7th camp on homogenization and its related topics

日時：２０２３年３月２７日（月）－３月３０日
会場：東北大学理学部数学教室２０１号室
　　　（２０９号室をディスカッションルームとして利用可能です）

講演者：
Lorenzo Cavallina 東北大学）, Max von Reneese (Leipzig 大学)，赤木剛朗（東北大学)，石渡聡（山形大学)，上村稔大（関西大学)，大井拓夢（京都大学)，岡大将（東京大学)，土田 兼治（防衛大学)，富崎松代（奈良女子大学)，原宇信（北海道大学)，村井直樹（東京大学）

世話人：
上村稔大（関西大学)、竹田雅好（関西大学)、正宗淳（東北大学)、石渡聡（山形大学）

本研究会は、
科学研究費補助金　基盤研究（C）課題番号 18K03290　代表者：正宗淳
の援助を受けています。

プログラム

	３月２７日
１０：００ – １２：００	Free discussion
１３：００ – １４：００	Cavallina
１４：１０ – １５：００	Uemura1
１５：１０ – １６：００	Ishiwata1
１６：１０ – １７：００	Renesse

	３月２８日	３月２９日
１０：３０ – １１：３０	Uemura2	Ooi2
１３：００ – １４：００	Tsuchida	Tomisaki
１４：２０ – １５：２０	Ooi1	Hara
１５：４０ – １６：４０	Ishiwata2	Ishiwata3
１６：４０ –	Free discussion	Free discussion

	３月３０日
１０：３０ – １１：３０	Oka
１３：００ – １４：００	Akagi
１４：１０ – １４：４０	Murai

タイトル・アブストラクト

3月27日（月）

１０：００－１２：００　Free discussion

１３：００－１４：００　Lorenzo Cavallina（東北大学）

題目：　複合媒質における優決定問題について

概要：

本講演では、腐食による不完全な接触を有する二相複合媒質の数理モデルについて述べる。Dirichlet 及び Neumann 境界条件の双方を課した楕円型偏微分方程式における Serrin 型優決定(過剰決定) 問題を考える。本優決定問題の解は二つの境界条件を同時に満たさなければならないため、可解性は複合媒質の幾何学的形状(すなわち、境界及び両相の界面の幾何学的形状)と深く関連していることに注意する。本優決定問題が可解となる自明な例として、境界と界面が同心球面である場合（いわゆる「自明解」）が挙げられる。

本講演では、本優決定問題の非自明解の幾何学的形状を考察することを目的とする。また、時間の許す限り、解の数値計算についても触れてみたい。

本講演は谷地村 敏明 氏（京都大学)との共同研究に基づく。

１４：１０－１５：００　上村稔大(Toshihiro Uemura)（関西大学）

題目

飛躍を持つ Ornstein-Uhlenbeck 半群のコンパクト性について

概要：

ユークリッド空間上の Ornstein-Uhlebeck 半群がガウス測度を基礎の測度とするL^p空間においてコンパクト性を持つことはよく知られている．ここでは，Ornstein-Uhlenck 作用素に飛躍項を加えてもコンパクト性が保存されるということを紹介する．一つ目の発表において，ガウス測度基礎とするL^p空間上に Ornstein-Uhlebeck 半群を定義して様々な性質を紹介す

る．そうして L^p-生成作用素（Ornstein-Uhlenbeck 作用素と呼ぶ）と定義域，とくにその芯(core)を導出する．また，対応する Dirichlet 形式を計算して，その定義域が weighted Sobolev 空間と一致することを見る．その結果，L^2-空間にコンパクトに埋め込まれることを示す．時間があれば Ornstein-Uhlebeck 半群の固有値が非負整数であること，さらに対応する固有関数を具体的に書き下せることを併せて紹介する．

二つ目の発表では，Ornstein-Uhlebeck 作用素に飛躍項を加えた際にコンパクト性が保存されることを紹介する．

１５：１０－１６：００　石渡聡（Satoshi Ishiwata）（山形大学）
題目：Discrete approximation of a non-symmetric diffusion on a Riemmanian manifold
概要：
In this first talk, I will give an overview of our recent result on a discrete approximation of a non-symmetric diffusion on a Riemannian manifold.
The contents of this talk is based on a joint work with Hiroshi Kawabi (Keio).

