用素 $\partial\varphi$ の単調性を用いると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(k_n * \|w-w_0\|_H^2\right)(t) \\ &\quad\le (f_1(t)-f_2(t), w(t))_H - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(k-k_n)*(w-w_0)\right](t), w(t)-w_0\right)_H \\ &\qquad - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(w-w_0)\right](t), w_0\right)_H\end{aligned}$$

for a.e. $t \in (0,T)$. さらに両辺を $(0,t)$ 上で積分すると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(k_n * \|w-w_0\|_H^2\right)(t) \\ &\quad\le \int_0^t \|f_1(\tau)-f_2(\tau)\|_H\|w(\tau)-w_0\|_H \,\mathrm{d}\tau + \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(k-k_n)*(w-w_0)\right]\right\|_{\mathcal{H}} \|w-w_0\|_{\mathcal{H}} \\ &\qquad - \left([k*(w-w_0)](t), w_0\right)_H + \|f_1-f_2\|_{L^1(0,t;H)}\|w_0\|_H\end{aligned}$$

[22] ただし ℓ の対数凸性の仮定は不要である. 実際, この仮定はレゾルベント核 r_λ と基本解 s_λ の非負値性を担保するために使われているが, それは仮定 **(H)** が成立するならば常に保証される (定理 9 参照).

for $t \in [0,T]$. ここで $[k*(w-w_0)](0)=0$ ($\because w-w_0 \in D(\mathcal{B})$) と $\left(k_n * \|w(\cdot)-w_0\|_H^2\right)(0)=0$ ($\because k_n \in W^{1,1}(0,T) \subset L^\infty(0,T)$ および $\|w(\cdot)-w_0\|_H^2 \in L^1(0,T)$) を用いた. さらに定理 11 と **(H)** より $k_n \to k$ strongly in $L^1(0,T)$ かつ $\mathcal{B}_{1/n}(w-w_0) \to \mathcal{B}(w-w_0)$ strongly in $\mathcal{H}$ ($\because w-w_0 \in D(\mathcal{B})$) なので, ファトウの補題より

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(k*\|w-w_0\|_H^2\right)(t)\\
&\quad\le \int_0^t \|f_1(\tau)-f_2(\tau)\|_H \|w(\tau)-w_0\|_H \,\mathrm{d}\tau + \|[k*(w-w_0)](t)\|_H \|w_0\|_H\\
&\qquad + \|f_1-f_2\|_{L^1(0,t;H)}\|w_0\|_H\\
&\quad\le \left(\int_0^t \|f_1(\tau)-f_2(\tau)\|_H^2 \,\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^t \|w(\tau)-w_0\|_H^2 \,\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}\\
&\qquad + \frac{1}{4}\left(k*\|w-w_0\|_H^2\right)(t) + \|k\|_{L^1(0,t)}\|w_0\|_H^2 + \|f_1-f_2\|_{L^1(0,t;H)}\|w_0\|_H
\end{aligned}$$

for a.e. $t \in (0,T)$. さらに両辺と ℓ の合成積をとると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8}\int_0^T \|w(t)-w_0\|_H^2 \,\mathrm{d}t \le{}& 2\|\ell\|_{L^1(0,T)}^2\|f_1-f_2\|_{\mathcal{H}}^2\\
&+ \|\ell\|_{L^1(0,T)}\left(\|k\|_{L^1(0,T)}\|w_0\|_H^2 + \|f_1-f_2\|_{L^1(0,T;H)}\|w_0\|_H\right).
\end{aligned}$$

従って (5.5) が成立する. 特に $u_{0,1}=u_{0,2}$ かつ $f_1=f_2$ とすれば

$$\int_0^T \|w(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t = 0$$

となり $w \equiv 0$, すなわち $u_1 \equiv u_2$ が従う. □

5.3 近似問題と解の構築

ここからしばらく, 定理 19 の (iii) の証明に取り組む. そのため

$$f \in W^{1,2}(0,T;H) \ \text{ かつ } \ u_0 \in D(\varphi) \tag{5.11}$$

を仮定しよう. また $\mathcal{H}=L^2(0,T;H)$ とし, 作用素 $\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ は §3.4 の定義に従い $X=H$, $p=2$ に対して定義された作用素とする.

各 $\lambda \in (0,1)$ に対して, 次の近似問題を考える.

$$\lambda\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(u_\lambda-u_0)\right](t) + \partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t)) = f(t) \ \text{ in } H, \quad 0<t<T, \quad u_\lambda(0)=u_0. \tag{5.12}$$

ただし $\varphi_\lambda : H \to [0,+\infty)$ は φ の Moreau–Yosida 正則化とする. つまり φ_λ は次のように定義される.

$$\varphi_\lambda(w) := \min_{z\in H}\left(\frac{1}{2\lambda}\|w-z\|_H^2 + \varphi(z)\right) \quad \text{for } \ w \in H.$$

上の定義に現れる最小値は $J_\lambda w$ (ただし $J_\lambda := (I+\lambda\partial\varphi)^{-1}$ は $\partial\varphi$ のレゾルベントである) によって到達する. さらに φ_λ は H 上でフレッシェ微分可能であり, その微分は $\partial\varphi$ の吉田近似と一致する (補遺 §A.1 参照). よって以下, $\partial\varphi_\lambda$ は φ_λ のフレッシェ微分および $\partial\varphi$ の吉田近似を表す. なお本節では $\varphi \ge 0$ としているので $\varphi_\lambda \ge 0$ も成り立つ.

また (5.12) は (強解の意味で) 次の方程式と同値である:

$$(\lambda\mathcal{A}+\mathcal{B})\,(u_\lambda-u_0)+\partial\Phi_\lambda(u_\lambda)=f \ \text{ in } \mathcal{H}, \quad u_\lambda-u_0\in D(\mathcal{A}). \tag{5.13}$$

ただし $\Phi_\lambda:\mathcal{H}\to[0,+\infty)$ は

$$\Phi_\lambda(w):=\int_0^T \varphi_\lambda(w(t))\,\mathrm{d}t \quad \text{for } \ w\in\mathcal{H}$$

によって定義される汎関数とする. ここで $u\in\mathcal{H}$ に対して $\partial\Phi_\lambda(u)=\partial\varphi_\lambda(u(\cdot))$ が成り立つことに注意する.

定理 15 で示したように, 和 $\lambda\mathcal{A}+\mathcal{B}$ は $\mathcal{H}$ 上で極大単調である. さらに作用素 $w\mapsto\partial\Phi_\lambda(w+u_0):\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ は (極大) 単調かつリプシッツ連続である (補遺 §A.1, §A.2 参照). 補遺 §A.1 の命題 35 より $\mathcal{T}:=\lambda\mathcal{A}+\mathcal{B}+\partial\Phi_\lambda(\,\cdot\,+u_0)$ は $\mathcal{H}$ 上の極大単調作用素であり, さらに $\mathcal{A}$ は $\mathcal{H}$ 上で強圧的になるので, 補遺 §A.1 の命題 36 より $\mathcal{T}$ は $\mathcal{H}$ 上で全射になる. 実際, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある定数 $C_\varepsilon>0$ が存在して

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|w(t)\|_H^2 &= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w(s)\|_H^2\,\mathrm{d}s\\
&= \int_0^t \big(w'(s),w(s)\big)_H\,\mathrm{d}s\\
&\le \varepsilon\int_0^T \|w(s)\|_H^2\,\mathrm{d}s + C_\varepsilon\int_0^T \|w'(s)\|_H^2\,\mathrm{d}s \quad \text{for all } \ w\in D(\mathcal{A})
\end{aligned}$$

が成立する. 両辺を $(0,T)$ 上で積分し, $\varepsilon>0$ を十分小さく選べば

$$\|w\|_{\mathcal{H}}^2=\int_0^T\|w(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t\le C\int_0^T\|w'(s)\|_H^2\,\mathrm{d}s=C\|\mathcal{A}(w)\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \text{for all } \ w\in D(\mathcal{A})$$

が従う. よって $\mathcal{A}$ は $\mathcal{H}$ 上で強圧的であることが分かる. さらに以下が成り立つ (途中の不等式で $(\mathcal{A}(w),\mathcal{B}(w))_{\mathcal{H}}\ge 0$ および相加相乗平均不等式を用いる):

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}(w)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \Big(\lambda\mathcal{A}(w)+\mathcal{B}(w)+\partial\Phi_\lambda(w+u_0),\lambda\mathcal{A}(w)+\mathcal{B}(w)+\partial\Phi_\lambda(w+u_0)\Big)_{\mathcal{H}}\\
&= \lambda^2\|\mathcal{A}(w)\|_{\mathcal{H}}^2+\|\mathcal{B}(w)\|_{\mathcal{H}}^2+\|\partial\Phi_\lambda(w+u_0)\|_{\mathcal{H}}^2\\
&\quad +2\lambda\Big(\mathcal{A}(w),\mathcal{B}(w)\Big)_{\mathcal{H}}+2\lambda\Big(\mathcal{A}(w),\partial\Phi_\lambda(w+u_0)\Big)_{\mathcal{H}}+2\Big(\mathcal{B}(w),\partial\Phi_\lambda(w+u_0)\Big)_{\mathcal{H}}\\
&\ge \lambda^2\|\mathcal{A}(w)\|_{\mathcal{H}}^2+\|\mathcal{B}(w)\|_{\mathcal{H}}^2+\|\partial\Phi_\lambda(w+u_0)\|_{\mathcal{H}}^2\\
&\quad +2\lambda\Big(\mathcal{A}(w),\partial\Phi_\lambda(w+u_0)\Big)_{\mathcal{H}}-2\|\mathcal{B}(w)\|_{\mathcal{H}}\|\partial\Phi_\lambda(w+u_0)\|_{\mathcal{H}}\\
&\ge \lambda^2\|\mathcal{A}(w)\|_{\mathcal{H}}^2+2\lambda\int_0^T\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t),\partial\varphi_\lambda(w(t)+u_0)\right)_H\mathrm{d}t\\
&= \lambda^2\|\mathcal{A}(w)\|_{\mathcal{H}}^2+2\lambda\left[\varphi_\lambda(w(T)+u_0)-\varphi_\lambda(u_0)\right]\\
&\ge \lambda^2\|\mathcal{A}(w)\|_{\mathcal{H}}^2-2\lambda\varphi_\lambda(u_0) \quad \text{for all } \ w\in D(\mathcal{A}).
\end{aligned}$$

最後の等式では標準的な連鎖律公式を用いた (実際, φ_λ はフレッシェ微分可能である). このように極大単調作用素 $\mathcal{T}$ は (命題 36 の意味で) $\mathcal{H}$ 上で強圧的である. 従って命題 36 より, $\mathcal{T}$ は $\mathcal{H}$ 上で全射になる. よって任意の $\lambda>0$ および $f\in\mathcal{H}$ に対して, ある $u_\lambda\in W^{1,2}(0,T;H)$ が存在して, $u_\lambda-u_0\in D(\mathcal{A})$ および (5.12) が成立する.

5.4 ア・プリオリ評価

本小節では近似解の族 $(u_\lambda)_{\lambda\in(0,1)}$ に対する一様評価を導出する. 以下, $v_0 \in D(\varphi) \neq \emptyset$ とする. 近似方程式 (5.12) の両辺と $u_\lambda - v_0 \in D(\mathcal{A})$ の内積をとると

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_\lambda(t)-u_0\|_H^2 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k*(u_\lambda-u_0)](t), u_\lambda(t)-u_0\right)_H + \varphi_\lambda(u_\lambda(t))\\ &\qquad \le \varphi_\lambda(v_0) + (f(t), u_\lambda(t)-v_0)_H + (\lambda\mathcal{A}(u_\lambda-u_0)+\mathcal{B}(u_\lambda-u_0), v_0-u_0)_H\,.\end{aligned}$$

よって, 補題 14 より

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k*(u_\lambda-u_0)](t), u_\lambda(t)-u_0\right)_H &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k_n*(u_\lambda-u_0)](t), u_\lambda(t)-u_0\right)_H + h_n(t)\\ &\ge \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(k_n*\|u_\lambda-u_0\|_H^2\right)(t) + h_n(t)\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし

$$h_n(t) := \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(k-k_n)*(u_\lambda-u_0)\right](t), u_\lambda(t)-u_0\right)_H$$

とする. ここで $k_n \to k$ strongly in $L^1(0,T)$ であり, また $t \mapsto \|u_\lambda(t)-u_0\|_H^2 \in W^{1,1}(0,T)$ となること, さらに $\|u_\lambda(0)-u_0\|_H^2 = 0$ であることを考慮すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k_n*\|u_\lambda-u_0\|_H^2) \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k*\|u_\lambda-u_0\|_H^2) \quad \text{strongly in } L^1(0,T)$$

が示される. さらに定理 15 の証明と同様にして

$$h_n \to 0 \quad \text{strongly in } L^1(0,T) \quad \text{as} \quad n \to +\infty$$

が示される. 従って $n\to\infty$ とすることで, 以下が成り立つ:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(u_\lambda-u_0)\right](t), u_\lambda(t)-u_0\right)_H \ge \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(k*\|u_\lambda-u_0\|_H^2\right)(t)$$

for a.e. $t\in(0,T)$. さらに

$$\begin{aligned}&(\lambda\mathcal{A}(u_\lambda-u_0)+\mathcal{B}(u_\lambda-u_0), v_0-u_0)_H\\ &\qquad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\lambda(u_\lambda(t)-u_0)+[k*(u_\lambda-u_0)](t), v_0-u_0\big)_H.\end{aligned}$$

以上の事実を組み合わせると

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_\lambda(t)-u_0\|_H^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(k*\|u_\lambda-u_0\|_H^2\right)(t) + \varphi_\lambda(u_\lambda(t))\\ &\qquad \le \varphi_\lambda(v_0) + (f(t), u_\lambda(t)-v_0)_H\\ &\qquad\quad + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\lambda(u_\lambda(t)-u_0)+[k*(u_\lambda-u_0)](t), v_0-u_0\big)_H \qquad (5.14)\end{aligned}$$

for a.e. $t\in(0,T)$. 不等式 (5.14) の両辺を $(0,t)$ 上で積分し, $\|u_\lambda(0)-u_0\|_H^2 = (k*\|u_\lambda-u_0\|_H^2)(0) = 0$ および $u_\lambda(0)-u_0 = [k*(u_\lambda-u_0)](0) = 0$ を用いることで, 以下が得られる:

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda}{2}\|u_\lambda(t)-u_0\|_H^2 + \frac{1}{2}\left(k*\|u_\lambda-u_0\|_H^2\right)(t) + \int_0^t \varphi_\lambda(u_\lambda(\tau))\,\mathrm{d}\tau\\ &\qquad \le T\varphi(v_0) + \int_0^t \|f(\tau)\|_H\|u_\lambda(\tau)-v_0\|_H\,\mathrm{d}\tau\\ &\qquad\quad + \big(\lambda(u_\lambda(t)-u_0)+[k*(u_\lambda-u_0)](t), v_0-u_0\big)_H \qquad (5.15)\end{aligned}$$

for all $t \in [0,T]$. さらに以下が成り立つことに注意する:

$$\begin{aligned}&\big(\lambda(u_\lambda(t)-u_0)+[k*(u_\lambda-u_0)](t), v_0-u_0\big)_H\\&\quad\le \frac{\lambda}{4}\|u_\lambda(t)-u_0\|_H^2+\frac{1}{4}\left(k*\|u_\lambda-u_0\|_H^2\right)(t)+\left(1+\|k\|_{L^1(0,T)}\right)\|v_0-u_0\|_H^2.\end{aligned}$$

従って

$$\frac{1}{4}\left(k*\|u_\lambda-u_0\|_H^2\right)(t)\le\int_0^t\|f(\tau)\|_H\|u_\lambda(\tau)-u_0\|_H\,\mathrm{d}\tau+C.$$

上の不等式の両辺と ℓ の合成積をとると

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int_0^T\|u_\lambda(t)-u_0\|_H^2\,\mathrm{d}t&\le\left(\ell*\int_0^t\|f(\tau)\|_H\|u_\lambda(\tau)-u_0\|_H\,\mathrm{d}\tau\right)(t)+C\\&\le\|\ell\|_{L^1(0,T)}\|f\|_{L^2(0,T;H)}\|u_\lambda-u_0\|_{L^2(0,T;H)}+C\end{aligned}$$

が得られるので

$$\frac{1}{8}\int_0^T\|u_\lambda(t)-u_0\|_H^2\,\mathrm{d}t\le 2\|\ell\|_{L^1(0,T)}^2\|f\|_{L^2(0,T;H)}^2+C$$

が従う. よって (5.15) を思い出すと

$$\begin{aligned}&\lambda\sup_{t\in[0,T]}\|u_\lambda(t)-u_0\|_H^2+\sup_{t\in[0,T]}\left(k*\|u_\lambda-u_0\|_H^2\right)(t)\\&\quad+\int_0^T\varphi_\lambda(u_\lambda(\tau))\,\mathrm{d}\tau+\int_0^T\|u_\lambda(\tau)-u_0\|_H^2\,\mathrm{d}\tau\le C.\end{aligned}\tag{5.16}$$

ただし C は T, $\|f\|_{\mathcal{H}}$, $\|k\|_{L^1(0,T)}$, $\|\ell\|_{L^1(0,T)}$, $\|u_0\|_H$, $\varphi(v_0)$, $\|v_0\|_H$ のみに依存する定数である (よって C は λ には依存しない).

