東北大学理学部オープンキャンパス数学科

数学クイズ 2014　問題

文責：見村万佐人

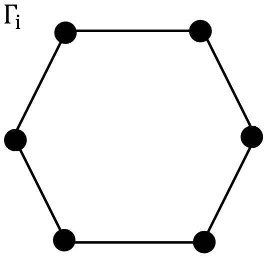
オープンキャンパスの数学科のイベントへようこそ！！今年の数学クイズでは，$\boxed{\text{「色つき基点付きグラフの極限」}}$という最近大変ホットな現代数学のトピックについて，高校生の皆さんにも手が出せるように味付けをして出題します．とはいっても聞きなれない用語がいろいろあるので，最初に用語を紹介します．

まず“色づけ”のない「**グラフ**」について述べます．ここでいう「グラフ」とは，“$y=f(x)$ のグラフ”というときの“グラフ”とは別物で，例えばインターネットによる「ネットワーク」などを数学的に記述したものだとイメージして下さい．**グラフ** Γ（ガンマ）は，**頂点集合** V と**辺集合** E からなります．異なる 2 つの頂点に対し，その 2 つの頂点を結ぶ辺が 1 つあるか，または，まったくないかのどちらかです．1 つあるとき，その 2 つの頂点は**辺で結ばれている**といいます．各頂点は「ネットワークにおける拠点」，各辺は「拠点たちを結ぶネットワーク」だと思ってもらえるとイメージがわきやすいと思います．頂点，辺がともに有限個しかないグラフのことを**有限グラフ**といいます．そうでないものを**無限グラフ**といいます．今回の設定では，頂点の個数が有限個でおさまらないようなグラフと思ってよいです（イメージとしては，“無限に続いている”グラフのことです）．ここでは有限グラフも無限グラフも両方扱います．今回の数学クイズでは，扱うグラフが更に以下の 2 つの条件をともに満たしている場合のみを考えます．

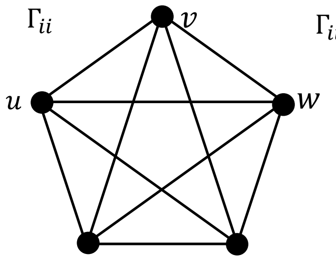
- どの 2 つの異なる頂点をとってきても，それらの間を辺たちをたどることで行き来ができるとします．こういうグラフを**連結な**グラフといいます．ネットワークで言えば，「どの 2 つの拠点の間もネットワークをたどることよってやりとりができる」ということです．
- どの頂点に対しても，その頂点と辺で結ばれている頂点の個数は一定値とします．こういうグラフを**正則な**グラフといい，この一定値をグラフの**次数**といいます．ネットワークで言えば「どの拠点から出ているネットワークの数も一定値」ということです．

例.　黒丸でグラフの頂点を書くとき，次ページのようなグラフたちがあります．

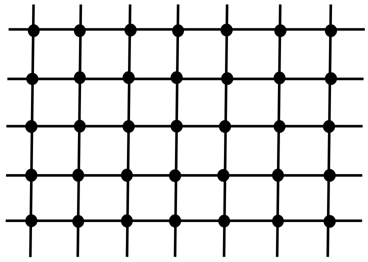
Γ_{i}



Γ_{ii}



Γ_{iii}



Γ_i は頂点数が 6，辺数が 6，次数が 2 の有限グラフです．Γ_{ii} は頂点数が 5，辺数が 10，次数が 4 の有限グラフです．Γ_{iii} は一部分にしか書いていませんが上下左右どちらの方向にも無限に続いている無限グラフで，次数は 4 となります．

（注意）：Γ_{ii} を見て「おや」と思った人もいるかもしれません．このグラフを平面に図示するときに一部の辺が交差しているように見えますが，グラフを考えるときには辺同士は交差していないとして考えます (平面に書こうと思うと交差してしまっているようにしか書けないだけです)．グラフをネットワークだと思えば，現実世界だとケーブルを垂直方向に少しずらせば交差は回避できるわけで，ここでもそのように見ています．ですので，Γ_{ii} は，“頂点数 10，辺数 20”のグラフではなく，「頂点数 5，辺数 10」のグラフとなります．黒丸を打ってあるところが頂点です．