16:10-17:00　Max von Renesse (Leiptig University)

題目：TBA

概要：TBA

３月２８日（火）
１０：３０－１１：３０　上村稔大(Toshihiro Uemura)（関西大学）

題目
飛躍を持つ Ornstein-Uhlenbeck 半群のコンパクト性について

概要：

ユークリッド空間上の Ornstein-Uhlebeck 半群がガウス測度を基礎の測度とするL^p空間においてコンパクト性を持つことはよく知られている．ここでは，Ornstein-Uhlenck 作用素に飛躍項を加えてもコンパクト性が保存されるということを紹介する．一つ目の発表において，ガウス測度基礎とするL^p空間上に Ornstein-Uhlebeck 半群を定義して様々な性質を紹介する．そうして L^p-生成作用素（Ornstein-Uhlenbeck 作用素と呼ぶ）と定義域，とくにその芯(core)を導出する．また，対応する Dirichlet 形式を計算して，その定義域が weighted Sobolev 空間と一致することを見る．その結果，L^2-空間にコンパクトに埋め込まれることを示す．時間があれば Ornstein-Uhlebeck 半群の固有値が非負整数であること，さらに対応する固有関数を具体的に書き下せることを併せて紹介する．
二つ目の発表では，Ornstein-Uhlebeck 作用素に飛躍項を加えた際にコンパクト性が保存されることを紹介する．

１３：００－１４：００　土田兼治（Kaneharu Tsuchida）（防衛大学）

題目
正値加法汎関数の収束について

概要
本講演では、滑らかな測度列に対応する正値加法汎関数列の収束について述べる。
滑らかな測度の一つのクラスである有限エネルギー積分の測度には
その 1-ポテンシャルが存在する。
そのクラスの測度列の 1-ポテンシャルの意味での収束性から
対応する正値加法汎関数列のある収束性が導かれることを述べる。
さらに、その結果を適用して一般の滑らかな測度列に対応する
正値加法汎関数列の収束についての結果を述べ、最後に具体的な例を紹介する。
本講演は、西森康人(阿南高専)、富崎松代(奈良女子大)、上村稔大(関西大)

との
共同研究である。

１４：２０－１５：２０　大井拓夢（Takumu Ooi）（京都大学）
題目: Convergence of some time-changed processes by GMC

概要: GMC (ガウス乗法カオス)とはガウス場を用いて定義されるランダムな測度である。本講演では GMC で時間変更したマルコフ過程の収束について述べる。特に、Liouville ブラウン運動の 1 次元 α 安定過程版と、GMC で時間変更した Z^2 上の単純ランダムウォークのスケール極限について考える。

１５：４０－１６：４０　石渡聡（Satoshi Ishiwata）（山形大学）
題目：Discrete approximation of a non-symmetric diffusion on a Riemmanian manifold
概要：２回目の講演では Banach 空間上の作用素が半群の生成作用素であるための必要十分条件を与える Lumer-Phillips の定理の証明や、
消散的（dissipative)作用素 の性質について解説する。

１６：４０－　フリーディスカッション
３月２９日（水）
１０：３０－１１：３０　大井拓夢（Takumu Ooi）（京都大学）

題目: Convergence of some time-changed processes by GMC

概要: GMC (ガウス乗法カオス)とはガウス場を用いて定義されるランダムな測度である。本講演では GMC で時間変更したマルコフ過程の収束について述べる。特に、Liouville ブラウン運動の 1 次元 α 安定過程版と、GMC で時間変更した Z^2 上の単純ランダムウォークのスケール極限について考える。