次に近似方程式 (5.12) に $u_\lambda'(t)=\mathcal{A}(u_\lambda-u_0)(t)$ をかけ, その両辺を $(0,t)$ 上で積分する. 系 16 の (4.8) を用いると

$$\begin{aligned}&\lambda\int_0^t\|\mathcal{A}(u_\lambda-u_0)(\tau)\|_H^2\,\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2}\left(\ell*\|\mathcal{B}(u_\lambda-u_0)(\cdot)\|_H^2\right)(t)+\varphi_\lambda(u_\lambda(t))\\&\quad\le\varphi_\lambda(u_0)+\int_0^t\big(f(\tau),u_\lambda'(\tau)\big)_H\,\mathrm{d}\tau\\&\quad\le\varphi(u_0)+\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(f(\tau),u_\lambda(\tau)\right)_H\,\mathrm{d}\tau-\int_0^t\big(f'(\tau),u_\lambda(\tau)\big)_H\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{5.17}$$

for all $t\in[0,T]$. ここで劣微分作用素に対する (通常の) 連鎖律公式 ([22, Lemma 3.3] 参照) を用いると

$$(\partial\Phi_\lambda(u_\lambda)(t),\mathcal{A}(u_\lambda-u_0)(t))_H=\big(\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t)),u_\lambda'(t)\big)_H=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_\lambda(u_\lambda(t)).$$

さらに $u_\lambda-u_0\in D(\mathcal{A})\subset D(\mathcal{B})$ に注意すると

$$\begin{aligned}\|u_\lambda(t)-u_0\|_H&=\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\ell*k*(u_\lambda-u_0)\right](t)\right\|_H\\&=\left\|\int_0^t\ell(t-s)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k*(u_\lambda-u_0)]\right)(s)\,\mathrm{d}s\right\|_H\\&\le\|\ell\|_{L^1(0,t)}^{1/2}\sqrt{\left(\ell*\|\mathcal{B}(u_\lambda-u_0)(\cdot)\|_H^2\right)(t)}\end{aligned}$$

が成り立つので

$$\|\ell\|_{L^1(0,T)}^{-1}\|u_\lambda(t)-u_0\|_H^2\le\left(\ell*\|\mathcal{B}(u_\lambda-u_0)(\cdot)\|_H^2\right)(t)$$

を得る. 特に

$$\begin{aligned}
&\lambda\int_0^t \|\mathcal{A}(u_\lambda-u_0)(\tau)\|_H^2\,\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4}\|\ell\|_{L^1(0,T)}^{-1}\|u_\lambda(t)-u_0\|_H^2\\
&\qquad+\frac{1}{4}\left(\ell*\|\mathcal{B}(u_\lambda-u_0)(\cdot)\|_H^2\right)(t)+\varphi_\lambda(u_\lambda(t))\\
&\qquad\le\varphi(u_0)+(f(t),u_\lambda(t))_H-(f(0),u_0)_H-\int_0^t\left(f'(\tau),u_\lambda(\tau)\right)_H\,\mathrm{d}\tau\quad\forall t\in[0,T]
\end{aligned}$$

が成り立つ. よって (5.16) および $f\in W^{1,2}(0,T;H)\hookrightarrow C([0,T];H)$ を用いて, 少し計算すると以下が成立する:

$$\begin{aligned}
&\lambda\int_0^t \|\mathcal{A}(u_\lambda-u_0)(\tau)\|_H^2\,\mathrm{d}\tau+\|u_\lambda(t)-u_0\|_H^2\\
&\qquad+\left(\ell*\|\mathcal{B}(u_\lambda-u_0)(\cdot)\|_H^2\right)(t)+\varphi_\lambda(u_\lambda(t))\le C
\end{aligned}\tag{5.18}$$

for any $t\in[0,T]$. 上の不等式の両辺と k の合成積をとり, 仮定 $\ell*k=1$ を用いることで

$$\int_0^T\|\mathcal{B}(u_\lambda-u_0)(\tau)\|_H^2\,\mathrm{d}\tau\le C\tag{5.19}$$

が得られる. 最後に (5.12) の辺々を比較することで

$$\int_0^T\|\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(\tau))\|_H^2\,\mathrm{d}\tau=\|\partial\Phi_\lambda(u_\lambda)\|_{\mathcal{H}}^2\le C\tag{5.20}$$

が従う.

5.5 近似解の収束

前小節で得られた近似解の一様評価 (5.16), (5.18)–(5.20) から, $\lambda\to0$ の部分列を適切に選ぶことで以下の弱収束を得る (部分列も引き続き λ で表す):

$$\begin{aligned}
u_\lambda&\to u && \text{weakly in } \mathcal{H},\\
\partial\Phi_\lambda(u_\lambda)&\to\xi && \text{weakly in } \mathcal{H},\\
\lambda\mathcal{A}(u_\lambda-u_0)&\to0 && \text{strongly in } \mathcal{H},\\
\mathcal{B}(u_\lambda-u_0)&\to\mathcal{B}(u-u_0) && \text{weakly in } \mathcal{H}.
\end{aligned}\tag{5.21}$$

よって $\mathcal{B}(u-u_0)+\xi=f$ となる. ここで線形の極大単調作用素 $\mathcal{B}$ の $\mathcal{H}$ における弱閉性を用いて, $\mathcal{B}(u_\lambda-u_0)$ の弱極限が $\mathcal{B}(u-u_0)$ に特定される.

次に (u_λ) が $\mathcal{H}$ 上でコーシー列になることを示そう. 以下, u_λ と u_μ はそれぞれパラメータ λ と μ に対する近似方程式 (5.12) の強解とし, $w=u_\lambda-u_\mu\in D(\mathcal{A})$ とおく. このとき

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k*w)(t)+\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t))-\partial\varphi_\mu(u_\mu(t))=\mu u_\mu'(t)-\lambda u_\lambda'(t)$$

が成り立つ. 両辺と $w(t)$ の内積をとる. 少し単純な計算をすると

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k*w)(t),w(t)\right)_H&\le\left(\mu\|u_\mu'(t)\|_H+\lambda\|u_\lambda'(t)\|_H\right)\|w(t)\|_H\\
&\quad+\frac{\lambda+\mu}{4}\left(\|\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t))\|_H^2+\|\partial\varphi_\mu(u_\mu(t))\|_H^2\right)
\end{aligned}$$

が従う. さらに

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k*w)(t), w(t)\right)_H = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k_n*w)(t), w(t)\right)_H + \hat{h}_n$$
$$\geq \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(k_n * \|w\|_H^2\right)(t) + \hat{h}_n.$$

ただし

$$\hat{h}_n(\cdot) := \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(k-k_n)*w](\cdot), w(\cdot)\right)_H \to 0 \quad \text{strongly in } L^1(0,T).$$

さらに $\|w\|_H^2 \in W^{1,1}(0,T)$ と $\|w(0)\|_H^2 = 0$ より

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(k_n * \|w\|_H^2\right) \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(k * \|w\|_H^2\right) \quad \text{strongly in } L^1(0,T).$$

以上の事実より, $n \to \infty$ とすれば

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(k * \|w\|_H^2\right)(t) \leq \left(\mu\|u_\mu'(t)\|_H + \lambda\|u_\lambda'(t)\|_H\right)\|w(t)\|_H$$
$$+ \frac{\lambda+\mu}{4}\left(\|\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t))\|_H^2 + \|\partial\varphi_\mu(u_\mu(t))\|_H^2\right)$$

for a.e. $t \in (0,T)$. さらに両辺を $(0,t)$ 上で積分し, $(k*\|w\|_H^2)(0) = 0$ を用いると

$$\frac{1}{2}\left(k * \|w\|_H^2\right)(t) \leq \left(\mu\|u_\mu'\|_{\mathcal{H}} + \lambda\|u_\lambda'\|_{\mathcal{H}}\right)\|w\|_{\mathcal{H}}$$
$$+ \frac{\lambda+\mu}{4}\left(\|\partial\Phi_\lambda(u_\lambda)\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\partial\Phi_\mu(u_\mu)\|_{\mathcal{H}}^2\right) \text{ for all } t \in [0,T].$$

このことと仮定 **(H)**, (5.16), (5.18) そして (5.20) から

$$\|w\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\left(\sqrt{\mu}+\sqrt{\lambda}\right) + C(\lambda+\mu) \to 0$$

as $\lambda, \mu \to 0$. 従って (u_λ) は $\mathcal{H}$ 上でコーシー列をなす. 以上のことから

$$u_\lambda \to u \quad \text{strongly in } \mathcal{H} \tag{5.22}$$

が従い, さらに (5.20) より

$$J_\lambda u_\lambda \to u \quad \text{strongly in } \mathcal{H} \tag{5.23}$$

が成り立つ. 極大単調作用素 $\partial\Phi$ の demiclosedness (補題 31 参照) を用いれば

$$u \in D(\partial\Phi) \text{ かつ } \xi \in \partial\Phi(u)$$

が成り立つ. ここで $\Phi : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ は次のように定義される:

$$\Phi(w) = \begin{cases} \int_0^T \varphi(w(t))\,\mathrm{d}t & \text{if } \varphi(w(\cdot)) \in L^1(0,T), \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{for } w \in \mathcal{H}.$$

よって [22, Proposition 2.16] より

$$u(t) \in D(\partial\varphi) \text{ および } \xi(t) \in \partial\varphi(u(t)) \text{ for a.e. } t \in (0,T).$$

従って, 極限 u は次の発展方程式を満たす:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(u-u_0)\right](t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t) \text{ in } H, \quad 0 < t < T.$$

5.6 エネルギー不等式

本小節ではエネルギー不等式 (5.9) を示す. 前小節で得られた (5.22) および (5.23) より, ある (u_λ) の部分列 (記号はそのままとする) と $|(0,T)\setminus I|=0$ を満たす可測集合 $I\subset(0,T)$ が存在して

$$\begin{aligned} u_\lambda(t)&\to u(t) \quad \text{strongly in } H,\\ J_\lambda u_\lambda(t)&\to u(t) \quad \text{strongly in } H \end{aligned}$$

for all $t\in I$. 従って (5.17) より

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\ell * \|\mathcal{B}(u_\lambda-u_0)(\cdot)\|_H^2\right)(t)+\varphi_\lambda(u_\lambda(t))\\ &\quad\le \varphi(u_0)+(f(t),u_\lambda(t))_H-(f(0),u_0)_H-\int_0^t \left(f'(\tau),u_\lambda(\tau)\right)_H \mathrm{d}\tau\\ &\quad\to \varphi(u_0)+(f(t),u(t))_H-(f(0),u_0)_H-\int_0^t \left(f'(\tau),u(\tau)\right)_H \mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{5.24}$$

for all $t\in I$. よって φ の下半連続性より

$$\liminf_{\lambda\to0}\varphi_\lambda(u_\lambda(t))\ge\liminf_{\lambda\to0}\varphi(J_\lambda u_\lambda(t))\ge\varphi(u(t)) \quad \text{for all } \ t\in I$$

が従う. また, 左辺第 1 項は次のように下から評価できる:

$$\begin{aligned} \liminf_{\lambda\to0}\left(\ell * \|\mathcal{B}(u_\lambda-u_0)(\cdot)\|_H^2\right)(t)&=\liminf_{\lambda\to0}\int_0^t \ell(t-\tau)\|\mathcal{B}(u_\lambda-u_0)(\tau)\|_H^2\,\mathrm{d}\tau\\ &\ge\int_0^t \ell(t-\tau)\|\mathcal{B}(u-u_0)(\tau)\|_H^2\,\mathrm{d}\tau\\ &=\left(\ell * \|\mathcal{B}(u-u_0)(\cdot)\|_H^2\right)(t) \end{aligned} \tag{5.25}$$

for all $t\in I$. 実際, 各 $t\in I$ に対して, (5.24) から

$$\int_0^t \left\|\sqrt{\ell(t-\tau)}\,\mathcal{B}(u_\lambda-u_0)(\tau)\right\|_H^2\,\mathrm{d}\tau=\left(\ell * \|\mathcal{B}(u_\lambda-u_0)(\cdot)\|_H^2\right)(t)\le C$$

が従う. よって, ある部分列と $\zeta\in L^2(0,t;H)$ が存在して

$$\sqrt{\ell(t-\cdot)}\,\mathcal{B}(u_\lambda-u_0)\to\zeta \quad \text{weakly in } L^2(0,t;H)$$

が成り立つ. この弱極限 ζ を特定しよう. 任意の $z\in C_c^\infty((0,t);H)$ に対して, ある $\delta>0$ が存在して $\operatorname{supp} z\subset(\delta,t-\delta)$ および

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left(\sqrt{\ell(t-\tau)}\,\mathcal{B}(u_\lambda-u_0)(\tau),z(\tau)\right)_H\mathrm{d}\tau\\ &\quad=\int_\delta^{t-\delta}\left(\sqrt{\ell(t-\tau)}\,\mathcal{B}(u_\lambda-u_0)(\tau),z(\tau)\right)_H\mathrm{d}\tau\\ &\quad=\int_\delta^{t-\delta}\left(\mathcal{B}(u_\lambda-u_0)(\tau),\sqrt{\ell(t-\tau)}\,z(\tau)\right)_H\mathrm{d}\tau\\ &\quad\overset{(5.21)}{\to}\int_\delta^{t-\delta}\left(\mathcal{B}(u-u_0)(\tau),\sqrt{\ell(t-\tau)}\,z(\tau)\right)_H\mathrm{d}\tau\\ &\quad=\int_0^t\left(\sqrt{\ell(t-\tau)}\,\mathcal{B}(u-u_0)(\tau),z(\tau)\right)_H\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

が成立する. ここで任意の $\tau\in(\delta,t-\delta)$ に対して, $0<\ell(t-\tau)\le\ell(\delta)<+\infty$ が成り立つ. よって $\zeta=\sqrt{\ell(t-\cdot)}\,\mathcal{B}(u-u_0)$ であることが分かる. 従って, ノルムの弱下半連続性より (5.25) が得られる. これらの事実をまとめることで (5.9) が示される. また (5.18) と同様の議論を繰り返すことで, (5.8) を得る.

5.7 $f \in L^2(0,T;H)$ に対する解の存在

この小節では仮定 (5.11) をはずし, 任意の $f \in L^2(0,T;H)$ と $u_0 \in D(\varphi)$ に対して (5.1) の強解の存在とエネルギー不等式の導出を行う. まず, 以下を満たすような $W^{1,2}(0,T;H)$ 上の近似列 (f_n) を選ぶ:

$$f_n \to f \quad \text{strongly in } \mathcal{H}. \tag{5.26}$$

そして f を f_n で置き換えたコーシー問題 (5.1) に対する強解を u_n で表す. これまでの議論を繰り返すことで

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(k * \|u_n - u_0\|_H^2\right)(t) + \int_0^T \varphi(u_n(\tau))\,\mathrm{d}\tau + \int_0^T \|u_n(\tau) - u_0\|_H^2\,\mathrm{d}\tau \le C. \tag{5.27}$$

さらに (5.1) の両辺に $\mathcal{B}_{1/m}(u_n - u_0) = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)[k_m * (u_n - u_0)]$ をかけると, 命題 13 ($\because u_0 \in D(\varphi)$, $k_m' \le 0$, $k_m \ge 0$) より

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * (u_n - u_0)\right](t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_m * (u_n - u_0)\right](t)\right)_H + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_m * (\varphi(u_n(\cdot)) - \varphi(u_0))\right](t) \\ \le \left(f_n(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_m * (u_n - u_0)\right](t)\right)_H.\end{aligned} \tag{5.28}$$

ここで $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)[k_m * \varphi(u_0)](t) = k_m(t)\varphi(u_0)$ に注意する. 不等式 (5.28) の両辺を $(0,t)$ 上で積分すると

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * (u_n - u_0)\right](\tau), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_m * (u_n - u_0)\right](\tau)\right)_H \mathrm{d}\tau + \left[k_m * \varphi(u_n(\cdot))\right](t) \\ &\quad \le \int_0^t \left(f_n(\tau), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_m * (u_n - u_0)\right](\tau)\right)_H \mathrm{d}\tau + \varphi(u_0)\int_0^t k_m(\tau)\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

さらに $m \to +\infty$ とすると, $k_m \to k$ strongly in $L^1(0,T)$ なので

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * (u_n - u_0)\right](\tau)\right\|_H^2 \mathrm{d}\tau + \left[k * \varphi(u_n(\cdot))\right](t) \\ &\quad \le \int_0^t \left(f_n(\tau), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * (u_n - u_0)\right](\tau)\right)_H \mathrm{d}\tau + \varphi(u_0)\int_0^t k(\tau)\,\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{5.29}$$

for a.e. $t \in (0,T)$. ここでは以下の事実も用いている: $\mathcal{B}_{1/m}(u_n - u_0) \to \mathcal{B}(u_n - u_0)$ strongly in $\mathcal{H}$ および $k_m * \varphi(u_n(\cdot)) \to k * \varphi(u_n(\cdot))$ strongly in $C([0,T])$ as $m \to +\infty$ ($\because u_n - u_0 \in D(\mathcal{B})$ および $\varphi(u_n(\cdot)) \in L^\infty(0,T)$). さらに (5.1) の辺々を比較することで

$$\int_0^T \|\xi_n(\tau)\|_H^2\,\mathrm{d}\tau \le C.$$

ただし $\xi_n(t) \in \partial\varphi(u_n(t))$ である ((5.2) 参照). こうして

$$\begin{aligned} u_n &\to u && \text{weakly in } \mathcal{H}, \\ \mathcal{B}(u_n - u_0) &\to \mathcal{B}(u - u_0) && \text{weakly in } \mathcal{H}, \\ \xi_n &\to \xi && \text{weakly in } \mathcal{H}. \end{aligned}$$

よって (5.27) より $\varphi(u(\cdot)) \in L^1(0,T)$ が成り立つ. さらに (5.5) より

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{H}} \le C\|f_n - f_m\|_{\mathcal{H}} \to 0$$

as $n, m \to +\infty$. よって (u_n) は $\mathcal{H}$ 上でコーシー列をなすので, $\mathcal{H}$ の完備性より

$$u_n \to u \quad \text{strongly in } \mathcal{H}.$$

従って, 極大単調作用素 $\partial\Phi$ の demiclosedness より $u(t) \in D(\partial\varphi)$ および $\xi(t) \in \partial\varphi(u(t))$ がほとんどすべての $t \in (0,T)$ に対して成立する. 従って u は (5.1) の強解である.

最後にエネルギー不等式 (5.6), (5.7) を示す. 不等式 (5.28) の u_n と f_n をそれぞれ u と f に置き換えて, その両辺を (s,t) 上で積分すると, 関数

$$\mathcal{F}_m(t) := \Big[k_m * \big(\varphi(u(\cdot)) - \varphi(u_0)\big)\Big](t) - \int_0^t \big(f(\tau), \mathcal{B}_{1/m}(u-u_0)(\tau)\big)_H \, \mathrm{d}\tau$$

は非増加であり $\mathcal{F}_m(0) = 0$ を満たす. そこで Helly の選出定理を用いると, ある非増加関数 $\mathcal{F} : [0,T] \to [-\infty, 0]$ が存在して

$$\mathcal{F}_m(t) \to \mathcal{F}(t) \quad \text{for all } \ t \in [0,T]$$

が成り立つ. よって $\mathcal{F}$ は $(0,T)$ 上ほとんどいたるところで微分可能である. また

$$\int_s^t \|\mathcal{B}(u-u_0)(\tau)\|_H^2 \, \mathrm{d}\tau + \mathcal{F}(t) \le \mathcal{F}(s) \quad \text{for all } \ 0 \le s < t \le T$$

が成り立つ. さらに s, t の任意性より

$$\|\mathcal{B}(u-u_0)(t)\|_H^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}(t) \le 0 \quad \text{for a.e. } t \in (0,T).$$

一方, $\varphi(u(\cdot)) \in L^1(0,T)$ および $u - u_0 \in D(\mathcal{B})$ から, 以下を得る:

$$\mathcal{F}_m(t) \to \Big[k * \big(\varphi(u(\cdot)) - \varphi(u_0)\big)\Big](t) - \int_0^t (f(\tau), \mathcal{B}(u-u_0)(\tau))_H \, \mathrm{d}\tau \tag{5.30}$$

for a.e. $t \in (0,T)$. こうして $\mathcal{F}$ は $[0,T]$ 上で有限値をとり, (5.6) と (5.7) が成り立つことが分かる. なお $f \in W^{1,2}(0,T;H)$ の場合は, $\varphi(u(\cdot)) \in L^\infty(0,T)$ なので, **(H)** より $k_m * \varphi(u(\cdot)) \to k * \varphi(u(\cdot))$ strongly in $C([0,T])$ であり, それゆえ (5.30) がすべての $t \in [0,T]$ に対して成立する.

以上をもって定理 19 の証明が完了した. □

5.8 解作用素の非拡張性 (系 21 の証明)

以下, 系 21 の証明を与える.

