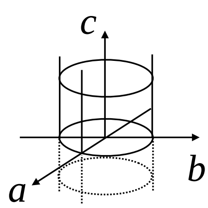
3 おわりに

答えを発表します．冒頭の today's big question への答えは，**Möbius**(メビウス)**の帯**でした．$a=\pm\infty$ に置かれた二つの c 軸が，逆方向で接着されている様子が，中間クイズ i. でメビウスの帯を表す図と似ていることに気づけるかどうかがポイントでした．

予想と合っていたでしょうか? 外れていても気落ちすることはありません．出題者でも，おちついて計算しながら考えて，ようやくわかることですから．

ただ，この手のことは特別なひらめきや直観がなければできない類のことではないことをお伝えしたいと思います．大学で学ぶ「さまざまな空間やそれらに対する操作」，「抽象的な考え方の手法」などの助けを借りながら理詰めで分かるようになります．

■さらなるクイズ i. 「高校の直線の方程式」$ax+by+c=0$ から同じ結論を導いてみよう．この場合はすべての直線が視界にとらえられているので，問題はダブりを取り除くこととなる．



(1) まず，abc-空間内で $a^2+b^2=1$ を満たす点からなる筒を考える．この筒の表面にある (a,b,c) のみを考えることにすると，ダブりはかなり減っている．どのようなダブりが残っているか?

(2) そのダブりを解消すると Möbius の帯が得られる．説明せよ!

ii. (地図の貼り合わせ.) 「大日本沿海輿地全図」のように，複数枚の小地図で全体を覆うことにより，全体の形を知るということもできる．

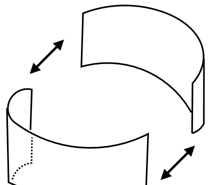
x 軸と y 軸の役割を入れ替えて，$x=\bar{a}y+\bar{b}$ の形で直線を表すことを考える．y 軸に平行な直線は $\bar{a}=0$ の場合として表すことができる．こうして，二つのタイプの方程式

$$y=ax+b \qquad \text{or} \qquad x=\bar{a}y+\bar{b}$$

ですべての直線をカバーできる．ab-平面と $\bar{a}\bar{b}$-平面という 2 枚の小地図で，直線すべてを載せた地図が覆えるということである．問題は，両方の小地図の重なり部分がどうなっているかである．

(i) 上のふたつの方程式が同じ直線を表す場合の，a,b の組と $\bar{a},\bar{b}$ の組の関係式を計算せよ．

(ii) ab-平面内の直線 "$b=2a$" 上で点が $a\to+\infty$ の方向に動くとき，対応する点が $\bar{a}\bar{b}$-平面ではどう見えるか考えてみよう．直線 "$b=4$" ではどうか? また，a の動く方向が $a\to-\infty$ のときでは?



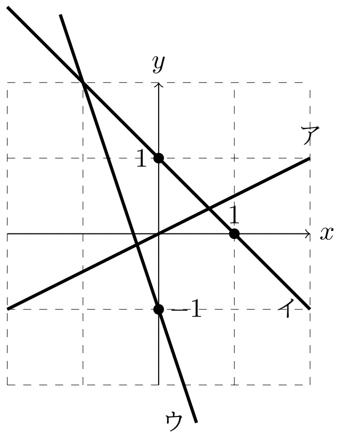
(iii) ab-平面と $\bar{a}\bar{b}$-平面で対応する点どうしを重ね合わせると，メビウスの帯が得られることを結論してみよう．

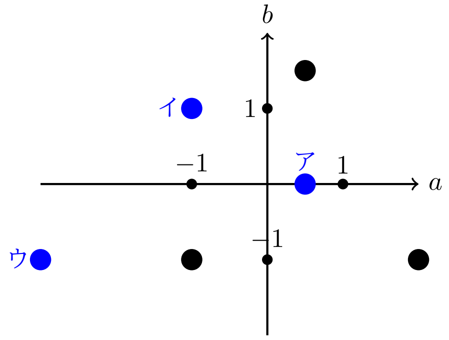
このクイズには絶対の正解というものはありませんが，理学部ホームページ内の出題者のページ `https://www.math.tohoku.ac.jp/~kaiw` に解答例を掲載します．

4 クイズの答え

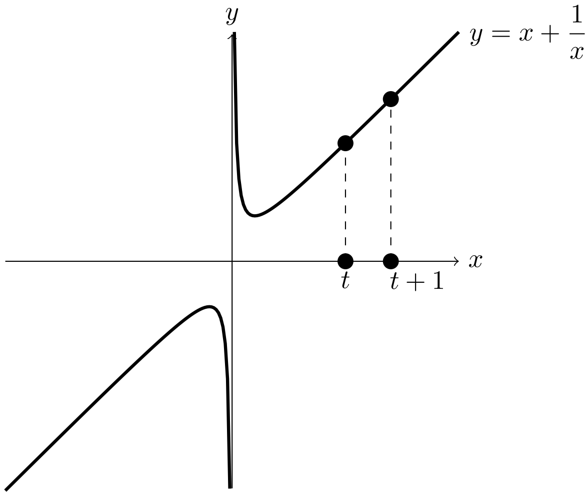
■オープニング クイズ 「大日本沿海輿地全図」を構成する小地図は, **214** 枚でした.

