

2027 年度博士課程前期 2 年の課程一般選抜 (数学専攻) 筆記試験問題

出題意図と講評

共通 1

出題意図：線形写像の固有値と固有空間の基底，およびこれと可換な線形写像を考察する問題です．問題の写像 D は多項式の空間 V 上の写像として与えられており，行列表示により特性多項式と固有空間を求め，対角化を用いることで最後の結論も得られるという標準的問題です．標準的知識の正しい理解が問われます．

講評：(1)(2) 行列表示が正しく書ければ難しくありませんが，一般には特性根の重複度がただちに固有空間の次元とは限らず注意が必要です．具体的に固有ベクトルが求まることでそれが保証されます．なお，固有ベクトルを V の元としてでなく，行列表示に対する数ベクトルとして答えた解答がやや目立ちました．

(3) 対角化を用いて簡単化される典型的な問題ですが，正解者はやや限られました．なお，行列表示による直接計算でも正解は得られます．

全体として，一つ一つの計算は難しくありませんが，計算ミスも散見されました．なお， $f \in V$ を $\tilde{f} \in V$ に写す写像が対合的 (自身との合成が恒等写像) で固有値が ± 1 であり， D はそれに恒等写像の 2 倍を足したものであることに気づくと計算を大幅に省略できます．

共通 2

出題意図：商位相に関する問題です．同値関係の一致性を確認することの他に，具体的に同相写像の構成ができるか，また位相の基本的性質を把握し上手く適用できるかが問われています．

講評：設問 (1) は落ち着いて定義の条件を確認すれば証明できる問題ですが，正しく証明できていない答案も多くありました．設問 (2) では，同相写像の候補を挙げられていても，それらが同相写像であることの条件を全て証明できている答案は多くありませんでした．

共通 3

出題意図：関数列の収束や一様連続性など，微分積分学における基礎的な事柄への理解を問う問題です．設問 (3) では，極限操作と積分の順序の交換を正しく正当化できる論証能力も問われています．

講評：関数列の各点収束と一様収束を明確に区別できていない解答が散見されました。単調性を用いて一様収束を導く評価が実行できるかどうかで得点に差がつけました。

共通 4

出題意図：正值 2 次形式の基本的な取り扱いが可能かどうか、重積分の変数変換公式を用いることができるか、そしてそれを応用して、1 変数の多少込み入った定積分を計算することができるかどうかを問う基本的な問題です。

講評：(1) 0 以上の値、0 より大きい値の違いに着目した説明が不十分である解答が散見されました。

(2) 2 変数の 2 次関数の積分の典型的な問題ですが、思ったよりも正解は多くありませんでした。こうした問題は確実に正解できるように勉強して欲しいと考えます。

(3) 多くの人が正解に辿り着くことができませんでした。

選択 1

出題意図：群論に対する基礎的学力を問うことが目的の問題です。特に、共役類、群の作用の理解を問いました。また対称群は基本的な群の例であり、対称群の基本的性質、計算等に関する理解度を測る問題も出題しました。

講評：平均点は 5 を超えており、まずまずの出来であったかと思われます。設問 (1) では部分群としての共役ではなく、元の共役として答案を書いている受験生が少なからずいました。(4 次) 対称群の基本性質は「なんとなく理解している」を匂わせる解答が多く、性質をはっきりと捉えた正確な解答はあまり多くなかったのが残念です。設問 (2) の G/H の非可換性に関しても、代表元の非可換性のみ確認しただけで、その交換子が H に属さないことを確認することを怠っている解答も少なからずありました。設問 (3) については、前半を解答できた人のほとんどが安定化群が所望の群に含まれること (必要条件) を確認することができていました。その一方で数名の人が十分性の確認を怠っていたのは残念です。全体的に、正確な議論を展開した良い解答は 3, 4 名程度でした。

選択 2

出題意図：環論の基礎、特に多項式環の扱いに対する能力を問う問題です。環論において剰余の理解は必須です。この問いは、剰余を用いて具体的に構成された環に対して、PID 性、UFD 性、正規性等の環論的性質の理解を問うています。

講評：(1) 環の準同型定理については、多くの人が理解できているようでした。 Φ の単射性を示す際に剰余の定理を使う答案が多かったですが、体でない整域上の一変数多項式に

対して剰余の定理を使う場合は、割る多項式の最高次係数について一言注意して欲しいところです．設問 (2) では、ある元の既約性を論じることになりますが、既約性の証明が抜けているものがほとんどでした．設問 (3) は、剰余と局所化に関する基本性質に慣れている人にとっては、(1) を利用すれば容易だったかもしれません．

選択 3

出題意図：ホモロジー群の問題です．3次元空間内の曲面やそれら共通部分のホモトピー型の把握や、Mayer-Vietoris 完全系列における包含準同型の把握が問われています．