まず以下を満たすような $C_c^\infty(0,T;H)$ 上の列 (f_n) をとる.

$$f_n \to f \quad \text{strongly in } \mathcal{H} \quad \text{as } \ n \to \infty. \tag{5.31}$$

さらに f を f_n と置き換えた近似問題 (5.12) を考え, それに対する $[0,T]$ 上の強解を u_n とする. 論文 [27] と同様に, 方程式 (5.12) の両辺と ℓ の合成積をとり, **(H)** を用いて第二種ヴォルテラ方程式の形に書き直す:

$$u_\lambda + \lambda^{-1}\ell * u_\lambda = u_0 + \lambda^{-1}\ell * J_\lambda u_\lambda + \lambda(\lambda^{-1}\ell) * \big(f_n - \lambda u_\lambda'\big), \quad J_\lambda := (I + \lambda\partial\varphi)^{-1}.$$

すると近似問題 (5.12) の強解 u_λ は $\lambda^{-1}\ell$ のレゾルベント核 $r_{\lambda^{-1}} \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ と基本解 $s_{\lambda^{-1}} \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ を用いて, 次のように表現することができる:

$$u_\lambda = u_0 s_{\lambda^{-1}} + r_{\lambda^{-1}} * \big[J_\lambda u_\lambda + \lambda\big(f_n - \lambda u_\lambda'\big)\big]. \tag{5.32}$$

ここで定理 9 より, 任意の $\lambda > 0$ に対して $r_{\lambda^{-1}} \geq 0$, $s_{\lambda^{-1}} \geq 0$ a.e. in $(0, +\infty)$ となることに留意する. さらに $u_{i,\lambda}$ が $u_{0,i}$ および $f_{i,n}$ に対する近似問題の強解とする $(i = 1, 2)$. すると

$$\begin{aligned}
&\|u_{1,\lambda}(t) - u_{2,\lambda}(t)\|_H \\
&\quad \leq s_{\lambda^{-1}} \|u_{0,1} - u_{0,2}\|_H + \left(r_{\lambda^{-1}} * \|u_{1,\lambda} - u_{2,\lambda}\|_H\right)(t) + \lambda \left(r_{\lambda^{-1}} * \|f_{1,n} - f_{2,n}\|_H\right)(t) \\
&\qquad + \lambda^2 \left(r_{\lambda^{-1}} * \|u'_{1,\lambda} - u'_{2,\lambda}\|_H\right)(t)
\end{aligned}$$

for all $t \in [0, T]$. ここで J_λ の H における非拡張性を用いた. 両辺と $\lambda^{-1}\ell$ の合成積をとり, さらに合成積をとる前の不等式と辺々を加えることによって

$$\begin{aligned}
&\|u_{1,\lambda}(t) - u_{2,\lambda}(t)\|_H + \lambda^{-1} \left(\ell * \|u_{1,\lambda} - u_{2,\lambda}\|_H\right)(t) \\
&\quad \leq (s_{\lambda^{-1}} + \lambda^{-1}\ell * s_{\lambda^{-1}}) \|u_{0,1} - u_{0,2}\|_H + \left[\left(r_{\lambda^{-1}} + \lambda^{-1}\ell * r_{\lambda^{-1}}\right) * \|u_{1,\lambda} - u_{2,\lambda}\|_H\right](t) \\
&\qquad + \lambda \left[\left(r_{\lambda^{-1}} + \lambda^{-1}\ell * r_{\lambda^{-1}}\right) * \|f_{1,n} - f_{2,n}\|_H\right](t) \\
&\qquad + \lambda^2 \left[\left(r_{\lambda^{-1}} + \lambda^{-1}\ell * r_{\lambda^{-1}}\right) * \|u'_{1,\lambda} - u'_{2,\lambda}\|_H\right](t) \\
&\quad \leq \|u_{0,1} - u_{0,2}\|_H + \lambda^{-1} \left(\ell * \|u_{1,\lambda} - u_{2,\lambda}\|_H\right)(t) + \left(\ell * \|f_{1,n} - f_{2,n}\|_H\right)(t) \\
&\qquad + \lambda \left(\ell * \|u'_{1,\lambda} - u'_{2,\lambda}\|_H\right)(t) \quad \text{for } \ t \in [0, T]
\end{aligned}$$

が成り立つ. 前述した定理 19 の証明で見たように, $\lambda \to 0_+$ とすると $u_{i,\lambda} \to u_{i,n}$ かつ $\lambda u'_{i,\lambda} \to 0$ strongly in $\mathcal{H}$ が成り立つ. ただし $u_{i,n}$ は u_0 と f をそれぞれ $u_{0,i}$ と $f_{i,n}$ に置き換えた (5.1) の強解を表す $(i = 1, 2)$. こうして $\ell * \|u'_{1,\lambda} - u'_{2,\lambda}\|_H$ が $L^2(0, T)$ 上で有界になることに注意すると,

$$\|u_{1,n}(t) - u_{2,n}(t)\|_H \leq \|u_{0,1} - u_{0,2}\|_H + \left(\ell * \|f_{1,n} - f_{2,n}\|_H\right)(t)$$

for a.e. $t \in (0, T)$ and all $n \in \mathbb{N}$. よって (5.31) より, $\ell * \|f_{1,n} - f_{2,n}\|_H \to \ell * \|f_1 - f_2\|_H$ strongly in $L^2(0, T)$ となることが分かるので, 以下の事実が $i = 1, 2$ に対して成立する:

$$u_{i,n} \to u_i \quad \text{strongly in } \mathcal{H} \ \text{ as } \ n \to \infty.$$

ただし u_i は $u_0 = u_{0,i}$ と $f = f_i$ に対する (5.1) の $[0, T]$ 上の強解を表す. 従って $(0, T)$ 上ほとんどいたるところで (5.10) が成立する. 特に $\ell \in L^2(0, T)$ であるとき, 命題 20 より $u \in C([0, T]; H)$ であることが分かるので, (5.10) はすべての $t \in [0, T]$ に対して成立する. よって各 $t \in [0, T]$ に対して作用素 $S(t) : u_0 \in D(\varphi) \mapsto u(t) \in D(\varphi)$ は H 上で非拡張的になる. ただし $u(\cdot)$ は初期値 u_0 に対する (5.1) の一意強解を表す. □

5.9 非整数階勾配流の長時間挙動に関する考察

この小節では $k = k_\alpha$, $f \equiv 0$ に対するコーシー問題 (5.1) の解の長時間挙動について論じる. ここではエネルギー汎関数 φ が最小元を持ち, かつ一様凸であると仮定し, $t \to \infty$ とすると (5.1) の強解 $u(t)$ が φ の (ただ一つの) 最小元に収束することを証明する. このことは (5.1) が勾配流と類似の性質を持つことを示唆する. なお, §6.3 で後述する [7] の結果を用いれば, $f = 0$ に対する (5.1) の強解 u は $C([0, \infty); H)$ に属することが分かる.

定理 22 (エネルギーの最小値への収束)

積分核 k はリーマン・リュービル核 k_α とし, φ は H 上で最小元を持つとする. また $f \equiv 0$ および $u_0 \in D(\varphi)$ に対して, コーシー問題 (5.1) の $[0,\infty)$ 上の強解を $u \in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty);H)$ で表す. このとき, 以下が成立する:

$$\varphi(u(t)) \to \inf_H \varphi \quad \text{as} \quad t \to \infty.$$

さらに φ が一様凸であると仮定すると

$$u(t) \to u_\infty := \operatorname*{argmin}_H \varphi \quad \text{strongly in } H \quad \text{as} \quad t \to \infty.$$

まず次の補題を証明しよう.

補題 23 (非整数階微分の部分列収束)

関数 $u \in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty);H) \cap L^\infty(0,\infty;H)$ を $f = 0$ に対するコーシー問題 (5.1) の強解とする. ある時間列 $t_n \to \infty$ が存在して, 以下が成り立つ:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_\alpha * (u - u_0)\right](t_n) \to 0 \quad \text{strongly in } H. \tag{5.33}$$

証明. 話を簡単にするため $\varphi \geq 0$ とする. さらに集合 $I \subset (0,\infty)$ は以下を満たすものとして定義する:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_\alpha * (u - u_0)\right](t) + \partial\varphi(u(t)) \ni 0 \ \text{ in } H \quad \text{for all} \ \ t \in I \tag{5.34}$$

および

$$\sup_{t\in I} \|u(t)\|_H \leq \|u\|_{L^\infty(0,\infty;H)}. \tag{5.35}$$

定理 19 より $|(0,\infty) \setminus I| = 0$ である. さらに定理 19 の (ii) より

$$\int_0^t \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_\alpha * (u - u_0)\right](\tau) \right\|_H^2 \mathrm{d}\tau \leq -\mathcal{F}(t) \leq \|k_\alpha\|_{L^1(0,t)}\varphi(u_0) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\varphi(u_0).$$

ここで定理 19 の (iii) より $\varphi(u(\cdot)) \in L^\infty(0,\infty)$ なので, $\mathcal{F}(0) = 0$ が成り立つことを用いている. よって

$$t^{-1}\int_0^t \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_\alpha * (u - u_0)\right](\tau) \right\|_H^2 \mathrm{d}\tau \leq \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\varphi(u_0). \tag{5.36}$$

従って, I 上のある点列 (t_n) が存在し, $t_n \nearrow \infty$ および (5.33) が成立する. 実際, 仮に (5.33) が成り立たないと仮定すると, ある $\delta_0 > 0$ と $T_0 > 0$ が存在し, 任意の $\tau \in I \cap [T_0,\infty)$ に対して $\|(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)[k_\alpha * (u-u_0)](\tau)\|_H^2 \geq \delta_0$ が成立する. このとき

$$\begin{aligned}
&t^{-1}\int_0^t \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_\alpha * (u - u_0)\right](\tau) \right\|_H^2 \mathrm{d}\tau \\
&\quad \geq t^{-1}\int_{T_0}^t \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_\alpha * (u - u_0)\right](\tau) \right\|_H^2 \mathrm{d}\tau \\
&\quad \geq t^{-1}\int_{T_0}^t \delta_0 \,\mathrm{d}\tau = \frac{t - T_0}{t}\delta_0 \to \delta_0 > 0 \quad \text{as} \quad t \to \infty
\end{aligned}$$

となるが, これは (5.36) と矛盾する. よって (5.33) が従う. □

定理 22 の証明. はじめに φ は最小元 $u_* \in D(\varphi)$ を持つため, $\partial\varphi(u_*) \ni 0$ が成立する. よって, 系 21 より, $u \in L^\infty(0,\infty;H)$ であることが分かる. 補題 23 で存在を証明した (5.33) が成り立つような時間列を (t_n) で表す. また (5.34) より

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_\alpha * (u-u_0)\right](t_n) \in \partial\varphi(u(t_n)).$$

さらに (5.35) より, ある (t_n) の部分列 (表記は変更しない) と $u_\infty \in H$ が存在して

$$u(t_n) \to u_\infty \quad \text{weakly in } H$$

が成り立つ. これらの結果と $\partial\varphi$ の demiclosedness より

$$u_\infty \in D(\partial\varphi), \quad \partial\varphi(u_\infty) \ni 0$$

が成り立つ. ここで φ は凸汎関数なので, u_∞ は φ の最小元になることに注意する.

次にエネルギーの (全列) 収束を証明しよう. そのためにまず, φ の凸性から以下が成り立つことに注意する:

$$\begin{aligned} 0 \le \varphi(w) - \varphi(u_\infty) &\le ((\partial\varphi)^\circ(w), w-u_\infty)_H \\ &\le \|(\partial\varphi)^\circ(w)\|_H \|w-u_\infty\|_H \quad \text{for} \quad w \in D(\partial\varphi). \end{aligned}$$

ここで $u \in L^\infty(0,\infty;H)$ であることを再び使うと, ある定数 $\omega > 0$ が存在して, 以下が成立する:

$$0 \le \varphi(u(t)) - \varphi(u_\infty) \le \omega \|(\partial\varphi)^\circ(u(t))\|_H \tag{5.37}$$

for a.e. $t > 0$. さらに (5.1) の両辺に $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)[k_\alpha * (u-u_0)]$ をかけて, さらに非局所連鎖律公式を用いると

$$\left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_\alpha * (u-u_0)\right] \right\|_H^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_\alpha * (\varphi(u(\cdot)) - \varphi(u_0))\right] \le 0 \ \text{ a.e. in } (0,\infty),$$

が成り立つ.[23] 従って (5.34) および (5.37) より

$$\omega^{-2}\left[\varphi(u(\cdot)) - \varphi(u_\infty)\right]^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_\alpha * (\varphi(u(\cdot)) - \varphi(u_0))\right] \le 0 \ \text{ a.e. in } (0,\infty).$$

ここで $H(t) := \varphi(u(t)) - \varphi(u_\infty)$ および $H_0 := \varphi(u_0) - \varphi(u_\infty)$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_\alpha * (H - H_0)\right] + \omega^{-2}H^2 \le 0 \ \text{ a.e. in } (0,\infty).$$

よって [104, §7] の議論を用いると

$$0 \le \varphi(u(t)) - \varphi(u_\infty) = H(t) \le C\left(1 + t^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{-1} \quad \text{for} \quad t \ge 0$$

が成り立つので

$$\varphi(u(t)) \to \varphi(u_\infty) \ \text{ as } \ t \to \infty. \tag{5.38}$$

次に $\tau_n \to \infty$ を任意の発散列とする. 今, $u(t)$ は $t \ge 0$ に対して H 上で有界になるため, (τ_n) の部分列と $\bar{u}_\infty \in H$ が存在して

$$u(\tau_n) \to \bar{u}_\infty \ \text{ weakly in } H.$$

[23] この不等式は $\varphi(u(\cdot))$ が $D(\mathcal{B})$ に入っているか分からないので形式的である. 実際は $\mathcal{B}_{1/n}(u-u_0) = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)[(k_\alpha)_n(u-u_0)]$ をかけて非局所連鎖律公式を適用する. さらに $\mathcal{B}_{1/n}(u-u_0) \to \mathcal{B}(u-u_0)$ strongly in $\mathcal{H}$ であることを用いることで, ギャップを埋めることができるが, 自明ではない.

さらに φ の H における弱下半連続性より

$$\varphi(\bar{u}_\infty) \le \liminf_{n\to\infty} \varphi(u(\tau_n)) = \varphi(u_\infty)$$

が成り立つので $\bar{u}_\infty$ は φ の最小元となる.

追加で φ が一様凸であると仮定すると, u_∞ は φ のただ 1 つの最小元となる. 従って

$$u(t) \to u_\infty \ \text{ weakly in } H \ \text{ as } \ t \to \infty. \tag{5.39}$$

さらに φ は一様凸なので (5.38) および (5.39) から

$$u(t) \to u_\infty \ \text{ strongly in } H \ \text{ as } \ t \to \infty.$$

よって, 定理の主張がすべて示された. □

6　摂動理論と最近の進展

ここまで (5.1) について述べてきたが, 本節ではその拡張についていくつかのテーマを紹介しよう.

6.1　リプシッツ摂動問題

ここでは (5.1) に対するリプシッツ摂動問題として, 次のコーシー問題を考える.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(u-u_0)\right](t)+\partial\varphi(u(t))+F(t,u(t))\ni f(t)\ \text{ in } H,\quad 0<t<T. \tag{6.1}$$

ただし $F:[0,T]\times H\to H$ は以下の仮定を満たすものとする:

(L) 各 $w\in H$ に対して, 関数 $t\mapsto F(t,w)$ は $(0,T)$ 上で定義された H-値のボッホナー強可測関数である. さらにある定数 $L\geq 0$ が存在して, 以下が成立する:

$$\|F(t,u)-F(t,v)\|_H\leq L\|u-v\|_H\ \text{ for all } u,v\in H \text{ and for a.e. } t\in(0,T).$$

ある $u_*\in L^2(0,T;H)$ が存在して, 関数 $t\mapsto F(t,u_*(t))$ は $L^2(0,T;H)$ に属する.

このとき

$$\|F(t,u)\|_H\leq L\|u\|_H+\rho(t)\quad \text{for all } u\in H \text{ and a.e. } t\in(0,T)$$

が成立する. ここで $\rho(\cdot):=L\|u_*(\cdot)\|_H+\|F(\cdot,u_*(\cdot))\|_H\in L^2(0,T)$ とする. よって作用素 $u\mapsto F(\cdot,u(\cdot))$ は $L^2(0,T;H)$ 上でリプシッツ連続になる.

ここでの主結果は以下のとおりである.

定理 24 (リプシッツ摂動問題の適切性)

条件 **(H)** および **(L)** を仮定する. このとき, 任意の $f\in L^2(0,T;H)$ および $u_0\in D(\varphi)$ に対して, コーシー問題 (6.1) は $[0,T]$ 上の強解 $u\in L^2(0,T;H)$ をただ 1 つ持つ.

古典的な勾配流方程式とは異なり, 問題の非局所性から局所解を継ぎ足していくことで大域解を構成することはできない. よって一発で大域解を構成する. そのためにはノルムの設定が要点となる.

証明. 定数 $\mu>1$ は後で特定することにする. また

$$\mathcal{X}:=\{w\in L^2(0,T;H)\colon \|w\|_{\mathcal{X}}<+\infty\}$$

とする. ここで $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ を以下のように設定する.

$$\|w\|_{\mathcal{X}}^2:=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\left[\mathrm{e}^{-\mu t}\left(k*\|w\|_H^2\right)(t)\right]\quad \text{for } w\in\mathcal{X}.$$

すると $(\mathcal{X},\|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ はバナッハ空間になることが示される. そして作用素 $\mathcal{S}:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ を次のように定義しよう.

$$\mathcal{S}(v)=u\ \text{ for }\ v\in\mathcal{X}.$$

ここで u は次のコーシー問題の強解を表すものとする.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(u-u_0)\right](t)+\partial\varphi(u(t))\ni f(t)-F(t,v(t))\ \text{ in } H,\quad 0<t<T. \tag{6.2}$$

仮定 (L) より, 任意の $v \in L^2(0,T;H)$ に対して $F(\cdot, v(\cdot)) \in L^2(0,T;H)$ であることが確認できる. よって定理 19 より, 各 $v \in \mathcal{X}$ に対して, コーシー問題 (6.2) は $[0,T]$ 上の一意的な強解 $u \in \mathcal{X}$ を持つことが保証される. 従って作用素 $\mathcal{S} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ は well-defined である. 次に定数 $\mu > 0$ を十分大きくとることで, 作用素 $\mathcal{S}$ が $\mathcal{X}$ 上の縮小写像であることを示す. そのために $v_1, v_2 \in \mathcal{X}$ に対して $u_1 = \mathcal{S}(v_1)$, $u_2 = \mathcal{S}(v_2)$ とおく. すると以下が成立する:

$$\frac{1}{2}\left(k * \|u_1 - u_2\|_H^2\right)(t) \le L \int_0^t \|v_1(\tau) - v_2(\tau)\|_H \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_H \, \mathrm{d}\tau$$

for all $t \in [0,T]$. 仮定 **(H)** より

$$\int_0^t h(\tau)\,\mathrm{d}\tau = (\ell * k * h)(t) \quad \text{for} \quad h \in L^1(0,t)$$

である. さらに

$$(\ell * k * h)(t) = \mathrm{e}^{\mu t} \int_0^t \ell(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mu(t-\tau)}\mathrm{e}^{-\mu\tau}\,(k*h)(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

