平成 28 年度 東北大学理学部数学科 オープンキャンパス
2016 年 7 月 27 日 (水), 28 日 (木) 14:00–16:00

数学クイズの解答例

問題 1. 不等式は b と c について対称なので，一般性を失うことなく $c \leqq b$ であると仮定して良い．以下，$a \leqq b$ と $a \geqq b$ の場合で場合分けをして考える．

$a \leqq b$ のとき，$b/a \geqq 1$ および $b < a + c$ より，

$$b + c - a = c + (b - a) < 2c \leqq 2c \cdot \frac{b}{a}$$

が成立する．よって $a(b + c - a) < 2bc$ が成立する．

$a \geqq b$ のとき，$a - b \geqq 0$ および $a < b + c \leqq 2b$ より，

$$b + c - a = c - (a - b) \leqq c < c \cdot \frac{2b}{a}$$

が成立する．よって $a(b + c - a) < 2bc$ が成立する．

問題 2. 因数分解すると，

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4) = (a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) > 0$$

が成立する．これより，$a < b + c,\ b < a + c,\ c < a + b$ が従う．

問題 3.

$$x = \frac{a + c - b}{2} > 0, \quad y = \frac{a + b - c}{2} > 0, \quad z = \frac{b + c - a}{2} > 0$$

とおくと，

$$a = x + y, \quad b = y + z, \quad c = z + x$$

が成立する．従って，示すべき不等式は，

$$8xyz \leqq (x + y)(y + z)(z + x)$$

となる．相加平均・相乗平均の関係より，

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geqslant 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx} = 8xyz$$

となり，上記の不等式が成立することがわかる．

問題 4. 左側の不等式に関しては，

$$\begin{aligned} a(b + c - a) \leqq b(a + c - b) &\iff ab + ac - a^2 \leqq ab + bc - b^2 \\ &\iff a^2 - b^2 - ac + bc \geqq 0 \\ &\iff (a - b)(a + b - c) \geqq 0 \end{aligned}$$

となり成立することがわかる．右側の不等式に関しても同様である．

問題 5. 示すべき不等式の両辺は a, b, c について対称なので，一般性を失うことなく

$$c \leqq b \leqq a$$

と仮定して良い．このとき，問題 4 より，

$$a(b+c-a) \leqq b(a+c-b) \leqq c(a+b-c)$$

が成立する．従って，再配列不等式より，

$$\begin{aligned}&a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\\&\quad\leqq b\cdot a(b+c-a)+c\cdot b(a+c-b)+a\cdot c(a+b-c),\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}&a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\\&\quad\leqq c\cdot a(b+c-a)+a\cdot b(a+c-b)+b\cdot c(a+b-c),\end{aligned}$$

が成立することがわかる．辺々をそれぞれ加えると，

$$2\left\{a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\right\} \leqq 6abc$$

となり，主張が従う．

問題 6. 問題 4 と仮定より，

$$\frac{1}{a} \leqq \frac{1}{b} \leqq \frac{1}{c}, \quad a(b+c-a) \leqq b(a+c-b) \leqq c(a+b-c)$$

が成立する．従って，再配列不等式より，

$$\begin{aligned}a+b+c &= (b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)\\&=\frac{1}{a}\cdot a(b+c-a)+\frac{1}{b}\cdot b(c+a-b)+\frac{1}{c}\cdot c(a+b-c)\\&\geqq \frac{1}{c}\cdot a(b+c-a)+\frac{1}{a}\cdot b(c+a-b)+\frac{1}{b}\cdot c(a+b-c)\\&=\frac{a(b-a)}{c}+\frac{b(c-b)}{a}+\frac{c(a-c)}{b}+a+b+c\end{aligned}$$

が成立し，これより，

$$\frac{a(b-a)}{c}+\frac{b(c-b)}{a}+\frac{c(a-c)}{b} \leqq 0$$

がわかる．両辺に abc をかけることで主張が従う．

参考文献

[1] 『美しい不等式の世界 –数学オリンピックの問題を題材として–』，佐藤淳郎 (訳)，朝倉書店．