講評：選択した人は概ねよくできていました．(2) は、1次ホモロジー群における包含準同型が零写像になることを見抜けたかどうかで大きく差がつかしました．

選択 4

出題意図：正則値定理を使用できるかどうか、並びに、部分多様体上の関数の微分を計算できるかどうかを問う基礎的な問題です．また、問題に現れる部分多様体がコンパクトではないことにも気づく必要があり、最大・最小問題の技術的な部分が習得できているかも合わせて問うています．

講評：設問 (1) は多くの答案が正則値定理を概ね使用できていましたが、 S が空集合ではないことを確認していない答案も多く見受けられました．設問 (2) は、計算が雑になって求めたい集合の一部分しか得られていない答案が多数見られました．日頃から丁寧に計算する癖をつけるとよいでしょう．最後の設問 (3) については、 S がコンパクトだから最大・最小が存在する、という誤答が少なくありませんでした．部分多様体が式で与えられている場合、その部分多様体がせめてコンパクトかそうでないかを判定することは重要なことです．

選択 5

出題意図：ルベグ積分論における基礎的な事柄への理解を問う問題です．そのため、誘導に乗ることによって最終的な結論に無理なく到達できる設問の構成にしました．

講評：設問 (1) では、手を付けられていない答案が多かったです．

設問 (2) では、ほとんどの受験生がヘルダーの不等式を使うことに気づけていました．

設問 (3) では、級数の収束を広義積分の収束に結び付けられている答案が比較的多かったです．ただ、積分計算に苦戦している答案も見受けられました．

設問 (4) では級数と積分を順序交換できること (あるいはそれに相当すること) の根拠を正確に述べられるかがポイントですが、本設問に取り組んでいる答案では比較的良好で

ていました。

選択 6

出題意図：ヒルベルト空間における内積・射影・弱収束に関する基本的な知識とその適切な運用を問う問題です。

講評：(1) 内積の性質を適切に運用できるか確認しました。比較的よくできていました。

(2) 問題の設定と前問を適切に組み合わせられない答案が多く見受けられました。

(3) 弱収束に関する知識の誤用が見られました。

(4) 正解が少なかったです。弱収束とノルム収束に関する知識の誤用が見られました。

選択 7

出題意図：複素線積分を背景とする問題です。単純ではない極に関する留数計算と、積分経路の取り方が問われています。

講評：設問 (1) は、位数が 3 の極における留数の公式を答える問題であり、受験者にとって取り組みやすい問題だったと思われます。解答には、留数の定義に戻って Laurent 展開から導出するもの、高階の Cauchy の積分公式を適用するもの、条件を確認して留数の公式を適用するものなどがありました。公式をうろ覚えで間違う解答が散見された一方で、Laurent 展開や高階 Cauchy の積分公式を適用する解法では誤りが少なく、原理的に理解することの重要性が表れています。設問 (2) は、(1) で得た留数の公式を実積分に適用する問題でした。積分路の取り方も典型的なものであるため、受験者にとって取り組みやすい問題であったと思われます。一方、選んだ積分路の複素積分が実積分と一致する理由や、選んだ積分路上の複素積分が (1) の積分路上のそれと一致する理由など、根拠を明示しながら論述する必要のある問題でもあったため、記述の質で広く点差がつかしました。単なる計算問題のように見えても、各行の変形がなぜ可能なのかを意識しながら勉強することの重要性が表れています。

選択 8

出題意図：集合論の基礎知識の問題です。整礎性について正しく論理的に扱えるかを問っています。また、順序数と基数の関係について把握しているかも暗に問っています。

講評：基礎論志望者には是非解いて欲しい問題だと思います。また、定義や主張を正しく理解していない解答がありましたので、単に用語を覚えるのではなく内容もしっかり押さえておいてもらいたいです。設問 (1) は多くの解答者が正解しました。設問 (2) がどれくらい解けたかが得点の分かれ目となりました。全体的に求めたい写像 h がどうい

うものなのかイメージできていないと思います。問題を解く前に、簡単な例で実際にどうしたらいいか試してみることを勧めたいです。設問 (3) を解いた人はほとんどいませんでした。

英語 1

T.W. Körner による主に学部生向けに書かれた教科書の一冊から一部を抜粋して、英語による数学の文章の読解力を問う問題です。

講評：設問 (1) は多くの答案が正解でした。設問 (2) については、あまり定理の内容を理解していないと思われる和訳も少なくありませんでした。知らない単語があっても文脈で内容を把握することを念頭において学習されるとよいと思います。設問 (3) においても証明の方針を数学的に概ね理解できていれば、適切な図は描けるはずですが、証明の方針を理解していないと思われる答案が多数見られました。

英語 2

出題意図：解析学の事実に関する日本語の文章を英訳する問題です。英訳に必要な構文の知識や英語の的確な表現力が問われています。

講評：比較的よくできていましたが、文法的に英語の文章をなしていない解答も散見されました。英語による数学の文章では頻出の構文といえますので、身につけておかれるとよいでしょう。そのほか、冠詞の抜けている誤答、Let ... is とした誤答、There exist + (単数名詞) となっている誤答が特に目立ちました。