に注意する. すると

$$\begin{aligned}
&\left(k * \|u_1 - u_2\|_H^2\right)(t) \\
&\quad \le 2L\mathrm{e}^{\mu t} \int_0^t \ell(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mu(t-\tau)}\mathrm{e}^{-\mu\tau}\left[k * \left(\|v_1 - v_2\|_H \|u_1 - u_2\|_H\right)\right](\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&\quad \le 2L\mathrm{e}^{\mu t} \int_0^t \ell(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mu(t-\tau)}\mathrm{e}^{-\mu\tau}\left(k * \|v_1 - v_2\|_H^2\right)^{1/2}(\tau)\left(k * \|u_1 - u_2\|_H^2\right)^{1/2}(\tau)\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

for all $t \in [0,T]$. ここでヘルダーの不等式を用いると, 任意の非負値関数 $h \in L^1(0,t)$ および $F, G \in L^2(0,t)$ に対して

$$h * (FG) \le (h * F^2)^{1/2}(h * G^2)^{1/2}$$

が示せる. 従って, ヤングの不等式より

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]}\left[\mathrm{e}^{-\mu t}\left(k * \|u_1 - u_2\|_H^2\right)(t)\right] \\
&\quad \le 2L\left(\int_0^T \ell(\tau)e^{-\mu\tau}\,\mathrm{d}\tau\right) \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in(0,T)}\left[\mathrm{e}^{-\mu\tau}\left(k * \|v_1 - v_2\|_H^2\right)^{1/2}(\tau)\left(k * \|u_1 - u_2\|_H^2\right)^{1/2}(\tau)\right] \\
&\quad \le 2La_\mu \left(\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in(0,T)}\left[\mathrm{e}^{-\mu\tau}\left(k * \|v_1 - v_2\|_H^2\right)(\tau)\right]\right)^{1/2} \left(\sup_{\tau\in[0,T]}\left[\mathrm{e}^{-\mu\tau}\left(k * \|u_1 - u_2\|_H^2\right)(\tau)\right]\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで a_μ は次のように与えられる正定数である:

$$a_\mu := \int_0^T \ell(\tau)\mathrm{e}^{-\mu\tau}\,\mathrm{d}\tau \to 0_+ \quad \text{as} \quad \mu \to +\infty.$$

従って

$$\sup_{\tau\in[0,T]}\left[\mathrm{e}^{-\mu\tau}\left(k * \|u_1 - u_2\|_H^2\right)(\tau)\right] \le 4L^2a_\mu^2 \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in(0,T)}\left[\mathrm{e}^{-\mu\tau}\left(k * \|v_1 - v_2\|_H^2\right)(\tau)\right].$$

ここで定数 $\mu > 1$ を十分大きく選ぶと

$$4L^2a_\mu^2 < 1$$

とできる. このとき作用素 $\mathcal{S} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ は $\mathcal{X}$ 上で縮小写像となる. よって, バナッハの縮小写像の原理より, $\mathcal{S}$ が $\mathcal{X}$ 上にただ一つの不動点 u を持つことが分かる. すなわち $\mathcal{S}(u) = u$ が成り立つ. このことは u がコーシー問題 (6.1) に対する $[0,T]$ 上の強解であることと同義である. また一意性も縮小写像の原理から直ちに従う. □

上の証明の議論はコーシー問題 (6.1) の強解の与えられたデータ u_0, f への連続依存性を証明する上でも用いられる. 実際, $u_{0,1}, u_{0,2} \in D(\varphi)$, $f_1, f_2 \in L^2(0,T;H)$ とし, u_1, u_2 がそれぞれのデータに対応する (6.1) の強解としよう. 定理 24 の証明にならい, $w := u_1 - u_2$, $w_0 := u_{0,1} - u_{0,2}$, $g := f_1 - f_2$ とおくと, 以下が従う:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(k * \|w - w_0\|_H^2\right)(t) \\
&\qquad \le \frac{1}{2K}\int_0^t \|g(\tau)\|_H^2 \,\mathrm{d}\tau + \left(\frac{K}{2} + L\right)\int_0^t \|w(\tau)\|_H^2 \,\mathrm{d}\tau - \Big(\left[k * (w - w_0)\right](t), w_0\Big)_H
\end{aligned}$$

for all $t \in [0,T]$. さらに

$$\begin{aligned}
&\left(k * \|w - w_0\|_H^2\right)(t) \\
&\qquad \le K^{-1}\int_0^t \|g(\tau)\|_H^2 \,\mathrm{d}\tau + (K + 2L)\,\mathrm{e}^{\mu t}\int_0^t \ell(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mu(t-\tau)}\mathrm{e}^{-\mu\tau}\left(k * \|w\|_H^2\right)(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&\qquad\quad + 2\|k\|_{L^1(0,T)}^{1/2}\|w_0\|_H (k * \|w\|_H^2)^{1/2}(t) + 2\|k\|_{L^1(0,T)}\|w_0\|_H^2 \\
&\qquad \le K^{-1}\int_0^t \|g(\tau)\|_H^2 \,\mathrm{d}\tau + (K + 2L)\,\mathrm{e}^{\mu t} a_\mu \sup_{\tau\in[0,T]}\left[\mathrm{e}^{-\mu\tau}\left(k * \|w\|_H^2\right)(\tau)\right] \\
&\qquad\quad + 2\|k\|_{L^1(0,T)}^{1/2}\|w_0\|_H (k * \|w\|_H^2)^{1/2}(t) + 2\|k\|_{L^1(0,T)}\|w_0\|_H^2
\end{aligned}$$

となるので, よって

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(k * \|w\|_H^2\right)(t) \\
&\qquad \le K^{-1}\int_0^t \|g(\tau)\|_H^2 \,\mathrm{d}\tau + (K + 2L)\,\mathrm{e}^{\mu t} a_\mu \sup_{\tau\in[0,T]}\left[\mathrm{e}^{-\mu\tau}\left(k * \|w\|_H^2\right)(\tau)\right] \\
&\qquad\quad + 2\|k\|_{L^1(0,T)}^{1/2}\|w_0\|_H (k * \|w\|_H^2)^{1/2}(t) + 3\|k\|_{L^1(0,T)}\|w_0\|_H^2
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従ってパラメータ μ を $(K + 2L)a_\mu < 1/4$ が成り立つように十分大きく選べば, 以下が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\sup_{\tau\in[0,T]}\left[\mathrm{e}^{-\mu\tau}\left(k * \|w\|_H^2\right)(\tau)\right] \\
&\qquad \le K^{-1}\int_0^T \|g(\tau)\|_H^2 \,\mathrm{d}\tau + 2\|k\|_{L^1(0,T)}^{1/2}\|w_0\|_H \sup_{\tau\in[0,T]}\left[\mathrm{e}^{-\mu\tau}\left(k * \|w\|_H^2\right)(\tau)\right]^{1/2} \\
&\qquad\quad + 3\|k\|_{L^1(0,T)}\|w_0\|_H^2. \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

従って (6.1) の強解は与えられたデータ u_0, f に連続的に依存することが分かる.

このリプシッツ摂動理論を用いると, これまでに得られた非整数階勾配流方程式の適切性に関する結果をいわゆる λ-凸汎関数に拡張することができる. ここで $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ が **λ-凸 (λ-convex)** であるとは,

$$u \mapsto \varphi(u) - \frac{\lambda}{2}\|u\|_H^2 \quad \text{が凸である}$$

ことを意味する. よって $\lambda < 0$ の場合, λ-凸な汎関数の中には凸でないものが入っている. このとき

$$\psi(u) := \varphi(u) - \frac{\lambda}{2}\|u\|_H^2 \quad \text{for } u \in H$$

とおくと, $\psi : H \to (-\infty, +\infty]$ は適正下半連続凸汎関数となる. よって φ に対する非整数階勾配流方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * (u - u_0)\right](t) + \partial\psi(u(t)) + \lambda u(t) \ni f(t) \ \text{ in } H, \quad 0 < t < T \qquad (6.4)$$

として与えられる.

系 25 (半凸エネルギー汎関数に対する非整数階勾配流方程式の適切性)

任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, 定理 19 の主張はコーシー問題 (6.4) に拡張が可能である.

証明. $\lambda < 0$ の場合のみ示せば十分である. ここで $B(u) := \lambda u$ とおけば, これは本小節で扱ったリプシッツ摂動問題の範疇に収まる. □

6.2 最小化移動法による凸エネルギーに対する非整数階勾配流の構成

Li–Salgado [69] は, いわゆる**最小化移動法 (Minimizing Movement Scheme)** によって, 非整数階勾配流方程式 (5.1) の強解を構成している. ただし, 積分核 k はリーマン・リュービル核 k_α に限定し, また外力 $f \in L^2(0,T;H)$ に対して, 追加で

$$\ell_\alpha * \|f(\cdot)\|_H^2 \in L^\infty(0,T) \tag{6.5}$$

を仮定している. ここで ℓ_α は k_α と共役な積分核, すなわち $\ell_\alpha = k_{1-\alpha}$ である. 最小化移動法は, 古典的な勾配流の構成では標準的な手法である. 例えば (1.1) であれば,

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{\tau} + \partial\varphi(u_n) \ni f_n \ \text{ in } H, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

のように離散化される. ただし, $N \in \mathbb{N}$, $\tau = T/N$, $t_n = n\tau$, $f_n = \tau^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(s)\,\mathrm{d}s$ $(n = 1, 2, \dots, N)$ とする. よって, 最小化問題

$$u_n = \operatorname*{arg\,min}_{u \in H} \left(\frac{1}{2\tau}\|u - u_{n-1}\|_H^2 + \varphi(u) - (f_n, u)_H \right), \quad n = 1, 2, \dots, N$$

を順番に解くことで, $\{u_n\}_{n=0}^N$ を構成する. さらに, 離散解 $\{u_n\}_{n=0}^N$ の区分定数補間 $\bar{u}_\tau$, および区分線形補間 u_τ を

$$\bar{u}_\tau(t) = u_{n+1}, \quad u_\tau(t) = u_n + \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau}(t - t_n) \quad \text{for } \ t \in (t_n, t_{n+1}], \quad u_\tau(0) = u_0$$

によって定義すれば,

$$\frac{\mathrm{d}u_\tau}{\mathrm{d}t}(t) + \partial\varphi(\bar{u}_\tau(t)) \ni \bar{f}_\tau(t) \ \text{ in } H, \quad 0 < t < T, \quad u_\tau(0) = u_0$$

が成り立つ. ただし, $\bar{f}_\tau$ は $\{f_n\}_{n=0}^N$ の区分定数補間を表す. また $\{u_n\}_{n=0}^N$ に対するエネルギー評価によって得られる一様評価をもとに, $\tau \to 0_+$ とすることで, $\bar{u}_\tau$ や u_τ の極限として (1.1) の解 u を得る.

一方, 非整数階の勾配流に対しては, まず非整数階微分の離散化が必要である (ここは [68] を参照). そのために, 恒等式

$$u(t) - u_0 = \ell_\alpha * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_\alpha * (u - u_0)\right](t) \quad \text{for } \ u \in D(\mathcal{B}_\alpha),\ t \in (0,T)$$

に注目する. ここで, $\mathcal{B}_\alpha(u - u_0) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_\alpha * (u - u_0)\right]$ を $\{v_n\}_{n=0}^N$ の区分定数補間で近似したとす

ると, 上の式は

$$\begin{aligned} u_n - u_0 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=1}^{n} v_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_n - s)^{\alpha-1} \, \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=1}^{n} \left[(t_n - t_{j-1})^{\alpha} - (t_n - t_j)^{\alpha} \right] v_j \\ &= \frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=1}^{n} \left[(n-j+1)^{\alpha} - (n-j)^{\alpha} \right] v_j \end{aligned}$$

と書けるので, 行列 $K = \{k_{ij}\}_{i,j=1}^{N}$ を

$$k_{ij} = \begin{cases} \frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(i-j+1)^{\alpha} - (i-j)^{\alpha} \right] & \text{if } \ j \le i, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で与えると

$$u_n - u_0 = \sum_{j=1}^{n} k_{nj} v_j, \quad n = 0, 1, \ldots, N$$

と表せる. また K は下三角行列であるため, 逆行列 $K^{-1} = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^{N}$ が存在する. 従って,

$$v_n = \sum_{j=1}^{n} h_{nj} (u_j - u_0), \quad n = 1, \ldots, N$$

が成り立つ. さらに

$$v_n = h_{nn} u_n + \sum_{j=0}^{n-1} h_{nj} u_j, \quad h_{n0} := -\sum_{j=1}^{n} h_{nj}, \quad n = 1, \ldots, N \tag{6.6}$$

によって, $\mathcal{B}_{\alpha}(u - u_0)$ の離散化表現が与えられる. 以上より, (5.1) の離散化は

$$v_n + \partial\varphi(u_n) = h_{nn} u_n + \sum_{j=0}^{n-1} h_{nj} u_j + \partial\varphi(u_n) \ni f_n \ \text{ in } H, \quad n = 1, \ldots, N \tag{6.7}$$

となる. ここで $h_{nn} = \Gamma(\alpha+1)/\tau^{\alpha}$ であることを用いて, $m_n := -\sum_{j=0}^{n-1} (h_{nj}/h_{nn}) u_j$ と置けば,[24]

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\tau^{\alpha}} (u_n - m_n) + \partial\varphi(u_n) \ni f_n \ \text{ in } H, \quad n = 1, \ldots, N$$

と表すことができる. 従って, 最小化問題

$$u_n = \operatorname*{arg\,min}_{u \in H} \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\tau^{\alpha}} \|u - m_n\|_H^2 + \varphi(u) - (f_n, u)_H \right), \quad n = 1, \ldots, N$$

を順番に解くことで, $\{u_n\}_{n=0}^{N}$ が構成できる. さらに (6.6) から, $\mathcal{B}_{\alpha}(u - u_0)$ を離散化したものにあたる $\{v_n\}_{n=1}^{N}$ も求まる. 離散化方程式 (6.7) に対してエネルギー評価を行うと, 離散解 $\{u_n\}_{n=0}^{N}$ および $\{v_n\}_{n=1}^{N}$ の一様評価を得ることができる. その際, 本稿で補題 14 や命題 13 を用いた評価に対応する部分では, 離散的な代数不等式の計算によって代替する. また $\{u_n\}_{n=0}^{N}$ と $\{v_n\}_{n=1}^{N}$ の区分定数補間 $\bar{u}_{\tau}$, $\bar{v}_{\tau}$ に加えて, $\{u_n\}_{n=0}^{N}$ の区分線形補間の代わりに,

$$u_{\tau}(t) := u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \bar{v}_{\tau}(s) \, \mathrm{d}s, \quad 0 \le t \le T$$

[24]ただし m_n は $\{u_j\}_{j=0}^{n-1}$ にのみ依存することに注意. さらに h_{n0} の定義より, m_n は $\{u_j\}_{j=0}^{n-1}$ の凸結合 (重み付き平均) であることが分かる.

によって, $\{u_n\}_{n=1}^N$ の連続補間 u_τ を定義する. すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k_\alpha * (u_\tau - u_0)\right](t) = \bar{v}_\tau(t) \in -\partial\varphi(\bar{u}_\tau(t)) + \bar{f}_\tau(t), \quad 0 < t < T$$

が成り立つ. よって, 離散解の一様評価から, $\bar{u}_\tau$, $\bar{v}_\tau$, u_τ の収束が従うので, そこから (5.1) の強解 u を得る.

6.3 非凸エネルギー汎関数に対する非整数階勾配流

中島慶人氏との共同研究 [7] では非凸エネルギー汎関数に対する非整数階勾配流の理論を構築している. ここでは非凸エネルギー汎関数 $J : H \to [-\infty, +\infty]$ を 2 つの適正下半連続凸汎関数 $\varphi^1, \varphi^2 : H \to [0, \infty]$ の差

$$J(w) = \varphi^1(w) - \varphi^2(w) \quad \text{for } \ w \in D(\varphi^1) \cap D(\varphi^2)$$

として表される場合を考え, 次の抽象コーシー問題の強解の存在について論じている:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * (u - u_0)\right](t) + \partial\varphi^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) \ni f(t) \ \text{ in } H, \quad 0 < t < T. \tag{6.8}$$

ただし k は仮定 **(H)** を満たす積分核とし, $u_0 \in D(\varphi^1) \cap D(\varphi^2)$ と $f \in L^2(0, T; H)$ は与えられたデータとする. ここで f の可積分性および φ^1, φ^2 に対して適切な仮定をおく. 古典的な 1 階のケースに関しては, 大谷 [86, 87]・石井 [54] らの研究がよく知られている. いわばそれを非整数階時間微分のケースに拡張する取り組みである. 次節でも Allen–Cahn 方程式の件で非凸エネルギーの非整数階勾配流が現れるが, それはリプシッツ摂動理論の範疇に収まるものである. 中島氏との研究 [7] ではその枠組みを越えるようなケースを扱っており, 例えば次のような PDE への応用を念頭においている.

$$\partial_t^\beta(u - u_0) - \Delta_p u - |u|^{q-2}u = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \tag{6.9}$$

$$u = 0 \quad \text{in } \partial\Omega \times (0, T). \tag{6.10}$$

ただし $1 < p, q < \infty$, $0 < \beta < 1$ とし $u_0 = u_0(x)$ および $f = f(x, t)$ は与えられたデータとする. 少なくとも $p = 2$ (非整数階時間微分を伴う藤田型方程式) の場合, 優線形増大 $q > p = 2$ ならば初期値によっては解が有限時間で爆発することが劉・山本 [39, 53] らによって示されている.[25] よって, 一般には時間局所解の存在までしか期待できない点は古典的な問題と同様である.

論文 [7] では (6.5) を満たす外力 $f \in L^2(0, T; H)$ に対して, 抽象コーシー問題 (6.8) の時間局所解の存在, および時間大域解の存在に対する十分条件が与えられ, それらは初期値境界値問題 (6.9)–(6.10) に応用されている. 抽象コーシー問題の取扱いにおいては, 連鎖律等式の欠如や非整数階微分の非局所性が困難をもたらすが, 中でも深刻な困難の要因はエネルギー $t \mapsto \varphi^1(u(t))$ に連続性が担保されていない点であろう. 実際, 1 階のケースではエネルギーの連続性が要所に用いられている. そのため (6.8) に対しては, 単なる 1 階のケースの議論の焼き直しでは不十分であり, エネルギーの連続性に頼らない新しい証明の道筋を見出す必要があった.

さらにこの論文では, 非整数階勾配流を扱う上で有益ないくつかの道具立ても与えられている. 一つ目は, 非整数階の連鎖律不等式の積分形である ([7, Proposition 4.2] 参照). これは既に論文 [6] で実質的に与えられているもの (命題 17 参照) も含むが, 1 階の積分の代わりに, 仮定 **(H)** を満たす積分核 k に対して共役な積分核 ℓ と合成積をとったものについても述べられている. 具体的には命題 17 の仮定の下, 以下が成立する.

$$\left[\ell * \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k * (u - u_0)](\cdot), \xi(\cdot)\right)_H\right](t) \geq \psi(u(t)) - \psi(u_0) \quad \text{for a.e. } \ 0 < t < T. \tag{6.11}$$

[25] Neumann 境界条件の場合ならば, $p \neq 2$ でも同様である.

