令和 4 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

$\boxed{\text{数学 − 共通問題}}$

令和 3 年 8 月 19 日（9 時 30 分 から 12 時 まで）

注意事項

1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと．
2) 問題は 4 題ある．全問に解答すること．
3) 解答は各問題ごとに指定された解答用紙を用いること．
4) 受験番号を（　）内に記入すること．また，<u>氏名は書かないこと</u>．
5) 問題冊子は，このページを含め全 4 ページである．

記号

$\mathbb{Z}$：整数全体のなす集合

$\mathbb{Z}_{>0}$：正の整数全体のなす集合

$\mathbb{Q}$：有理数全体のなす集合

$\mathbb{R}$：実数全体のなす集合

$\mathbb{C}$：複素数全体のなす集合

$\boxed{1}$ A を次の二条件を満たすような実 3 次正方行列とする．

(i) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は $(A-2I)^2 v = 0$ かつ $(A-2I)v \neq 0$ を満たす．ここで I は 3 次単位行列である．

(ii) $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ はともに A の固有値 2 の固有ベクトルである．

以下の問いに答えよ．

(1) $(p,q) \neq (0,0)$ を満たす実数 p, q で，$(A-2I)v = pe_2 + qe_3$ を満たすものが存在することを示せ．

(2) 前問で得られた実数 p, q について，$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ p & 2 & 0 \\ q & 0 & 2 \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{2}$ $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $b \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$A_{n,b} = \{5^n t + b \,|\, t \in \mathbb{Z}\}$$

とおく．$\mathbb{Z}$ の部分集合族 $\mathcal{B} = \{A_{n,b} \,|\, n \in \mathbb{Z}_{>0}, b \in \mathbb{Z}\}$ に対し，$\mathcal{O}$ を $\mathcal{B}$ を開基とする $\mathbb{Z}$ の位相（開集合系）と定める．

(1) $A_{1,3}$ が位相空間 $(\mathbb{Z}, \mathcal{O})$ の閉集合であることを示せ．

(2) 位相空間 $(\mathbb{Z}, \mathcal{O})$ がハウスドルフであることを示せ．

(3) $f\colon (\mathbb{Z}, \mathcal{O}) \to (\mathbb{Z}, \mathcal{O})$ を以下で定める．$x \in \mathbb{Z}$ に対し，$x \in A_{1,0}$ のとき $f(x) = \frac{x}{5}$，それ以外のとき $f(x) = x$．このとき，f が連続であるかどうか，理由とともに答えよ．

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を開区間 $I=(a,b)$ 上で無限回微分可能な関数とする．ある実数 $A, B>0$ が存在して

$$\sup_{x\in I}|f^{(n)}(x)| \le AB^n n! \qquad (n\in\mathbb{Z}_{>0})$$

が成り立つとする．任意の $x_0, x\in I$ に対して，もし $|x-x_0|<1/B$ ならば，級数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

は絶対収束し，$f(x)$ と等しくなることを示せ．

(2) 任意の $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ および実数 $-1<x<1$ に対して，次の等式を示せ．

$$\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n}$$

(3) $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ を実数列とし，$r>0$ を実数とする．各 $x\in(-r,r)$ に対して級数

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$$

が収束するならば，ある実数 $A, B>0$ と原点の近傍 $J\subset(-r,r)$ が存在して

$$\sup_{x\in J}|g^{(n)}(x)| \le AB^n n! \qquad (n\in\mathbb{Z}_{>0})$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{4}$ $L>0$ とする．$t \in [0,L)$ に対し，

$$I(t)=\int_0^\infty e^{-x^2}\cosh(tx)\,dx, \quad J(t)=\int_0^\infty xe^{-x^2}\sinh(tx)\,dx$$

とおく．ただし，$\sinh(x)$ と $\cosh(x)$ はそれぞれ

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

で定義される関数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $I(0)$ を求めよ．

(2) 広義積分 $I(t)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cosh(tx)\,dx$ と $J(t)=\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\sinh(tx)\,dx$ はともに t に関し $[0,L)$ 上で一様収束することを示せ．

(3) $t \in (0,L)$ に対して $I'(t)=\dfrac{t}{2}I(t)$ が成り立つことを示せ．

(4) $I(t)$ を求めよ．