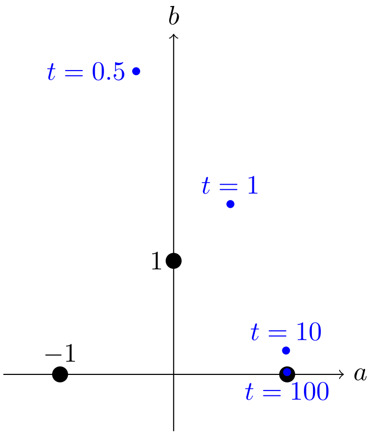
■肩ならしクイズ i.



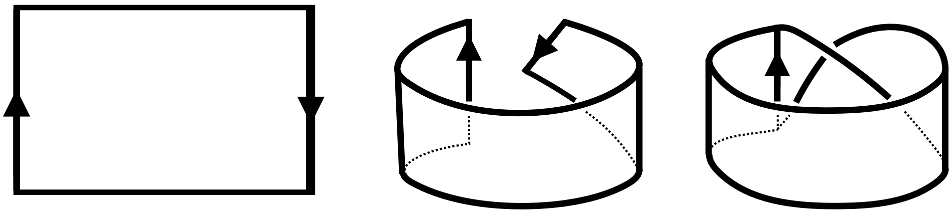


ii. 直線の式は $y = (1 - \frac{1}{t(t+1)})x + (\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1})$ ですので, これに沿って点をプロットすることになります.



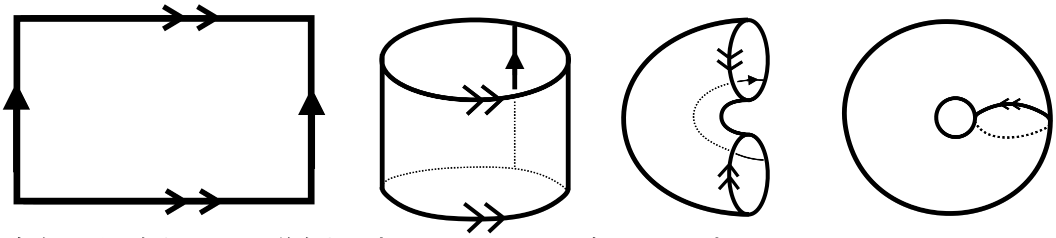


■中間クイズ i. 左辺と右辺を「逆方向」で接着すると, メビウスの帯になります.



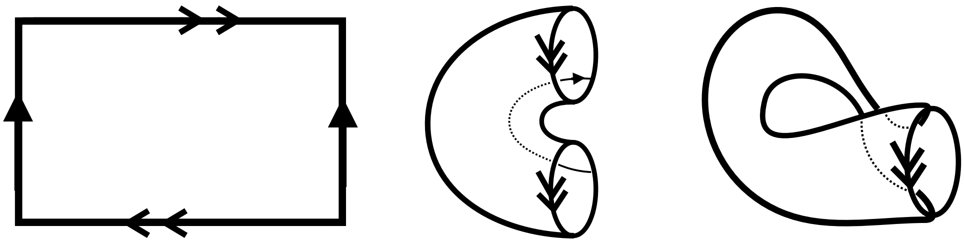
メビウスの帯

(参考) 左右だけでなく, 上下も同じ向きで別個に接着すると, ドーナツ型.



ドーナツ型

ii. 左右は同じ向き, 上下を逆向きにすると, クラインの壺になります.



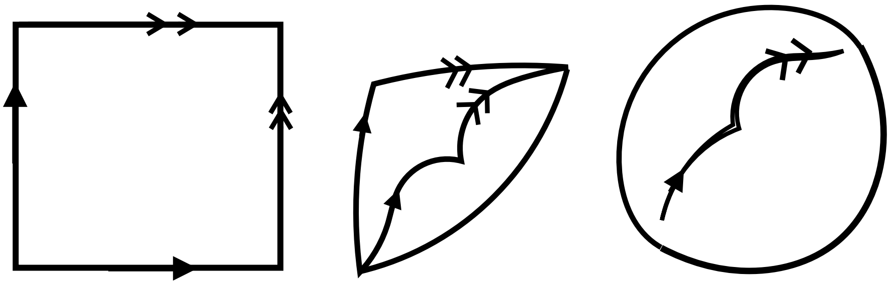
クラインの壺

(じつはこの 2 次元図形は,

3 次元空間内に

キチンと描けない.)

iii. 隣り合った辺を接着することもできます.



球面

■本命クイズ i. $(c, 1)$ を通る傾き a の直線の式は $y = a(x - c) + 1$ つまり $y = ax + (-ac + 1)$ なので, ab-平面のなかの直線 “$b = -ac + 1$” を描きます. この直線を $a \to +\infty$ または $a \to -\infty$ 方向に動く様子を描くことになります.