命題 17 が非整数階連鎖律不等式の 1 階の積分形だとすると, 上の (6.11) は α 階の積分形と言えよう. 実際, リーマン・リュービル核 k_α の共役な積分核 ℓ_α との合成積は, 時間に関する α 階の積分に相当している. 二つ目は, いくつかの非線形ヴォルテラ不等式に対する, グロンウォール型の補題である ([7, Lemmas 4.6, 5.1, 6.1] 参照). この補題は時間大域的な評価を与えるだけでなく, 時間局所評価を与える上でも重要である. 三つ目は, (6.5) に類似の条件下における, 合成積で与えられる関数の連続代表元の存在とそのヘルダー型評価である ([7, Lemma 4.3]). これまで非整数階勾配流方程式の解は $L^2(0,T;H)$ には属するものの, 時間に関する連続性は得られていなかった. そのため, 初期条件が成立する意味は古典的なものではなく, $u-u_0 \in D(\mathcal{B})$ に現れる条件によって与えられていた. しかし論文 [7] では, 外力の仮定 (6.5) を課すことで, 対応する (6.8) の強解が $C([0,T];H)$ に属することを保証し, さらに初期条件も古典的な意味, すなわち $u(0)=u_0$ として意味づけることが可能となった. この事実は定理 19 や定理 24 に対しても直ちに適用可能であり, $f \in L^2(0,T;H)$ に (6.5) を仮定するのであれば, 強解 $u \in L^2(0,T;H)$ に対して

$$u \in C([0,T];H), \quad u(0)=u_0$$

が保証される. さらにリーマン・リュービル核 k_α に対しては, $u \in C^{\alpha/2}([0,T];H)$ となることも分かる ([69] も参照).

またこの論文は非線形 Calderón–Zygmund 理論をこの種の研究に初めて取り入れたものであり, $\alpha=1$ の古典的なケースでもしばしば未解決となっていたソボレフ劣臨界条件 $q<p^*$ 下におけるコーシー・ディリクレ問題 (6.9), (6.10) に対して強解 (L^2 解) の存在を証明している. なお, ここで導入した手法を 1 階の発展方程式に関する抽象論と組み合わせれば, $\alpha=1$ の古典的なケースに対してもソボレフの劣臨界まで結果を改良することができる. さらにこの論文の結果では, 小さい初期値に対してはソボレフ臨界 $q=p^*$ の場合も許容する. この点は非整数階微分の話とは独立した発見である.

6.4 時間依存する凸エネルギー汎関数に対する非整数階勾配流

中島 [85] は次の時間依存する凸エネルギー汎関数 $\varphi^t : H \to (-\infty,+\infty]$ $(0 \le t \le T)$ に対する非整数階勾配流方程式の解の存在に対する十分条件を得ている.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(u-u_0)\right](t) + \partial\varphi^t(u(t)) \ni f(t) \ \text{ in } H, \quad 0<t<T. \tag{6.12}$$

1 階の発展方程式に対しては, 剣持 [57, 58] が先駆的であり, さらに山田 [108], 大谷 [88] がそれに続き, その後, 多くの研究がなされてきた. 一方, それらに対応する非整数階版の結果は見当たらなかった. 中島 [85] の結果は, 主に $f \in W^{1,2}(0,T;H)$ の場合と $f \in L^2(0,T;H)$ の場合から構成される. 前者に対しては剣持らが開発した時間依存する汎関数に対する劣微分の連鎖律公式で十分なのに対して, 後者では時間依存する汎関数に対する非整数階微分版の連鎖律公式を整備する必要がある. ちょうどこれは非局所連鎖律公式 (命題 13) を時間依存する汎関数へ拡張したものに対応するが, その際に必要となる仮定が興味深い. 剣持らの結果ではいわゆる剣持条件や剣持・山田条件と呼ばれる汎関数とその effective domain の時間連続依存性に関する仮定がほぼ最適なものとして知られているが, 非整数階微分に対してはそれでは十分ではなく, 非整数階微分に特有の非局所性を考慮した条件を仮定することが肝要である. 論文 [85] ではそのような非局所版の剣持条件が提案されており, その下で抽象コーシー問題 (6.12) の適切性が証明されている. さらに抽象論の結果は時間依存する領域上の退化放物型方程式の可解性に応用されている.

6.5 非整数階勾配流に対するエネルギーの単調性について

古典的な勾配流に関しては, 対応するエネルギーが時間に対して非増加となるが, 非整数階の勾配流に関しては, それは非自明である. このことは, 古典的な勾配流方程式に対しては標準的な連

鎖律公式が適用できるが, 非整数階微分を伴う勾配流方程式に対しては, 非整数階の連鎖律不等式を用いるため, エネルギーはその初期値を超えることはできない一方, エネルギーの単調性までは保証できていないことに起因する. 本小節ではそのことについて考察する.

まず, 次の時間非整数階の線形拡散方程式のコーシー・ディリクレ問題について考える.

$$\begin{aligned} \partial_t^\beta (u-u_0) - \Delta u = 0 \quad & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0 \quad & \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty). \end{aligned}$$

ただし Ω は $\mathbb{R}^N$ 上の有界領域とし, $0<\beta<1$, また ∂_t^β は β 階のリーマン・リュービル微分を表す. ここで u が微分可能であれば, $\partial_t^\beta(u-u_0)$ は u の β 階の Caputo 微分 ${}_0^C D_t^\beta u$ と一致するため, 次の問題を考える.

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\beta u - \Delta u = 0 \quad & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0 \quad & \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0 \quad & \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

このコーシー・ディリクレ問題はフーリエ級数の方法で解を求めることができる. すなわち $u(x,t) = e(x)\sigma(t)$ を初期条件以外の式に代入することで

$$\begin{aligned} -\Delta e_j = \mu_j e_j \ \text{ in } \Omega, \quad e_j = 0 \ \text{ on } \partial\Omega, \\ {}_0^C D_t^\beta \sigma_j + \mu_j \sigma_j = 0 \ \text{ in } (0,\infty), \quad \sigma_j(0) = 1 \end{aligned}$$

を得る. ただし σ_j の初期値は正規化のため 1 とした. もちろん (μ_j, e_j) はディリクレラプラシアン $-\Delta$ に対する固有対である. ここで, 固有値 (μ_j) は $0<\mu_1<\mu_2\le\cdots\le\mu_n\to\infty$ となるように並べ, 重複度に応じて同じ固有値を繰り返すものとする. さらに, 固有関数 (e_j) は $L^2(\Omega)$ 上の正規直交系をなすものとする. 次に σ_j に関する初期値問題を解くことになるが, これに関しては Mittag–Leffler 関数を用いて次のように表現することができる.

$$\sigma_j(t) = E_\beta(-\mu_j t^\beta).$$

ただし, $E_\beta := E_{\beta,1}$ は次のように定義される Mittag–Leffler 関数である (なお E_β は整関数である).

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)} \quad (z\in\mathbb{C}).$$

従って, 初期値 u_0 に対して, $c_j = (u_0, e_j)_{L^2(\Omega)}$ と置けば

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j E_{\beta,1}(-\mu_j t^\beta) e_j(x)$$

と表すことができる. 時間非整数階の線形拡散方程式を非整数階勾配流方程式と見なすのであれば, 対応するエネルギー汎関数 φ はディリクレ積分である. 従って

$$\varphi(u(t)) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j c_j^2 E_{\beta,1}(-\mu_j t^\beta)^2$$

の単調性が問題となるが

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(u(t)) = -t^{\beta-1}\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 c_j^2 E_{\beta,1}(-\mu_j t^\beta) E_{\beta,\beta}(-\mu_j t^\beta) \le 0$$

である. ここで $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_\beta(z)=\frac{1}{\beta}E_{\beta,\beta}$ であること, および $E_\beta, E_{\beta,\beta}>0$ であることを用いた. 従って, エネルギー汎関数 $\varphi(u(t))$ は非増加である. このことはより一般的な非整数階の線形発展方程式にも拡張できる. 例えば

$$\partial_t^\beta(u-u_0)(t)+A(u(t))=0 \ \text{ in } H, \quad 0<t<\infty.$$

ただし $A: D(A)\subset H\to H$ は正値自己共役作用素とし, $0<\beta<1$, $u_0\in D(A)$ とする.

一方, 非整数階勾配流に対するエネルギーの単調性を非線形問題へ拡張できるかは, しばらく未解決問題として残されていた. 最近, Fritz [40] は非線形の非整数階勾配流の反例を構成することで, **この問いに否定的な結論を得ている.** Fritz の反例の構成は以下のとおりである. $\mathbb{R}^2$ 上の非整数階勾配流方程式

$$ {}_0^C D_t^{1/2}u(t)=-\nabla E(u(t)) \ \text{ in } \mathbb{R}^2, \ \ t\in(0,1), \quad u(0)=0 \tag{6.13}$$

に対して, 次の関数 $u:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ が解になるように, 関数 $E:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を構成していく.

$$u(t)=\begin{pmatrix}\varepsilon t^{1/2}\\ t^{1/2}-t^{3/2}\end{pmatrix}, \quad t\in[0,1]. \tag{6.14}$$

ただし, $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2\sqrt{2}})$ とする. このとき, Caputo 微分の公式 ${}_0^C D_t^{1/2}t^p=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})}t^{p-\frac{1}{2}}$ $(p>0,\,t>0)$ より

$$ {}_0^C D_t^{1/2}u(t)=\begin{pmatrix}\varepsilon\Gamma(\frac{3}{2})\\ \Gamma(\frac{3}{2})-\Gamma(\frac{5}{2})t\end{pmatrix}, \quad t\in[0,1]$$

となる. ここで $f(t):=t^{1/2}-t^{3/2}$ の 1 階導関数 $f'(t)$ が $t=1/3$ で符号を変えるのに対して, $1/2$ 階の Caputo 微分 ${}_0^C D_t^{1/2}f(t)=\Gamma(\frac{3}{2})-\Gamma(\frac{5}{2})t$ は $t=2/3$ で符号を変えることに注意する (ここで $\Gamma(\frac{5}{2})=\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})$ を用いた). 両者の符号が異なる区間 $(1/3,2/3)$ に着目して, 一旦, 半凸性のことは忘れて, (6.14) で与えられた u に対して (6.13) を満たすような関数 $E_0:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を構成する.

見通しを良くするために, $s=\sqrt{t}$ とおくと

$$r(s):=u(s^2)=\begin{pmatrix}\varepsilon s\\ s-s^3\end{pmatrix}, \quad {}_0^C D_t^{1/2}u(s^2)=\begin{pmatrix}\varepsilon\Gamma(\frac{3}{2})\\ \Gamma(\frac{3}{2})-\Gamma(\frac{5}{2})s^2\end{pmatrix}, \quad s\in[0,1]$$

はそれぞれ s の多項式になる. また r は単射であり, さらに $|r'(s)|^2=\varepsilon^2+(1-3s^2)^2\geq\varepsilon^2>0$ が成り立つので, $r:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ は滑らかな埋め込み曲線である. その上で

$$\nabla E_0(r(s))=-{}_0^C D_t^{1/2}u(s^2)=\begin{pmatrix}-\varepsilon\Gamma(\frac{3}{2})\\ -\Gamma(\frac{3}{2})+\Gamma(\frac{5}{2})s^2\end{pmatrix}=:\begin{pmatrix}g_1(s)\\ g_2(s)\end{pmatrix}=g(s), \quad s\in[0,1] \tag{6.15}$$

を満たすような関数 $E_0:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を構成する. そのような E_0 に対しては

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}E_0(r(s))=\nabla E_0(r(s))\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}(s)=g_1(s)\varepsilon+g_2(s)(1-3s^2), \quad s\in[0,1] \tag{6.16}$$

となる. なお $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2\sqrt{2}})$ は, 右辺が $t=s^2=1/2$ の近くで正になるための条件である. よって $E_0(0)=0$ とすれば, 曲線 $r([0,1])$ 上では

$$E_0(r(s))=\int_0^s\left[g_1(\sigma)\varepsilon+g_2(\sigma)(1-3\sigma^2)\right]\mathrm{d}\sigma, \quad s\in[0,1]$$

が成り立つはずである. 今, $r(s)=(x,y)$ と置けば, $s=x/\varepsilon$ なので

$$B(x):=\int_0^{x/\varepsilon}\left[g_1(\sigma)\varepsilon+g_2(\sigma)(1-3\sigma^2)\right]\mathrm{d}\sigma, \quad x\in\mathbb{R}$$

と置くことにする.

また $r([0,1])$ は埋め込み曲線であるため, その近傍にある点 $p=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ は, 曲線上の点 $r(s)$ とそこからのずれで分解されることに注意する. そのような観点に基づいて, 曲線上から外れた点の表示を与えよう. まず

$$\psi(x) := \frac{x}{\varepsilon} - \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^3, \quad x\in\mathbb{R}$$

と置けば, $r(s)=(\varepsilon s, \psi(\varepsilon s))$ なので, 曲線 $r(s)$ 上の点 (x,y) は $y=\psi(x)$ を満たすことになる. そこで曲線からのずれを

$$w(x,y) := y-\psi(x), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

で表すことにする. 実際, $r(s)=(x,y)$ 上では $w=0$ である.

その上で

$$E_0(x,y) = B(x) + g_2(x/\varepsilon)w(x,y) + \frac{M}{2}w(x,y)^2, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2 \tag{6.17}$$

と置く. ただし, M は正定数とする. このとき $E_0(x,y)$ は多項式であるため, 滑らかである. また $w(x,\psi(x))=0$ より

$$E_0(x,\psi(x)) = B(x), \quad x\in\mathbb{R}$$

が成り立つ. さらに

$$\nabla E_0(x,y) = \begin{pmatrix} B'(x) + \frac{1}{\varepsilon}g_2'(x/\varepsilon)w(x,y) - g_2(x/\varepsilon)\psi'(x) - Mw(x,y)\psi'(x) \\ g_2(x/\varepsilon) + Mw(x,y) \end{pmatrix}, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

より,

$$\nabla E_0(x,\psi(x)) = \begin{pmatrix} B'(x) - g_2(x/\varepsilon)\psi'(x) \\ g_2(x/\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x/\varepsilon) \\ g_2(x/\varepsilon) \end{pmatrix}, \qquad x\in\mathbb{R}$$

が成り立つ (w の 2 次の項は消える). 従って, 曲線 $(x,y)=r(s)$ 上では, (6.17) で与えた E_0 に対して, (6.15) が成立することが分かる.

次に曲線 $r([0,1])$ の付近では E_0 と一致するような, 半凸で滑らかな汎関数 $E:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を構成する.[26] 曲線 $r([0,1])$ はコンパクト集合なので, 以下を満たすような 2 つの有界な開集合 $U,V\subset\mathbb{R}^2$ をとることができる.

$$r([0,1])\subset U, \quad \overline{U}\subset V.$$

さらに次を満たす滑らかな cut-off 関数 $\chi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ をとる.

$$\chi = 1 \ \text{ on } U, \quad \chi = 0 \ \text{ on } \mathbb{R}^2\setminus V.$$

そして $E=\chi E_0$ と置くと, E は $\mathbb{R}^2$ 上で滑らかであり, さらにその台 $\operatorname{supp} E$ は有界である. 従って

$$\lambda := \inf_{x\in\mathbb{R}^2}\lambda_{\min}(D^2E(x)) = \min_{x\in\overline{V}}\left(\min\left\{\xi\cdot D^2E(x)\xi:\ \xi\in\mathbb{R}^2,\,|\xi|=1\right\}\right) > -\infty$$

となるので, E は $\mathbb{R}^2$ 上で半凸になる. 一方, $E=E_0$ in U であるため, $\nabla E(r(s))=\nabla E_0(r(s))$, $s\in[0,1]$ である. 従って, (6.14) で与えた $u:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ は (6.13) を満たすが, (6.16) から分かるように

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(u(t)) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left[g_1(\sqrt{t})\varepsilon + g_2(\sqrt{t})(1-3t)\right], \quad t\in[0,1]$$

は $t=1/2$ の付近で正値をとる.[27] すなわち $t\mapsto E(u(t))$ は単調ではない.

[26] ここまでで構成した E_0 は, $\mathbb{R}^2$ 全体では半凸にならない.

[27] ただし, ここでの設定では ${}_0^C D_t^{1/2}u = \partial_t^{1/2}u$ が成り立つため, (6.13) と (5.1) に違いはない.

7　偏微分方程式への応用

本節ではこれまで証明してきた抽象論を具体的な偏微分方程式 (PDE) に適用することを目的とする. よって非整数階時間微分を含む非線形放物型方程式が対象となる. ここでは簡単のため, ディリクレ境界条件しか扱わない.

$\mathbb{R}^N$ 上の領域 Ω と $T>0$ を考える. 以下, ∂_t^β は β 階のリーマン・リュービル微分作用素を表す. すなわち

$$\partial_t^\beta w(x,t) = \partial_t \left[k_\beta * w(x,\cdot)\right](t) = \partial_t \left(\int_0^t k_\beta(t-s) w(x,s)\,\mathrm{d}s \right)$$

とする. ただし $0<\beta<1$ とし, また k_β はリーマン・リュービル核 ((3.9) 参照) とする. よって k_β は仮定 **(H)** を共役な核 ℓ_β とともに満たす.

7.1　非整数階時間微分を伴う放物型 p-Laplace 方程式

この小節では次のように定義されるいわゆる **p-Laplacian** を含む放物型方程式の時間非整数階版について考える.

$$\Delta_p u := \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right), \quad 1<p<+\infty.$$

すなわち次のコーシー・ディリクレ問題の適切性について論じる.

$$\partial_t^\beta (u-u_0) - \Delta_p u = f \quad \text{in } \Omega\times(0,T), \tag{7.1}$$

$$u = 0 \quad \text{in } \partial\Omega\times(0,T). \tag{7.2}$$

ただし $1<p<\infty$, $0<\beta<1$ とし $u_0=u_0(x)$ および $f=f(x,t)$ は与えられたデータとする. 定理 19 を適用するために, $H=L^2(\Omega)$ 上で定義される汎関数

$$\varphi(w) = \begin{cases} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla w(x)|^p\,\mathrm{d}x & \text{if } w\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega), \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \tag{7.3}$$

を考える. すると φ は H 上で適正下半連続凸汎関数となり, また $D(\varphi)=W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$ となる (よって $D(\varphi)$ の元はディリクレ境界条件 (7.2) を満たす). さらに $w\in D(\partial\varphi)=\{w\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)\colon -\Delta_p w\in L^2(\Omega)\}$ に対して, φ の劣微分 $\partial\varphi(w)$ は超関数の意味で $-\Delta_p w$ と一致する. 従ってコーシー・ディリクレ問題 (7.1), (7.2) は抽象発展方程式 (5.1) に帰着される. 従って, 定理 19 より以下が成立する.

定理 26 (非整数階時間微分を含む放物型 p-Laplace 方程式の適切性)

任意の $f\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ および $u_0\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$ に対して, コーシー・ディリクレ問題 (7.1), (7.2) は一意に $L^2(\Omega)$ 解 $u=u(x,t)$ を持ち, 以下が成立する:

$$u\in \begin{cases} L^{2/(1-2\beta)}(0,T;L^2(\Omega)) & \text{if } \beta\in(0,1/2), \\ \bigcap_{p<\infty} L^p(0,T;L^2(\Omega)) & \text{if } \beta=1/2, \\ C([0,T];L^2(\Omega)) & \text{if } \beta\in(1/2,1), \end{cases} \tag{7.4}$$

$$u\in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)),\quad u-u_0\in H_0^{\beta,2}(0,T;L^2(\Omega)), \tag{7.5}$$

$$\Delta_p u\in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{7.6}$$

特に $f\in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$ のとき, $0<\beta<1$ によらず $u\in L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega))$ が成り立つ (さらに [7] によれば, $u\in C^{\beta/2}([0,T];L^2(\Omega))$ であることも分かる).