１３：００－１４：００　富﨑 松代（Matsuyo Tomisaki）（奈良女子大学）

Remarks on Mosco convergence of symmetric diffusion processes with degenerating (singular) potentials

Matsuyo Tomisaki

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上で次のような 2 次形式を考える.

$$\mathcal{E}^n(u,v) = \int_{\mathbb{R}^d} A(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} u(x)v(x)\,k^n(dx), \quad u,v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \tag{1}$$

ただし $A(x) = (a_{ij}(x))$ は次の条件を満たす $\mathbb{R}^d$ 上の $d \times d$ 対称行列値可測関数である.

$$\exists\alpha,\ \beta > 0 \text{ s.t. } \alpha|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \beta|\xi|^2, \quad x,\ \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

k^n は非負ボレル測度で次の条件を満たすものとする.

$$\exists C_n > 0 \text{ s.t. } \left|\int_{\mathbb{R}^d} u(x)v(x)\,k^n(dx)\right| \le C_n\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad u,v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{3}$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $(\mathcal{E}^n, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の可閉対称形式で, その閉包は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の正則な局所ディリクレ形式であり, その定義域はソボレフ空間 $H^1(\mathbb{R}^d)$ に一致する. 次の評価式が成り立つ.

$$|\mathcal{E}^n(u,v)| \le (\beta \vee C_n)\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}, \tag{4}$$

$$\mathcal{E}_1^n(u,u) = \mathcal{E}^n(u,u) + \int_{\mathbb{R}^d} u(x)^2\,dx \ge (\alpha \wedge 1)\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}. \tag{5}$$

任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し次の方程式の解 u_n が一意的に存在する.

$$\mathcal{E}_1^n(u_n,\varphi) = (f,\varphi), \quad \forall\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{6}$$

$\{u_n\}$ に対して次の評価が得られる.

$$\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}/(\alpha \wedge 1). \tag{7}$$

したがって $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ と, $H^1(\mathbb{R}^d)$ において u_0 に弱収束するような部分列 $\{u_{n_k}\}$ が存在する. u_0 がどのような関数か？　$k^n(dx)$ が次式で与えられている場合に, この問題について考える.

$$k^n(dx) = \sum_{i\in\Lambda} c_i n^{\gamma_i} 1_{B(a_i,1/n)}(x)\,dx. \tag{8}$$

ただし $\Lambda^\# \le \infty$, $c_i > 0$, $\sum_{i\in\Lambda} c_i < \infty$, $\gamma_i > 0$, $\overline{\gamma} := \sup_{i\in\Lambda}\gamma_i < \infty$, $B(a_i,1/n)$ は中心 a_i, 半径 $1/n$ の球で $|a_i - a_j| \ge \kappa$ $(i \ne j)$ を満たす (κ は i,j,n と無関係な正定数). k^n は (**??**) を満たす.

定理 (Uemura 2022) $\overline{\gamma} < d$ を仮定する. このときディリクレ形式の列 $\{(\mathcal{E}^n, H^1(\mathbb{R}^d)\}$ は, $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の次のディリクレ形式 $(\mathcal{E}^0, H^1(\mathbb{R}^d))$ に Mosco 収束する.

$$\mathcal{E}^0(u,v) = \int_{\mathbb{R}^d} A(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx, \quad u,v \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{9}$$

$\overline{\gamma} \ge d$ の場合はどうなるか？この問題について現在得られている結果を紹介する.

