令和 5 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

数学　共通問題

令和 4 年 8 月 18 日（9 時 30 分 から 12 時 まで）

注意事項

1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと．
2) 問題は 4 題ある．全問に解答すること．
3) 解答は各問題ごとに指定された解答用紙を用いること．
4) 受験番号を（　）内に記入すること．また，氏名は書かないこと．
5) 問題冊子は，このページを含め全 3 ページである．

記号

$\mathbb{Z}$：整数全体のなす集合

$\mathbb{Z}_{>0}$：正の整数全体のなす集合

$\mathbb{Q}$：有理数全体のなす集合

$\mathbb{R}$：実数全体のなす集合

$\mathbb{C}$：複素数全体のなす集合

$\boxed{1}$ $V = M_3(\mathbb{R})$ を3次実正方行列全体のなす実ベクトル空間とし，V の部分空間 W を

$$W = \{A \in V \mid {}^tA = -A\}$$

と定める．ただし，${}^tA$ は行列 A の転置行列を表す．以下の問いに答えよ．

(1) W の基底を含むような V の基底を1組求めよ．

(2) $R \in M_3(\mathbb{R})$ を固定して，線形写像 $f : V \to V$ を $f(X) = {}^tRXR$ と定める．このとき，$f(W) \subset W$ であることを示せ．

(3) $R = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．この R に対して (2) で定めた写像 f の W への制限を g とする．このとき，(1) で求めた W の基底に関する g の表現行列 S を求めよ．

(4) (3) で求めた行列 S の固有値をすべて求めよ．

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}$ の部分集合族 $\mathcal{O}_1$ を

$$\mathcal{O}_1 = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$$

と定める．$\mathcal{O}_1$ が $\mathbb{R}$ 上の位相（開集合系）となることは認めてよい．以下の問いに答えよ．

(1) 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_1)$ はハウスドルフか，連結か，それぞれ答えよ．根拠も述べること．

(2) $\mathcal{O}_2$ を $\mathbb{R}$ 上の通常のユークリッド距離位相とし，$\mathcal{O}$ を $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_1)$ と $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_2)$ の直積位相とする．ただし，$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の第1成分の $\mathbb{R}$ の位相が $\mathcal{O}_1$，第2成分の $\mathbb{R}$ の位相が $\mathcal{O}_2$ として直積位相を考える．$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y > 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とおく．A は $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ の開集合であるか，また，B は $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ の閉集合であるか，それぞれ答えよ．根拠も述べること．

(3) B は $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ のコンパクト集合であるか答えよ．根拠も述べること．

3 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

とおく．α を実数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば，$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ であることを示せ．

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しないが, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するような実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の例を挙げよ．また, その理由も述べること．

(3) 正の整数 n に対して $c_n = a_n - a_{n-1}$ とおく．ただし，$a_0 = 0$ とする．
$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ かつ $\lim_{n\to\infty} nc_n = 0$ ならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であることを示せ．

4 以下の問いに答えよ．ただし，関数はすべて実数値であるとする．

(1) $\mathbb{R}$ の空でない開区間 I 上で定義された連続関数からなる関数列 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は I 上で定義された関数 $g(x)$ に I 上で一様収束するものとする．このとき，$g(x)$ は I 上で連続であることを示せ．

(2) 関数 $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数で, 次の (a),(b),(c) をみたすとする．

(a) $f(0) = 0$.

(b) ある実数 $L > 0$ が存在して, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = L$.

(c) ある実数 $M > 0$ が存在して，任意の実数 x に対して $|f(x)| \leq M$ が成り立つ．

このとき，関数 $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(nx)}{n^2}$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束し連続であることを示せ．

(3) (2) で定めた関数 $F(x)$ は $x = 0$ で微分可能ではないことを示せ．