7.2 非整数階時間微分を伴う非線形拡散方程式

本小節では次のような非整数階時間微分を伴う非線形拡散方程式の適切性について論じる.

$$\partial_t^\beta (u - u_0) - \Delta \left(|u|^{m-1} u \right) = f \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \tag{7.7}$$

$$u = 0 \quad \text{in } \partial\Omega \times (0,T). \tag{7.8}$$

ただし $0 < m < \infty$, $0 < \beta < 1$ とし, $u_0 = u_0(x)$ および $f = f(x,t)$ は与えられるものとする. 本小節を通して, ポアンカレの不等式が成立すると仮定する (例えば Ω が有界領域の場合など). そのとき $-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ はリース写像となり, 特に可逆である. ここでは

$$H = H^{-1}(\Omega), \quad \varphi(w) = \begin{cases} \frac{1}{m+1} \int_\Omega |w(x)|^{m+1} \, \mathrm{d}x & \text{if } w \in L^{m+1}(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega), \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

とその内積を次のように考える:

$$(u,v)_H := \langle u, (-\Delta)^{-1} v \rangle_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{for } \ u, v \in H.$$

このとき $D(\varphi) = L^{m+1}(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$ が成立する. さらに任意の $w \in D(\partial\varphi) = \{ w \in L^{m+1}(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega) \colon |w|^{m-1} w \in H_0^1(\Omega) \}$ に対して

$$f = \partial\varphi(w) \quad \text{if and only if} \quad (-\Delta)^{-1} f = |w|^{m-1} w$$

が成立する. よって (7.7), (7.8) の弱形式が抽象コーシー問題 (5.1) の形で与えられる (詳細は [21] を参照). 従って定理 19 より, 次の定理が成り立つ:

定理 27 (非整数階時間微分を伴う非線形拡散方程式の適切性)

任意の $f \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ と $u_0 \in L^{m+1}(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$ に対して, コーシー・ディリクレ問題 (7.7), (7.8) は一意に $H^{-1}(\Omega)$ 解 $u = u(x,t)$ を持ち, 以下を満たす:

$$u \in \begin{cases} L^{2/(1-2\beta)}(0,T; H^{-1}(\Omega)) & \text{if } \ \beta \in (0, 1/2), \\ \bigcap_{p<\infty} L^p(0,T; H^{-1}(\Omega)) & \text{if } \ \beta = 1/2, \\ C([0,T]; H^{-1}(\Omega)) & \text{if } \ \beta \in (1/2, 1), \end{cases} \tag{7.9}$$

$$u \in L^{m+1}(0,T; L^{m+1}(\Omega)), \quad |u|^{m-1} u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), \tag{7.10}$$

$$u - u_0 \in H_0^{\beta,2}(0,T; H^{-1}(\Omega)). \tag{7.11}$$

特に $f \in W^{1,2}(0,T; H^{-1}(\Omega))$ のとき, $0 < \beta < 1$ によらず $u \in L^\infty(0,T; L^{m+1}(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega))$ を満たす (さらに [7] によれば, $u \in C^{\beta/2}([0,T]; H^{-1}(\Omega))$ であることも分かる).

7.3 非整数階時間微分を伴う Allen–Cahn 方程式

本小節では次のような非整数階時間微分を伴う Allen–Cahn 方程式について考える:

$$\partial_t^\beta (u - u_0) - \Delta u + W'(u) = f \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \tag{7.12}$$

$$u = 0 \quad \text{in } \partial\Omega \times (0,T). \tag{7.13}$$

ただし $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は二重井戸ポテンシャルを想定するが, 次の仮定をみたすような (いわゆる λ-凸な) 関数として十分である:

$$W \in C^2(\mathbb{R}) \quad \text{かつ} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall s \in \mathbb{R}, \ W''(s) \geq \lambda. \tag{7.14}$$

また一般性を損なわず $W(0)=0$ と仮定してもよい. ここでは特に $\lambda<0$ となる場合を考える. このとき W は凸とは限らない. そこで W を次のように分解して考える.

$$W(s)=\left(W(s)-\frac{\lambda}{2}s^2\right)-\left(-\frac{\lambda}{2}s^2\right).$$

ここで右辺第一項は凸になることに注意する. 以下, $H=L^2(\Omega)$ とし, また

$$\varphi(w)=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla w(x)|^2\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\left(W(w(x))-\frac{\lambda}{2}|w(x)|^2\right)\,\mathrm{d}x & \text{if } w\in D(\varphi),\\ +\infty & \text{otherwise,}\end{cases}\tag{7.15}$$

とおく. すると $D(\varphi):=\{w\in H_0^1(\Omega)\colon W(w(\cdot))\in L^1(\Omega)\}$ となり, また Ω が $C^{1,1}$ 級の有界領域ならば, $w\in D(\partial\varphi)=\{w\in D(\varphi)\cap H^2(\Omega)\colon W'(w(\cdot))\in L^2(\Omega)\}$ に対して, $\partial\varphi(w)$ は $-\Delta w+W'(w)-\lambda w$ と一致する. さらに

$$F(t,w):=\lambda w\quad\text{for}\quad w\in H$$

とおくと, コーシー・ディリクレ問題 (7.12), (7.13) は抽象コーシー問題 (6.1) に帰着される. 従って定理 24 より, 以下を得る:

定理 28 (非整数階時間微分を含む Allen–Cahn 方程式の適切性)

任意の $f\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ と, $W(u_0(\cdot))\in L^1(\Omega)$ を満たすような初期値 $u_0\in H_0^1(\Omega)$ に対して, コーシー・ディリクレ問題 (7.12), (7.13) は一意に $L^2(\Omega)$ 解 $u=u(x,t)$ を持つ. さらに Ω が $C^{1,1}$ 級の有界領域ならば, 以下が成立する:

$$u\in\begin{cases}L^{2/(1-2\beta)}(0,T;L^2(\Omega)) & \text{if } \beta\in(0,1/2),\\ \bigcap_{p<\infty}L^p(0,T;L^2(\Omega)) & \text{if } \beta=1/2,\\ C([0,T];L^2(\Omega)) & \text{if } \beta\in(1/2,1),\end{cases}\tag{7.16}$$

$$u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\quad u-u_0\in H_0^{\beta,2}(0,T;L^2(\Omega)).\tag{7.17}$$

特に $f\in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$ のとき, $0<\beta<1$ によらず $u\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ が成り立つ (さらに [7] によれば, $u\in C^{\beta/2}([0,T];L^2(\Omega))$ であることも分かる).

7.4 その他の応用

この小節では, 前節までに構築した非整数階勾配流理論 [6] のその他の応用や, 関連する偏微分方程式の話題をいくつか紹介する.

Alves–Boudjeriou [9] は, 次の放物型 1-Laplace 方程式のコーシー・ディリクレ問題に [6] の抽象論を応用し, 最終的に解の有限時間消滅を証明している.

$$\partial_t^\alpha(u-u_0)-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)=0\quad\text{in }\Omega\times(0,\infty).\tag{7.18}$$

ただし $0<\alpha<1$ とする. この方程式は (7.1) の $p=1$ のケースに相当する. L^2 空間における 1-Laplacian の劣微分作用素としての表現定理に関しては, [12, 59, 60] (およびサーベイ [47, Theorem 4.17]) などを参照. Vergara–Zacher [104] はコーシー・ディリクレ問題 (7.1), (7.2) に対して, 特異拡散の場合 $1<p<2$ であっても解は有限時間で消滅しないことを証明している. このことは解が必ず有限時間で消滅する 1 階のケースとは大きく異なる, 非局所方程式の特徴と言える. 一方, [9] では, 非整数階のケース $0<\alpha<1$ であっても (7.18) に対するコーシー・ディリクレ

問題の解は有限時間で消滅することを保証しており, 興味深い. この有限時間消滅の証明では, [6] で開発した非局所連鎖律公式 (命題 13 参照) が重要な役割を果たしている.

非整数階微分を伴う多孔質媒体方程式とその類形に関しても, いくつかの研究が存在する. 例えば Bonforte–Gualdani–Ibarrondo [20] では, 時間非整数階の多孔質媒体型方程式

$$\partial_t^\alpha (u - u_0) + \mathcal{L} u^m = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty)$$

を扱っている. ただし, $0 < \alpha < 1$ および $m > 0$ とし, $\mathcal{L}$ はディリクレ境界条件を伴う $-\Delta$ の他, 分数冪ラプラシアンを含む非局所楕円型作用素を含む. 適切性に関しては §7.2 と同様の議論が行われており, 定理 19 が直接的に用いられている. 一方, 比較原理の証明では, [69] による最小化移動法による離散近似を用いることで, 初期値の順序関係が解の時間発展に引き継がれることを示している. また, 正則化評価の証明では, §5 でも紹介した正則化法が用いられている. 興味深い点は, 比較原理に加えて, 系 21 で述べられた解作用素の非拡張性と方程式のスケーリング構造を組み合わせることで, いわゆる Bénilan–Crandall 評価の導出と同様にして, $t \mapsto t^{\alpha/(m-1)} u(x,t)$ に対する時間単調公式を得ている点であろう. 非整数階時間微分を含む問題に関して, 時間単調公式を導出している結果は稀である. このことは, 関数の非整数階微分が定符号であってもその関数の単調性が従わない (実際, 反例がある) という, 非整数階微分に固有の性質に起因する (例えば [36, Example 2.1] 参照). 時間単調公式の応用として, 解に対して上下からの減衰評価を導出している.

Akagi–Sodini–Stefanelli [8] では, ここで構築した抽象論は適用できないような非線形拡散方程式が扱われている. 実際, 境界条件が変わると, §7.2 の議論は破綻する (例えばノイマン境界条件など). 証明では, [7] で構築した連鎖律不等式の積分形 (6.11) が重要な役割を果たす. さらに Kametaka–Kawakami [55] では, 非線形拡散方程式

$$\partial_t^\alpha (u - u_0) = \Delta \Phi(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$$

に対して, いわゆる L^1 理論が展開されている (すなわち, 方程式の各項が $L^1(\mathbb{R}^d)$ に属するような強解を構成している). ただし, Φ は冪型を含むより一般的な単調増加関数とする. L^1 理論も, ここで展開したヒルベルト空間における非整数階勾配流理論の範疇から外れている. 他にも, Wittbold らの研究 [107, 99] などがある. Schmitz–Wittbold [99] では, 時間非整数階の非線形拡散方程式に対するエントロピー解を構成している.

A　極大単調作用素と劣微分作用素 (サーベイ)

本節では $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ を実ヒルベルト空間とする. また $\|u\|_H := \sqrt{(u,u)_H}$ $(u \in H)$ とする.[28] いずれも [22] や [24, 15] に証明付きの解説がある.

A.1　極大単調作用素とその性質

定義 29 (単調作用素)

実ヒルベルト空間 H 上で定義された作用素 $A : H \to 2^H$ について, 以下の概念を導入する.

(i) A の**定義域 (domain)** $D(A)$ と A の**値域 (range)** $R(A)$ を次のように定義する.

$$D(A) := \{u \in H : A(u) \neq \emptyset\}, \quad R(A) := \bigcup_{u \in H} A(u).$$

さらに A の**グラフ (graph)**, つまり

$$\{[u, f] \in H \times H : u \in D(A),\ f \in A(u)\}$$

を $G(A)$ もしくは A で表す.

(ii) A が**単調 (monotone)** であるとは, 以下が成り立つことを意味する:

$$\forall [u, f] \in A,\ \forall [v, g] \in A, \quad (f - g, u - v)_H \geq 0.$$

また単調な作用素を**単調作用素**と呼ぶ.

(iii) 単調作用素 A が**極大単調 (maximal monotone)** であるとは, A のグラフが単調作用素の中で極大, つまり

$$\forall B : H \to 2^H \text{ が単調}, \quad (G(A) \subset G(B) \ \Rightarrow\ A = B)$$

が成り立つことを意味する. 極大単調な単調作用素を**極大単調作用素**と呼ぶ.

(iv) $u \in D(A)$ に対して, $A(u)$ の元でもっともノルムが小さいもの (原点から近いもの) を $A(u)$ の **minimal section** と呼び, $A^\circ(u)$ で表す. つまり

$$\|A^\circ(u)\|_H = \min\{\|f\|_H : f \in A(u)\}.$$

定理 30 (単調作用素の極大性に対する必要十分条件 [22, Prop. 2.2] [15, Thm. II.1.2])

単調作用素 $A : H \to 2^H$ に対して, 以下の条件はすべて同等である.

(i) A は極大単調である.

(ii) 任意の $\lambda > 0$ に対して $R(I + \lambda A) = H$ である.

(iii) ある $\lambda_0 > 0$ に対して $R(I + \lambda_0 A) = H$ である.

[28] 極大単調作用素や劣微分作用素の概念は, バナッハ空間 X からその共役空間 X^* への (非線形) 作用素に対しても定義ができるが, ここでは割愛する. 一方, X から X への作用素に対する極大単調作用素の対応物は後述する m-増大作用素である.

補題 31 (Minty の補題 [22, Prop. 2.5] [15, Prop. II.1.1])

極大単調作用素 $A : H \to 2^H$ に対して, 以下が成立する.

$$[u_n, f_n] \in A, \quad u_n \to u \ \text{ weakly in } H, \quad f_n \to f \ \text{ weakly in } H, \quad \limsup_{n\to\infty} (f_n, u_n)_H \le (f, u)_H$$
$$\Rightarrow \quad [u, f] \in A \ \text{ and } \ (f_n, u_n)_H \to (f, u)_H.$$

特に (u_n) または (f_n) の一方が強収束すれば, 同じ結論が従う (A の **demiclosedness**).

定義 32 (極大単調作用素のレゾルベントと吉田近似)

極大単調作用素 $A : H \to 2^H$ に対して, 以下の概念を定義する.

(i) 任意の $u \in H$ に対して, $J_\lambda u := (I + \lambda A)^{-1} u$ が定義できる.[a] ここで与えられる作用素 $J_\lambda : H \to D(A)$ を A の**レゾルベント (resolvent)** と言う.

(ii) 任意の $u \in H$, $\lambda > 0$ に対して, A の**吉田近似 (Yosida approximation)** $A_\lambda : H \to H$ は以下のように定義される.

$$A_\lambda(u) := \frac{u - J_\lambda u}{\lambda} \quad \text{for } u \in H, \ \lambda > 0.$$

[a] つまり $J_\lambda u$ は与えられたベクトル $u \in H$ に対する $v + \lambda A(v) \ni u$ の解 v である.

命題 33 (極大単調作用素のレゾルベントの収束性 [22, Thm. 2.2] [15, Prop. II.1.1])

極大単調作用素 $A : H \to 2^H$ に対して以下の定理が成立する.

(i) $\overline{D(A)}^H$ は H 上の閉凸集合である.

(ii) $\forall u \in H$, $J_\lambda u \to \mathrm{proj}_{\overline{D(A)}^H} u$ strongly in H as $\lambda \to 0_+$. ここで $\mathrm{proj}_{\overline{D(A)}^H}$ は H から $\overline{D(A)}^H$ への直交射影を表す.

命題 34 (極大単調作用素のレゾルベントと吉田近似の性質 [22, Prop. 2.6] [15, Prop. II.1.1])

極大単調作用素 $A : H \to 2^H$ に対して以下の定理が成立する.

(i) $\forall \lambda > 0$, $\forall u \in H$, $A_\lambda(u) \in A(J_\lambda u)$.

(ii) $\forall \lambda > 0$, J_λ と A_λ は H 上でリプシッツ連続である. リプシッツ定数はそれぞれ 1 と $1/\lambda$ である.

(iii) A_λ は H 上の極大単調作用素である.

(iv) $\forall u \in D(A)$, $\|A_\lambda(u)\|_H \nearrow \|A^\circ(u)\|_H$ かつ $A_\lambda(u) \to A^\circ(u)$ strongly in H as $\lambda \to 0_+$.

命題 35 (極大単調作用素に対する摂動)

極大単調作用素 $A : H \to 2^H$ と単調かつリプシッツ連続な作用素 $B : D(B) = H \to H$ に対して, $A + B : H \to 2^H$ は極大単調作用素になる.[a]

[a] 本稿ではこの命題で十分だが, 仮定はもっと弱めることが可能である. 具体的には B のリプシッツ連続性は demicontinuity で十分である ([22, 15] など参照せよ).

証明. 明らかに $A + B$ は単調作用素なので, 極大単調性を示す. 仮定より A は極大単調なので,

任意の $v, f \in H$ に対して

$$u + \lambda A(u) \ni f - \lambda B(v)$$

は一意解 $u \in D(A)$ を持つ. そこで $S_f : H \to H$ を, 先の v, u に対して

$$S_f(v) := u$$

と定義する. すると $u_i = S_f(v_i)$ $(i = 1, 2)$ に対して

$$u_1 - u_2 + \lambda(A(u_1) - A(u_2)) \ni -\lambda(B(v_1) - B(v_2))$$

が成り立つ. 両辺に $u_1 - u_2$ をかけると, A の単調性と B のリプシッツ連続性 (リプシッツ定数は L_B とする) より

$$\|u_1 - u_2\|_H^2 \leq \lambda L_B \|v_1 - v_2\|_H \|u_1 - u_2\|_H$$

が成り立つ. よって $\lambda > 0$ を十分小さく選べば, S_f は縮小写像になるので, バナッハの縮小写像の原理より, ある $u_* \in D(A)$ が一意に存在して, $S_f(u_*) = u_*$ が成り立つ. すなわち

$$u_* + \lambda A(u_*) + \lambda B(u_*) \ni f$$

が成立する. よって $A + B : H \to 2^H$ は極大単調作用素である. □

命題 36 (強圧的な極大単調作用素の全射性)

極大単調作用素 $A : H \to 2^H$ が**強圧的 (coercive)** である, すなわち

$$\forall([u_n, g_n]) \subset G(A), \quad (\|u_n\|_H \to \infty \quad \Rightarrow \quad \|g_n\|_H \to \infty)$$

が成り立つならば, A は全射である.

証明. 平行移動することで $0 \in A(0)$ としても一般性を失わない. 任意の $f \in H$ について考える. 仮定より A は極大単調作用素なので, 各 $\lambda \in (0, 1)$ に対して, ある $u_\lambda \in D(A)$ が存在して

$$\lambda u_\lambda + g_\lambda \ni f, \quad g_\lambda \in A(u_\lambda) \tag{A.1}$$

が成り立つ. 両辺に g_λ をかけると

$$\lambda \, (u_\lambda, g_\lambda)_H + \|g_\lambda\|_H^2 = (f, g_\lambda)_H \leq \|g_\lambda\|_H \|f\|_H$$

となる. 従って $0 \in A(0)$ と A の単調性より

$$\|g_\lambda\|_H^2 \leq (f, g_\lambda)_H \leq \|g_\lambda\|_H \|f\|_H$$

となり

$$\|g_\lambda\|_H \leq \|f\|_H$$

が成り立つ. よって仮定より $(u_\lambda)_{\lambda \in (0,1)}$ は H 上で有界になる. 実際, $(u_\lambda)_{\lambda \in (0,1)}$ が H 上で非有界だったとすると, $\|u_{\lambda_n}\|_H \to \infty$ となる列 (λ_n) がとれるが, 上の不等式から仮定と矛盾することが分かる. よって $\lambda_n \to 0_+$ とすると, 部分列をとることで $u_{\lambda_n} \to u$ weakly in H が成り立つ. さらに (A.1) より $g_{\lambda_n} \to f$ strongly in H が従う. よって A の demiclosedness より $[u, f] \in G(A)$, すなわち $u \in D(A)$ かつ $A(u) = f$ となる. 従って $f \in H$ の任意性より A の全射性が従う. □

A.2　劣微分作用素とその性質

定義 37 (汎関数の下半連続性と凸性)

実ヒルベルト空間 H 上で定義された関数 $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ に対して以下の概念を定義しよう.