１４：２０－１５：２０　原　宇信（Takanomu Hara）（北海道大学）

題目：Homogenization of continuous superharmonic functions on perforated domains

概要：Poisson 方程式の斉次 Dirichlet 境界値問題を多孔質領域上で考察する．連続な弱解の存在とその $L^¥infty$ 評価のための外力の条件について述べる．解の大域的なエネルギー有限性は仮定しない．結果を領域形状の均質化問題へ応用し，いわゆる「strange term」が生じることを確認する．

１５：４０－１６：４０　石渡聡（Satoshi Ishiwata）（山形大学）
題目：Discrete approximation of a non-symmetric diffusion on a Riemmanian manifold
概要：３回目の講演では Lumer-Phillips の定理の応用として、完備リーマン多様体上のドリフト付きシュレディンガー作用素において、 多様体上に Laplacian cutoff function の列があり、ドリフトのノルムが抑えられていれば半群を生成することを解説する。

３月３０日（木）
１０：３０－１１：３０　岡 大将（Tomoyuki Oka）（東京大学）

題目
Homogenization problem with nonlinear boundary conditions and its application to topology optimization

概要
本講演では，非線形境界条件を伴う均質化問題について考察する．均質化問題は，周期的に振動するような係数行列場を伴う偏微分方程式に対して，周期パラメータに関する極限問題を考え，極限方程式を意味する均質化方程式や解の漸近挙動について考察する問題として一般に知られている．本講演で

は，係数行列場に課される周期性を取り払い，より一般の設定に於ける均質化定理及び，トポロジー最適化への応用について紹介する．トポロジー最適化は，考察対象となるエネルギーを最小化する（必ずしも連結とは限らない）領域について考察する問題であり，本講演では，拡散係数の異なる二材料から成る複合材料に対して，その材料配置について考察する．さらに，最適領域に対する存在性について言及した上で, Robin 境界条件と非線形境界条件の違い，すなわち，境界条件の線形性と非線形性の違いによって，得られる領域がどのように変化するかについて焦点を当てる．
なお，本講演は喜多航佑氏(早稲田大学)及び，松島慶氏(東京大学)との共同研究に基づく．

１３：００－１４：００　赤木剛朗（Goro Akagi）（東北大学）

題目：Rate of convergence to asymptotic profiles for fast diffusion on domains via an energy method

概要：This talk is concerned with the Cauchy-Dirichlet problem for fast diffusion equations on bounded domains. It is well known that every weak solution vanishes in finite time at the unique power rate, and therefore, asymptotic profiles for such vanishing solutions are defined as a limit of rescaled solutions, which solve the Cauchy-Dirichlet problem for a fast diffusion equation with a blow-up reaction. Asymptotic profiles are characterized as nontrivial equilibria of the rescaled problem (see pioneer works of Berryman and Holland in 1980s and subsequent results for qualitative results). Recently, Bonforte and Figalli (CPAM, 2021) established a quantitative result on the convergence of rescaled solutions to nondegenerate positive asymptotic profiles. More precisely, they proved an exponential convergence of nonnegative rescaled solutions to nondegenerate positive asymptotic profiles in a weighted L^2 space with a sharp rate (in view of some linearized analysis) by developing a nonlinear entropy method. In this talk, we present a different approach to prove exponential convergence with rates for nondegenerate asymptotic profiles. In particular, we can directly verify an H^1_0 convergence with the sharp rate. Our method of proof is based on an energy method rather than entropic one, and a key ingredient is a quantitative gradient inequality established based on an eigenvalue problem with weights.

１４：１０－１４：４０　村井直樹(Naoki Murai)（東京大学）

題目：
Application of a high contrast homogenization method to designs for electromagnetic metamaterials

概要：均質化法を用いた電磁メタマテリアルの設計について紹介する．電磁メタマテリアルは電磁波の波長以下の大きさの構造における共振現象を利用することで，負の有効材料定数が得られ特異な電磁波応答を示すことが知られている．本講演では，電磁メタマテリアルを設計するために，周期的な二材料に対してその代表元を意味するユニットセルの位相と形状を最適化する．より詳細には，高材料定数比均質化法によってヘルムホルツ方程式から導出される均質化方程式を用いて電磁メタマテリアルの最適設計問題を定式化する．設計例として異なるユニットセル構造から成る周期構造を複数配置した電磁メタマテリアルを紹介する．