平成 28 年度 東北大学理学部数学科 オープンキャンパス
2016 年 7 月 27 日 (水), 28 日 (木) 14:00–16:00

数学クイズ 〜三角形と不等式〜

三角形の存在条件

$a,\ b,\ c > 0$ を正の数とする．三辺の長さが $a,\ b,\ c$ である三角形が存在するための必要十分条件は，

$$a < b + c \quad \text{かつ} \quad b < a + c \quad \text{かつ} \quad c < a + b$$

が成立することである．

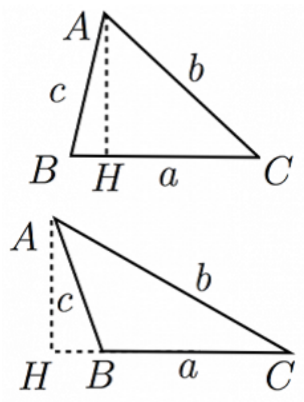

図 1

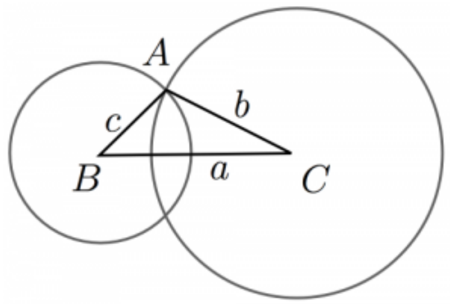

図 2

問題 1. 三角形の辺の長さ $a,\ b,\ c$ は，

$$a(b + c - a) < 2bc$$

を満たすことを示せ．

不等式は b と c について対称なので，一般性を失うことなく $c \leqq b$ であると仮定して良いです．$a \leqq b$ の場合と $a \geqq b$ の場合で場合分けし，三角形の存在条件を用いて示します．

問題 2. $a, b,\ c > 0$ は，

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4)$$

を満たすとする．このとき，$a,\ b,\ c$ を三辺の長さとする三角形が存在することを示せ．

$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4) > 0$ ですので，左辺を（三角形の存在条件が現れるように）上手く因数分解してみましょう．

問題 3. 三角形の辺の長さ $a,\ b,\ c$ は，

$$(b + c - a)(a + b - c)(c + a - b) \leqq abc$$

を満たすことを証明せよ．

再配列不等式

増加するように並べられた 2 つの実数の組

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n, \qquad b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_n$$

を考える．$(a_1,\, a_2,\, \ldots, a_n)$ の順序を任意に並べ換えたものを $(a'_1,\, a'_2, \ldots, a'_n)$ とすると，

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geqq a'_1b_1 + a'_2b_2 + \cdots + a'_nb_n \\ &\geqq a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1b_n \end{aligned}$$

が成立する．

例えば $n = 2$ のときは，

$$a_1b_1 + a_2b_2 - a_2b_1 - a_1b_2 = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \geqq 0$$

となって主張が成立します．以下の問題 5, 6 では，$n = 3$ の場合を用います．

問題 4. $c \leqq b \leqq a$ を三角形の辺の長さとする．このとき，

$$a(b + c - a) \leqq b(a + c - b) \leqq c(a + b - c)$$

が成立することを示せ．

問題 5. 三角形の辺の長さ $a,\ b,\ c$ は，

$$a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \leqq 3abc$$

を満たすことを証明せよ．

この不等式の両辺は a, b, c について対称なので，一般性を失うことなく $c \leqq b \leqq a$ と仮定して良いです．問題 4 と再配列不等式を使って示すことができます．

問題 6. $c \leqq b \leqq a$ を三角形の辺の長さとする．このとき，

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geqq 0$$

が成立することを示せ．

問題 4 と $\dfrac{1}{a} \leqq \dfrac{1}{b} \leqq \dfrac{1}{c}$ であることより，再配列不等式を用いて，

$$\frac{a(b - a)}{c} + \frac{b(c - b)}{a} + \frac{c(a - c)}{b} \leqq 0$$

を示します．これより両辺に abc をかけることで主張が従います．

参考文献・画像引用元

[1] 『美しい不等式の世界 –数学オリンピックの問題を題材として–』，佐藤淳郎 (訳)，朝倉書店．

[2] 高校数学の美しい物語 ～定期試験から数学オリンピックまでの 800 記事～
http://mathtrain.jp/seiritu