(i) φ の**有効定義域 (effective domain)** $D(\varphi)$ を以下のように定義する.

$$D(\varphi) := \{u \in H : \varphi(u) < \infty\}.$$

また $D(\varphi) \neq \emptyset$ のとき, φ は**適正 (proper)** であると言う.

(ii) φ は**下半連続 (lower semicontinuous)** であるとは, 以下が成り立つことを意味する:

$$\forall u \in H, \quad \liminf_{v \to u} \varphi(v) \geq \varphi(u).$$

(iii) φ は**凸関数 (convex function)** であるとは, 以下が成り立つことを意味する:

$$\forall u, v \in H,\ \forall \theta \in (0,1), \quad \varphi((1-\theta)u + \theta v) \leq (1-\theta)\varphi(u) + \theta\varphi(v).$$

以下では適正かつ下半連続である凸関数をしばしば扱う. その場合, まとめて適正下半連続凸 (約して **p.l.s.c.**) 関数と言う.

定義 38 (劣微分作用素)

実ヒルベルト空間 H 上で定義された適正下半連続凸関数 $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ の $u \in D(\varphi)$ における**劣微分 (subdifferential)** $\partial\varphi(u)$ は次のように定義される.

$$\partial\varphi(u) := \left\{\xi \in H : \forall v \in D(\varphi),\ \varphi(v) - \varphi(u) \geq (\xi, v-u)_H\right\}.$$

さらに φ の**劣微分作用素 (subdifferential operator)** $\partial\varphi$ は以下のように定義される.

$$\partial\varphi : H \to 2^H;\ u \mapsto \partial\varphi(u)$$

またドメインは $D(\partial\varphi) = \{u \in D(\varphi) : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}$ である.

命題 39 (Fenchel–Moreau 恒等式 [22, p.41] [15, p.54])

$$g \in \partial\psi(u) \quad \Leftrightarrow \quad \psi^*(g) = (u, g)_H - \psi(u).$$

命題 40 (劣微分作用素の極大単調性 [22, Ex. 2.3.4] [15, Thm. II.2.1])

実ヒルベルト空間 H 上で定義された適正下半連続凸関数 $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ の劣微分作用素 $\partial\varphi$ は H 上の極大単調作用素になる.

定義 41 (Moreau–Yosida 正則化)

実ヒルベルト空間 H 上の適正下半連続凸関数 φ に対して, φ の **Moreau–Yosida 正則化 (Moreau–Yosida regularization)** $\varphi_\lambda : H \to \mathbb{R}$ は以下のように定義される.

$$\varphi_\lambda(u) := \inf_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2\lambda}\|u - v\|_H^2 + \varphi(v) \right\} \quad \text{for} \quad u \in H. \tag{A.2}$$

命題 42 (Moreau–Yosida 正則化の性質 [22, Prop. 2.11] [15, Thm. II.2.2])

実ヒルベルト空間 H 上の適正下半連続凸関数 φ とその Moreau–Yosida 正則化 φ_λ に関して, 以下の性質が成り立つ.

(i) 任意の $u \in H$, $\lambda > 0$ に対して

$$\varphi_\lambda(u) = \frac{1}{2\lambda}\|u - J_\lambda u\|_H^2 + \varphi(J_\lambda u) = \frac{\lambda}{2}\|(\partial\varphi)_\lambda(u)\|_H^2 + \varphi(J_\lambda u) \tag{A.3}$$

が成立する. ただし J_λ は $\partial\varphi$ のレゾルベントを表す.

(ii) 任意の $u \in H$, $\lambda > 0$ に対して

$$\varphi(J_\lambda u) \le \varphi_\lambda(u) \le \varphi(u) \tag{A.4}$$

が成立する.

(iii) 任意の $u \in H$ に対して $\varphi_\lambda(u) \to \varphi(u)$ as $\lambda \to 0_+$ が成立する.

(iv) φ_λ は H 上で凸かつフレッシェ微分可能である. また, φ_λ のフレッシェ微分 $(\varphi_\lambda)'$ は $\partial\varphi$ の吉田近似 $(\partial\varphi)_\lambda$ と一致する.

命題 43 (劣微分の連鎖律公式 [22, Lem. 3.3] [15, Lem. IV.2.1])

関数 $u \in W^{1,2}(0,T;H)$ が, ほとんどすべての $t \in (0,T)$ に対して $u(t) \in D(\partial\varphi)$ を満たしているものとする. また関数 $g(t) \in L^2(0,T;H)$ が存在し, ほとんどすべての $t \in (0,T)$ に対して $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ を満たしているものとする. このとき, 関数 $t \mapsto \varphi(u(t))$ は $[0,T]$ 上で絶対連続になる. さらにある可測集合 $I \subset (0,T)$ が存在し, $(0,T) \setminus I$ の測度が 0 であり, かつ以下の関係式が成立する.

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = \left(h, \frac{du}{dt}(t)\right)_H \quad \forall h \in \partial\varphi(u(t)), \quad \forall t \in I.$$

A.3 線形 m-増大作用素とその性質

定義 44 (線形作用素の m-増大性 [90])

バナッハ空間 X における線形作用素 $A : D(A) \subset X \to X$ について以下を定義する.

(i) A は**増大 (accretive)** であるとは, 以下が成り立つことを意味する:

$$\forall \lambda > 0, \quad \forall x \in D(A), \quad \|x\|_X \leq \|(I + \lambda A)x\|_X.$$

(ii) 増大作用素 A が **m-増大 (m-accretive)** であるとは, 以下が成り立つことを意味する:

$$\forall \lambda > 0, \quad R(I + \lambda A) = X.$$

ここで $\forall \lambda > 0$ を $\exists \lambda > 0$ に置き換えても同値である.

命題 45 (線形作用素の極大単調性と m-増大性)

$X = H$ がヒルベルト空間のとき, 線形作用素の極大単調性と m-増大性は同値になる.

証明. 単調性と増大性の同値性が確認できれば十分. A が単調作用素のとき

$$\|u + \lambda A(u)\|_H^2 = \|u\|_H^2 + 2\lambda (u, A(u))_H + \lambda^2 \|A(u)\|_H^2 \geq \|u\|_H^2 \quad \text{for } \ u \in D(A), \ \lambda > 0$$

が成り立つ. よって A は増大作用素. 逆に A が増大作用素のとき

$$0 \leq \|u + \lambda A(u)\|_H^2 - \|u\|_H^2 = (\lambda A(u), 2u + \lambda A(u))_H \quad \text{for } \ u \in D(A), \ \lambda > 0$$

が成り立つ. 両辺を $\lambda > 0$ で割ってから $\lambda \to 0_+$ とすれば, A の単調性が従う. □

定義 46 (線形 m-増大作用素のレゾルベントと吉田近似)

線形 m-増大作用素 $A : X \to X$ に対して, 以下の概念を定義する.

(i) 任意の $x \in X$ に対して, $J_\lambda x := (I + \lambda A)^{-1} x$ が定義できる. ここで与えられる作用素 $J_\lambda : X \to D(A)$ を A の**レゾルベント (resolvent)** と言う.

(ii) 任意の $x \in X, \lambda > 0$ に対して, A の**吉田近似 (Yosida approximation)** $A_\lambda : X \to X$ は以下のように定義される.

$$A_\lambda(x) := \frac{x - J_\lambda x}{\lambda} \quad \text{for } x \in X, \ \lambda > 0.$$

命題 47 (線形 m-増大作用素のレゾルベントと吉田近似の性質 [90, Lem. 3.2, 3.3])

m-増大作用素 $A : D(A) \subset X \to X$ が $\overline{D(A)}^X = X$ を満たすとき, 以下が成立する:

(i) $\forall \lambda > 0, \forall x \in X, A_\lambda(x) = A(J_\lambda x)$. 特に $x \in D(A)$ ならば $A(J_\lambda x) = J_\lambda A(x)$. また A_λ は増大作用素である.

(ii) $\forall \lambda > 0$, J_λ と A_λ は X 上でリプシッツ連続である. リプシッツ定数はそれぞれ 1 と $2/\lambda$ である. さらに $\forall \lambda > 0, \forall x \in D(A), \|A_\lambda(x)\|_X \leq \|A(x)\|_X$.

(iii) $\forall x \in X, \ J_\lambda x \to x$ strongly in X as $\lambda \to 0_+$. さらに $\forall x \in D(A), \ A_\lambda(x) \to A(x)$ strongly in X as $\lambda \to 0_+$.

A.4　劣微分作用素の例

一つ目の例として, $H = L^2(\Omega)$ 上で定義された次の汎関数を取り上げる. ただし Ω は $\mathbb{R}^N$ 上の有界開集合とする. また $p \geq 2$ とする.

$$\varphi(u) := \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \ \mathrm{d}x & \text{if } \ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意 10. ポアンカレの不等式[29]

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p,\Omega)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

より, $W_0^{1,p}(\Omega)$ には, 通常の $W^{1,p}(\Omega)$ と同じノルムをいれるのではなく,

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

を入れてもよい. ここではそうする.

まず最初に φ の適正下半連続凸性を確認しよう.

補題 48 (φ の下半連続性)

φ は H 上で適正下半連続関数である. また $D(\varphi) = W_0^{1,p}(\Omega)$ である.

証明. $D(\varphi) = W_0^{1,p}(\Omega)$ となるので, φ は適正である. また φ の凸性も自明であろう. 下半連続性を示すために $u_n \to u$ strongly in H となる列を考える. まず $\liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n) = \infty$ の場合

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n) \geq \varphi(u)$$

が直ちに従う. 一方, $c_0 := \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n) < \infty$ の場合, (u_n) の部分列 $(u_{n'})$ を抜けば

$$\varphi(u_{n'}) \to c_0$$

となる. よって $\varphi(u_{n'})$ は有界である. φ の定義およびポアンカレの不等式より $(u_{n'})$ は $W_0^{1,p}(\Omega)$ で有界になることが分かる. $W_0^{1,p}(\Omega)$ は回帰的なので部分列を引き抜くことで (同じ記号で書く)

$$u_{n'} \to u \quad \text{weakly in } W_0^{1,p}(\Omega)$$

となる. ここでノルムの下半連続性を用いれば

$$\liminf_{n'\to\infty} \|\nabla u_{n'}\|_{L^p(\Omega)} \geq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

が成立する. 従って φ の定義より

$$\liminf_{n'\to\infty} \varphi(u_{n'}) \geq \varphi(u)$$

である. □

[29] Ω が非有界でも, Ω が有限測度をもつならばよい. また, 一方向にだけ有界な場合も成立する. まったく別の話題だが, $\Omega = \mathbb{R}^N$ の場合は, $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ であり, またソボレフの不等式: $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ $\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, が成立する.

では, φ の劣微分作用素の表現について以下の定理を与えよう.

定理 49 ($\partial\varphi$ の表現)

演算子 $A : H \to H$ を以下のように定義する.

$$A(u) = -\Delta_p u$$

ただし $D(A) = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega);\ -\Delta_p u \in H\}$ とする. このとき $\partial\varphi = A$ となる.

証明. はじめに $u \in D(A)$ に対して $A(u) \in \partial\varphi(u)$ を証明しよう. そのために次の初等的な不等式を与える.

補題 50 (不等式 1)

$$\frac{1}{p}|\mathbf{a}|^p - \frac{1}{p}|\mathbf{b}|^p \geq |\mathbf{b}|^{p-2}\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \quad \forall \mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N.$$

この不等式はシュワルツの不等式とヤングの不等式から従う.

さて $u \in D(A)$ とする. 任意の $v \in D(\varphi)$ に対して

$$\begin{aligned}(A(u), v-u)_H &= \int_\Omega -\Delta_p u(x)\,(v(x)-u(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\cdot(\nabla v(x)-\nabla u(x))\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v(x)|^p\,\mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u(x)|^p\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

が得られる. よって $u \in D(\partial\varphi)$ かつ $A(u) \in \partial\varphi(u)$ となる.

上の事実から $A \subset \partial\varphi$ が成立することになる. よって両者が一致することを証明するには, A が極大単調になることを示せばよい. まず単調性を示すために次の初等的な不等式を与えよう.

補題 51 (不等式 2)

$$\left(|\mathbf{a}|^{p-2}\mathbf{a} - |\mathbf{b}|^{p-2}\mathbf{b}\right)\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N.$$

これもシュワルツの不等式とヤングの不等式から従う. よって

$$\begin{aligned}&(A(u)-A(v), u-v)_H \\ &= \int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x) - |\nabla v(x)|^{p-2}\nabla v(x)\right)\cdot(\nabla u(x)-\nabla v(x))\,\mathrm{d}x \\ &\geq 0\end{aligned}$$

となるので A は単調作用素である.

次に A が極大単調であることを示そう. 定理 30 より, 任意の $f \in H$ に対して以下の楕円型方程式の解 $u \in D(A)$ が存在することを証明すればよい.

$$u + A(u) = f.$$

この楕円型方程式の解の存在を証明するために, 変分法を用いる. まず汎関数 $J : H \to (-\infty, \infty]$ を以下のように定義する.

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|_H^2 + \varphi(u) - (f,u)_H$$

すると

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \|f\|_H\|u\|_H \geq \frac{1}{4}\|u\|_H^2 - C\|f\|_H^2$$

となるので, J は H 上で強圧的である. よって $u_* \in D(\varphi)$ が存在し

$$\forall u \in D(\varphi), \quad J(u_*) \le J(u)$$

が成立する. 従って

$$\begin{aligned}
0 &\ge J(u_*) - J(u) \\
&\ge \frac{1}{2}(u_* + u, u_* - u)_H + \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x) \cdot (\nabla u_*(x) - \nabla u(x))\,\mathrm{d}x \\
&\quad -(f, u_* - u)_H \\
&= (u_*, u_* - u)_H - \frac{1}{2}\|u_* - u\|_H^2 - (f, u_* - u)_H \\
&\quad + \int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x) - |\nabla u_*(x)|^{p-2}\nabla u_*(x)\right) \cdot (\nabla u_*(x) - \nabla u(x))\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega |\nabla u_*(x)|^{p-2}\nabla u_*(x) \cdot (\nabla u_*(x) - \nabla u(x))\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

ここで次の初等的な不等式に注意する.

補題 52 (不等式 3)

任意の $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ に対して, 以下の不等式が成立する.

$$\left||\mathbf{a}|^{p-2}\mathbf{a} - |\mathbf{b}|^{p-2}\mathbf{b}\right| \le (p-1)\max\left\{|\mathbf{a}|^{p-2}, |\mathbf{b}|^{p-2}\right\}|\mathbf{a} - \mathbf{b}|.$$

この不等式は $\mathbf{x}_\theta := \theta\mathbf{a} + (1-\theta)\mathbf{b}$ と置くことで

$$\left||\mathbf{a}|^{p-2}\mathbf{a} - |\mathbf{b}|^{p-2}\mathbf{b}\right| = \left|\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(|\mathbf{x}_\theta|^{p-2}\mathbf{x}_\theta\right)\,\mathrm{d}\theta\right|$$

と書けることに注目すれば示すことができるであろう.

よって

$$\begin{aligned}
0 &\ge (u_*, u_* - u)_H - \frac{1}{2}\|u_* - u\|_H^2 - (f, u_* - u)_H \\
&\quad -(p-1)\int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^{p-2} + |\nabla u_*(x)|^{p-2}\right)|\nabla u_*(x) - \nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega |\nabla u_*(x)|^{p-2}\nabla u_*(x) \cdot (\nabla u_*(x) - \nabla u(x))\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

が得られる. ここで任意に選んだ $v \in D(\varphi)$ に対して $u = (1-\theta)v + \theta u_*$ と代入し (よって $u_* - u = (1-\theta)(u_* - v)$ である), 両辺を $(1-\theta)$ で割り, $\theta \to 1$ とすると

$$\begin{aligned}
0 &\ge (u_*, u_* - v)_H \\
&\quad + \int_\Omega |\nabla u_*(x)|^{p-2}\nabla u_*(x) \cdot (\nabla u_*(x) - \nabla v(x))\,\mathrm{d}x - (f, u_* - v)_H
\end{aligned}$$

である. ここで特に $v = u_* \pm \phi$ $(\phi \in C_0^\infty(\Omega))$ とすれば

$$0 = (u_*, \phi)_H + \int_\Omega |\nabla u_*(x)|^{p-2}\nabla u_*(x) \cdot \nabla\phi(x) - (f, \phi)_H$$

となる. 従って

$$\int_\Omega |\nabla u_*(x)|^{p-2}\nabla u_*(x) \cdot \nabla\phi(x) = \int_\Omega (f(x) - u_*(x))\,\phi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall\phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

となるので $-\Delta_p u_* = f - u_* \in H$ が得られる. よって $u_* \in D(A)$ かつ $u_* + A(u_*) = f$ より, A が極大単調作用素になる.

以上より $\partial\varphi = A$ が証明された. □

B　その他

定理 53 (Helly の選出定理 [11, Lemma 3.3.3])

(f_n) を $[0,T]$ 上で定義され $[-\infty,+\infty]$ 上で値をとる非減少関数の列とする. このとき (n) のある部分列 (n_k) とある非減少関数 $f:[0,T]\to[-\infty,+\infty]$ が存在して

$$\forall t\in[0,T],\quad f_{n'}(t)\to f(t)\ \text{ as }\ n'\to\infty$$

が成立する.

証明. 関数 $g_n(t):=\arctan f_n(t)$ $(t\in[0,T])$ とおくと, $g_n:[0,T]\to[-\pi/2,\pi/2]$ は非減少である. すると g_n は有界変動を持つので, その超関数微分 μ_n は $[0,T]$ 上の有限なラドン測度となる. すると任意のボレル集合 $B\subset[0,T]$ に対して, $\sup_n\mu_n(B)\le\pi$ である. よって, リース・マルコフ・角谷の表現定理より, (n) の部分列 (n') と $[0,T]$ 上の有限なラドン測度 μ が存在して

$$\mu_{n'}\to\mu\quad\text{ narrowly on }[0,T]$$

が成り立つ (ここで $[0,T]$ がコンパクトであるため, ラドン測度の弱収束と汎弱収束は一致することに注意). よって, 任意の $0\le s\le t\le T$ に対して

$$\limsup_{n'\to\infty}|g_{n'}(t)-g_{n'}(s)|\le\limsup_{n'\to\infty}\mu_{n'}([s,t])\le\mu([s,t]) \tag{B.1}$$

が成立する. よって, アスコリ・アルツェラ定理の一般形[30]より, (g_n) に対して定理の主張が従う. 最後に (g_n) の部分列の各点収束極限を g とすると, $f(t):=\tan g(t)$ とおくことで $f_{n'}(t)\to f(t)$ for all $t\in[0,T]$ かつ $f:[0,T]\to[-\infty,+\infty]$ は非減少関数であることが分かる. □

[30]同程度連続性は (B.1) のように上極限をとる形でよい. また μ は有限なラドン測度であるため, 高々可算個の atom しか持たないが, modulus of continuity $\mu([s,t])$ は $[0,T]$ からそのような可算個の点を除く集合上で役割を果たせば十分である.

参考文献

[1] Abd El-Ghany El-Abd and J.J. Milczarek, Neutron radiography study of water absorption in porous building materials: anomalous diffusion analysis, Journal of Physics D: Applied Physics **37** (2004), 2305–2313.

[2] F. Achleitner, G. Akagi, C. Kuehn, J.M. Melenk, J.D.M. Rademacher, C. Soresina and J. Yang, Fractional dissipative PDEs, in *Fractional dispersive models and applications—recent developments and future perspectives*, volume 37 of *Nonlinear Syst. Complex.*, pp. 53–122, Springer, Cham, 2024.

[3] E. Affili and E. Valdinoci, Decay estimates for evolution equations with classical and fractional time-derivatives, J. Differential Equations **266** (2019), 4027–4060.

[4] S. Aizicovici, An abstract doubly nonlinear Volterra integral equation, Funkcialaj Ekvacioj **36** (1993), 479–497.

[5] G. Akagi, editor, *Mathematical Sciences of Anomalous Diffusion*, volume 1854 of *RIMS Kôkyûroku*, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 2013.

[6] G. Akagi, Fractional flows driven by subdifferentials in Hilbert spaces, Israel J. Math. **234** (2019), no. 2, 809–862.

[7] G. Akagi and Y. Nakajima, Time-fractional gradient flows for nonconvex energies in Hilbert spaces, Preprint, `arXiv:2501.08059 [math.AP]`, 2025, to appear in Advances in Calculus of Variations.

[8] G. Akagi, G.E. Sodini and U. Stefanelli, Global well-posedness for a time-fractional doubly nonlinear equation, Journal of Differential Equations **474** (2026), 114528.

[9] C.O. Alves and T. Boudjeriou, Existence and uniqueness of solution for some time fractional parabolic equations involving the 1-Laplace operator, Partial Differential Equations and Applications **4** (2023), no. 2, 5.

[10] L. Ambrosio, E. Brué and D. Semola, *Lectures on Optimal Transport*, volume 169 of *UNITEXT*, Springer, Cham, 2024.

[11] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, second edition, 2008.

[12] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J. Mazón, The Dirichlet problem for the total variation flow, J. Funct. Anal. **180** (2001), no. 2, 347–403.

[13] B. Baeumer and M.M. Meerschaert, Stochastic solutions for fractional Cauchy problems, Fract. Calc. Appl. Anal. **4** (2001), no. 4, 481–500.

[14] V. Barbu, Nonlinear Volterra equations in a Hilbert space, SIAM J. Math. Anal. **6** (1975), 728–741.

[15] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach spaces*, Noordhoff, 1976.

[16] V. Barbu, On a nonlinear Volterra integral equation on a Hilbert space, SIAM J. Math. Anal. **8** (1977), 346–355.

[17] V. Barbu, Existence for nonlinear Volterra equations in Hilbert spaces, SIAM J. Math. Anal. **10** (1979), no. 3, 552–569.

[18] E. Barkai, R. Metzler and J. Klafter, From continuous time random walks to the fractional Fokker–Planck equation, Phys. Rev. E **61** (2000), no. 1, 132–138.

[19] B. Berkowitz, A. Cortis, M. Dentz and H. Scher, Modeling non-fickian transport in geological formations as a continuous time random walk, Reviews of Geophysics **44** (2006), no. 2, RG2003.

[20] M. Bonforte, M.P. Gualdani and P. Ibarrondo, Time-fractional porous medium type equations: Sharp time decay and regularization, Calc. Var. Partial Differential Equations **65** (2026), no. 1, 30.

[21] H. Brézis, Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, in *Contributions to nonlinear functional analysis (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1971)*, pp. 101–156, Academic Press, New York-London, 1971.

[22] H. Brézis, *Operateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, volume 5 of *Math Studies*, North-Holland, Amsterdam/New York, 1973.

[23] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011.

[24] H. Brezis, M.G. Crandall and A. Pazy, Perturbations of nonlinear maximal monotone sets in Banach space, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 123–144.

[25] M. Caputo, Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, Annali di Geofisica **19** (1966), no. 4, 383–393.

[26] M. Caputo, Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II, Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society **13** (1967), no. 5, 529–539.

[27] P. Clément, On abstract Volterra equations with kernels having a positive resolvent, Israel J. Math. **36** (1980), 193–200.

[28] P. Clément, On abstract Volterra equations in Banach spaces with completely positive kernels, in *Infinite-dimensional systems*, volume 1076 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 32–40, Springer, Berlin, 1984.

[29] P. Clément and J. Nohel, Abstract linear and nonlinear Volterra equations preserving positivity, SIAM J. Math. Anal. **10** (1979), 365–388.

[30] P. Clément and J. Nohel, Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations with completely positive kernels, SIAM J. Math. Anal. **12** (1981), 514–535.

[31] P. Clément and J. Prüss, Completely positive measures and Feller semigroups, Math. Ann. **287** (1990), 73–105.

[32] A. Cortis and B. Berkowitz, Anomalous transport in "classical" soil and sand columns, Soil Science Society of America Journal **68** (2004), no. 5, 1539–1548.

[33] M. Crandall and J. Nohel, An abstract functional differential equation and a related nonlinear Volterra equation, Israel J. Math. **29** (1978), 313–328.

[34] E.N. de Azevedo, P.L. de Sousa, R.E. de Souza, M. Engelsberg, Mirla de N. do N. Miranda and M.A. Silva, Concentration-dependent diffusivity and anomalous diffusion: A magnetic resonance imaging study of water ingress in porous zeolite, Physical Review E **73** (2006), 011204.

[35] K. Diethelm, *The analysis of fractional differential equations*, volume 2004 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 2010, An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type.

[36] K. Diethelm, Monotonicity of functions and sign changes of their Caputo derivatives, Fract. Calc. Appl. Anal. **19** (2016), no. 2, 561–566.

[37] S. Dipierro, E. Valdinoci and V. Vespri, Decay estimates for evolutionary equations with fractional time-diffusion, Journal of Evolution Equations **19** (2019), no. 2, 435–462.

[38] T.J. Feder, I. Brust-Mascher, J.P. Slattery, B. Baird and W.W. Webb, Constrained diffusion or immobile fraction on cell surfaces: a new interpretation, Biophysical Journal **70** (1996), no. 6, 2767–2773.

[39] G. Floridia, Y. Liu and M. Yamamoto, Blowup in $L^1(\Omega)$-norm and global existence for time-fractional diffusion equations with polynomial semilinear terms, Adv. Nonlinear Anal. **12** (2023), no. 1, Paper No. 20230121, 15.

[40] M. Fritz, A semiconvex counterexample to energy monotonicity for time-fractional gradient flows, Preprint, `arXiv:2608.01188 [math.AP]`, 2026.

[41] T. Fujiwara, K. Ritchie, H. Murakoshi, K. Jacobson and A. Kusumi, Phospholipids undergo hop diffusion in compartmentalized cell membrane, Journal of Cell Biology **157** (2002), no. 6, 1071–1082.

[42] C.G. Gal and M. Warma, *Fractional-in-Time Semilinear Parabolic Equations and Applications*, volume 84 of *Mathématiques et Applications*, Springer, Cham, 2020.

[43] E. Gerolymatou, I. Vardoulakis and R. Hilfer, Modelling infiltration by means of a nonlinear fractional diffusion model, Journal of Physics D: Applied Physics **39** (2006), 4104–4110.

[44] R. Gorenflo, Y. Luchko and M. Yamamoto, Time-fractional diffusion equation in the fractional Sobolev spaces, Fractional Calculus and Applied Analysis **18** (2015), 799–820.

[45] R. Gorenflo and F. Mainardi, Fractional diffusion processes: Probability distributions and continuous time random walk, in G. Rangarajan and M. Ding, editors, *Processes with Long-Range Correlations: Theory and Applications*, volume 621 of *Lecture Notes in Physics*, pp. 148–166, Springer, Berlin, Heidelberg, 2003.

[46] R. Gorenflo and F. Mainardi, Simply and multiply scaled diffusion limits for continuous time random walks, Journal of Physics: Conference Series **7** (2005), no. 1, 1–16.

[47] W. Górny, Functions of bounded variation and their applications, 2024, Lecture notes, University of Vienna.

[48] L. Grafakos, *Classical Fourier analysis*, volume 249 of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, New York, third edition, 2014.

[49] G. Gripenberg, An existence result for a nonlinear Volterra integral equation in a Hilbert space, SIAM J. Math. Anal. **9** (1978), 793–805.

[50] G. Gripenberg, An abstract nonlinear Volterra equation, Israel J. Math. **34** (1979), 198–212.

[51] G. Gripenberg, Volterra integro-differential equations with accretive nonlinearity, J. Differential Equations **60** (1985), 57–79.

[52] R. Hilfer and L. Anton, Fractional master equations and fractal time random walks, Physical Review E **51** (1995), no. 2, R848.

[53] X. Huang, Y. Liu and M. Yamamoto, Blow-up for time-fractional diffusion equations with superlinear convex semilinear terms, Preprint, `arXiv:2310.14295 [math.AP]`, 2023.

[54] H. Ishii, Asymptotic stability and blowing up of solutions of some nonlinear equations, J. Differential Equations **26** (1977), no. 2, 291–319.

[55] M. Kametaka and T. Kawakami, Existence and uniqueness of L^1-solutions to time-fractional nonlinear diffusion equations, Preprint, `arXiv:2601.15618 [math.AP]`, 2026.

[56] J. Kemppainen, J. Siljander, V. Vergara and R. Zacher, Decay estimates for time-fractional and other non-local in time subdiffusion equations in $\mathbb{R}^d$, Math. Ann. **366** (2016), 941–979.

[57] N. Kenmochi, Some nonlinear parabolic variational inequalities, Israel J. Math. **22** (1975), no. 3-4, 304–331.

[58] N. Kenmochi, Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications, Bull. Fac. Educ. Chiba Univ., Part II **30** (1981), 1–87.

[59] N. Kenmochi and K. Shirakawa, Stability for a parabolic variational inequality associated with total variation functional, Funkcial. Ekvac. **44** (2001), no. 1, 119–137.

[60] N. Kenmochi and K. Shirakawa, A variational inequality for total variation functional with constraint, Nonlinear Anal. **46** (2001), no. 3, 435–455.

[61] T. Kiffe, A perturbation of an abstract Volterra equation, SIAM J. Math. Anal. **11** (1980), 1036–1046.

[62] T. Kiffe and M. Stecher, An abstract Volterra integral equation in a reflexive Banach space, J. Differential Equations **34** (1979), 303–325.

[63] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, volume 204 of *North-Holland Mathematics Studies*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[64] Y. Kōmura, Nonlinear semi-groups in Hilbert space, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 493–507.

[65] M. Küntz and P. Lavallée, Experimental evidence and theoretical analysis of anomalous diffusion during water infiltration in porous building materials, Journal of Physics D: Applied Physics **34** (2001), 2547–2554.

[66] G.W. Leibniz, Letter to the marquis de l'hospital, september 30, 1695, in C.I. Gerhardt, editor, *Leibnizens mathematische Schriften*, volume 2, pp. 301–302, A. Asher, Berlin, 1850.

[67] J.J. Levin, Resolvents and bounds for linear and nonlinear Volterra equations, Trans. Amer. Math. Soc. **228** (1977), 207–222.

[68] L. Li and J.G. Liu, A discretization of Caputo derivatives with application to time fractional SDEs and gradient flows, SIAM J. Numer. Anal. **57** (2019), no. 5, 2095–2120.

[69] W. Li and A.J. Salgado, Time fractional gradient flows: theory and numerics, Math. Models Methods Appl. Sci. **33** (2023), no. 2, 377–453.

[70] S.O. Londen and O. Staffans, A note on Volterra equations in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. **70** (1978), 57–62.

[71] Y. Luchko and M. Yamamoto, General time-fractional diffusion equation: some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems, Fractional Calculus and Applied Analysis **19** (2016), no. 3, 676–695.

[72] Y. Luchko and M. Yamamoto, A survey on the recent results regarding maximum principles for the time-fractional diffusion equations, in *Frontiers in Fractional Calculus*, volume 1 of *Current Developments in Mathematical Sciences*, pp. 33–69, Bentham Science Publishers, Sharjah, 2018.

[73] F. Mainardi, R. Gorenflo and A. Vivoli, Renewal processes of Mittag-Leffler and Wright type, Fract. Calc. Appl. Anal. **8** (2005), no. 1, 7–38.

[74] M.M. Meerschaert, D.A. Benson, H.P. Scheffler and B. Baeumer, Stochastic solution of space-time fractional diffusion equations, Physical Review E **65** (2002), no. 4, 041103.

[75] M.M. Meerschaert and H.P. Scheffler, Limit theorems for continuous-time random walks with infinite mean waiting times, J. Appl. Probab. **41** (2004), no. 3, 623–638.

[76] M.M. Meerschaert and H.P. Scheffler, Triangular array limits for continuous time random walks, Stochastic Process. Appl. **118** (2008), no. 9, 1606–1633.

[77] M.M. Meerschaert and H.P. Scheffler, Erratum to "Triangular array limits for continuous time random walks" [Stochastic Process. Appl. 118 (9) (2008) 1606–1633] [mr2442372], Stochastic Process. Appl. **120** (2010), no. 12, 2520–2521.

[78] R. Metzler, E. Barkai and J. Klafter, Deriving fractional Fokker–Planck equations from a generalised master equation, Europhys. Lett. **46** (1999), no. 4, 431–436.

[79] R. Metzler and J. Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, Physics reports **339** (2000), no. 1, 1–77.

[80] R. Metzler and J. Klafter, Anomalous stochastic processes in the fractional dynamics framework: Fokker-Planck equation, dispersive transport, and non-exponential relaxation, Advances in Chemical Physics (2001), 223–264.

[81] R. Metzler and J. Klafter, The restaurant at the end of the random walk: Recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics, Journal of Physics A: Mathematical and General **37** (2004), no. 31, R161–R208.

[82] R. Metzler, J. Klafter and I.M. Sokolov, Anomalous transport in external fields: Continuous time random walks and fractional diffusion equations extended, Phys. Rev. E **58** (1998), no. 2, 1621–1633.

[83] R.K. Miller, On Volterra integral equations with nonnegative integrable resolvents, Journal of Mathematical Analysis and Applications **22** (1968), 319–340.

[84] E.W. Montroll and G.H. Weiss, Random walks on lattices. II, Journal of Mathematical Physics **6** (1965), no. 2, 167–181.

[85] Y. Nakajima, Time-fractional nonlinear evolution equations with time-dependent constraints, Preprint, `arXiv:2601.12352 [math.AP]`, 2026.

[86] M. Ôtani, On the existence of strong solutions for $du/dt(t)+\partial\psi^1(u(t))-\partial\psi^2(u(t))\ni f(t)$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **24** (1977), no. 3, 575–605.

[87] M. Ôtani, Existence and asymptotic stability of strong solutions of nonlinear evolution equations with a difference term of subdifferentials, in *Qualitative theory of differential equations, Vol. I, II (Szeged, 1979)*, volume 30 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pp. 795–809, North-Holland, Amsterdam-New York, 1981.

[88] M. Ôtani, Nonlinear evolution equations with time-dependent constraints, Adv. Math. Sci. Appl. **3** (1993/94), 383–399.

[89] Y. Pachepsky, D.A. Benson and W.J. Rawls, Simulating scale-dependent solute transport in soils with the fractional advective-dispersive equation, Soil Science Society of America Journal **64** (2000), no. 4, 1234–1243.

[90] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[91] Ł. Płociniczak, Approximation of the Erdélyi–Kober operator with application to the time-fractional porous medium equation, SIAM Journal on Applied Mathematics **74** (2014), 1219–1237.

[92] Ł. Płociniczak, Analytical studies of a time-fractional porous medium equation. derivation, approximation and applications, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **24** (2015), 169–183.

[93] Ł. Płociniczak and H. Okrasińska, Approximate self-similar solutions to a nonlinear diffusion equation with time-fractional derivative, Physica D: Nonlinear Phenomena **261** (2013), 85–91.

[94] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, volume 198 of *Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, San Diego, CA, 1999.

[95] N.M.M. Ramos, J.M.P.Q. Delgado and V.P. de Freitas, Anomalous diffusion during water absorption in porous building materials—experimental evidence, Defect and Diffusion Forum **273–276** (2008), 156–161.

[96] S. Sadegh, J.L. Higgins, P.C. Mannion, M.M. Tamkun and D. Krapf, Plasma membrane is compartmentalized by a self-similar cortical actin meshwork, Physical Review X **7** (2017), no. 1, 011031.

[97] E. Scalas, R. Gorenflo and F. Mainardi, Uncoupled continuous-time random walks: Solution and limiting behavior of the master equation, Phys. Rev. E **69** (2004), no. 1, 011107.

[98] E. Scalas, R. Gorenflo, F. Mainardi and M. Raberto, Revisiting the derivation of the fractional diffusion equation, Fractals **11** (2003), 281–289, Scaling and disordered systems (Paris, 2000).

[99] K. Schmitz and P. Wittbold, Entropy solutions for time-fractional porous medium type equations, Differential Integral Equations **37** (2024), no. 5-6, 309–322.

[100] S. Takeuchi, editor, *Mathematical Sciences of Nonlinear Diffusion*, volume 1810 of *RIMS Kôkyûroku*, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 2012.

[101] S.C. Taylor, W.D. Hoff, M. Wilson and K.M. Green, Anomalous water transport properties of Portland and blended cement-based materials, Journal of Materials Science Letters **18** (1999), 1925–1927.

[102] V. Vergara and R. Zacher, Lyapunov functions and convergence to steady state for differential equations of fractional order, Math. Z. **259** (2008), 287–309.

[103] V. Vergara and R. Zacher, A priori bounds for degenerate and singular evolutionary partial integro-differential equations, Nonlinear Anal. **73** (2010), 3572–3585.

[104] V. Vergara and R. Zacher, Optimal decay estimates for time-fractional and other nonlocal subdiffusion equations via energy methods, SIAM J. Math. Anal. **47** (2015), 210–239.

[105] V. Vergara and R. Zacher, Stability, instability, and blowup for time fractional and other nonlocal in time semilinear subdiffusion equations, J. Evol. Equ. **17** (2017), 599–626.

[106] A.V. Weigel, B. Simon, M.M. Tamkun and D. Krapf, Ergodic and nonergodic processes coexist in the plasma membrane as observed by single-molecule tracking, Proceedings of the National Academy of Sciences **108** (2011), no. 16, 6438–6443.

[107] P. Wittbold, P. Wolejko and R. Zacher, Bounded weak solutions of time-fractional porous medium type and more general nonlinear and degenerate evolutionary integro-differential equations, J. Math. Anal. Appl. **499** (2021), no. 1, 125007.

[108] Y. Yamada, On evolution equations generated by subdifferential operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **23** (1976), no. 3, 491–515.

[109] R. Zacher, Boundedness of weak solutions to evolutionary partial integro-differential equations with discontinuous coefficients, J. Math. Anal. Appl. **348** (2008), 137–149.

[110] R. Zacher, Weak solutions of abstract evolutionary integro-differential equations in Hilbert spaces, Funkcial. Ekvac. **52** (2009), 1–18.

[111] 松内 一雄, 応用分野における半端な微分の使われ方, 応用数理 **11** (2001), no. 1, 55–58.

[112] 杉本 信正, 非整数階微分・積分とその応用, 日本流体力学会誌「ながれ」 **4** (1985), no. 2, 110–120.

[113] 杉本 信正, 整数階でない微積分法について, 数学通信 **21** (2016), no. 4, 4–15.

[114] 石渡 龍輔, CTRW のメモ, `http://www.phys.cs.is.nagoya-u.ac.jp/~ishiwata/pdf/ctrw.pdf`, 2013.