このようなグラフがあると 2 頂点 u,v に対し，その間の**グラフ距離**が「定義」できます．

（言葉の注意）:「**定義**」という言葉をきいたことがある人もいるのではないかと思いますが，そうでない人のために説明しておきます．数学において，「～～を一一で「定義」する」とは，「数学の新しい用語～～の指す中身を，一一と約束する」，ということです．例えば今回なら，「グラフ距離」という新しい用語は下の 「　　」 のことを意味しているよ，と約束しています．この「定義」という言葉は数学の世界の記述の根幹をなしていて，今回の数学クイズのプリントでも以後何回か出てきます．この機会に，このような言い回しにも慣れていきましょう．

「2 頂点 u,v の間のグラフ距離」の「定義」を，

「u から v へ辺をたどって行くとき，たどらなければならない辺の本数の最小値」

とします（$u=v$ のときは距離を 0 で定めます）．u から v へ行くときにたどった辺たちを全て逆行することで v から u にも行けるので，u と v の間のグラフ距離はv と u の間のグラフ距離と一緒です．有限グラフ Γ に対して，その中の 2 頂点 u,v をいろいろ動かすとき，u,v のグラフ距離の最大値を Γ の**直径**と「定義」します．

(注意)：グラフを今，平面上に図として描いていますが，グラフ距離は「辺の本数」という個数で決まる値で，“辺を図示したときに辺がどれくらいの長さに見えるか”とは無関係であることに注意をしてください．例えば Γ_{ii} の図の頂点 u, v, w に対し，見かけ上は u, w 間の距離の方が u, v 間の距離よりも長く見えますが，それは図示したときにそう見えるように描いただけです．実際には，どちらの場合も辺 1 本でたどることができるので，グラフ距離はともに 1 となっています．ネットワークで言えば，光ファイバーなどで辺一本での通信は（辺の長さには関係なく）一瞬ででき，「辺を何本通るか」という個数の方が通信時間を反映している，という状況とイメージできます．そうすると上の「グラフ距離」もあながち不自然ではないような気がしませんか？

グラフ Γ 上の距離を定めたので，頂点 u と正の整数 R を決めたとき，

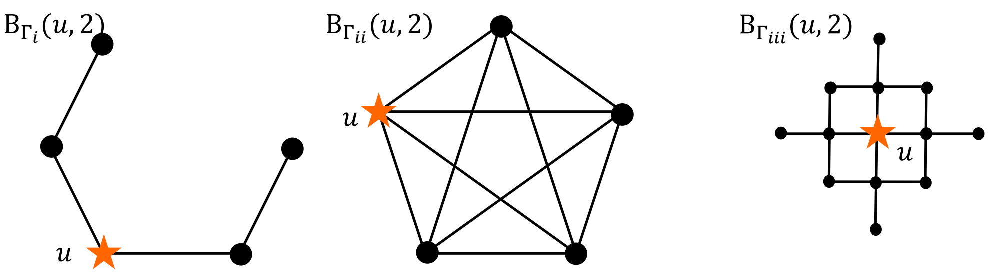
Γ 内の u を中心とする，半径が R の（閉）**ボール** $\mathrm{B}_\Gamma(u, R)$

と呼ばれる Γ の部分グラフを，以下のようにして「定義」します：

- 頂点集合は，u とのグラフ距離が R 以下であるような Γ の頂点たち全体とします（u と自分自身のグラフ距離は 0 なので，u もボールの頂点です）；
- 辺集合は，この頂点集合の 2 頂点を結んでいる Γ の辺を全て持ってきます．

(注意) もとのグラフが正則でも，そのボールは通常正則グラフにはなりません．

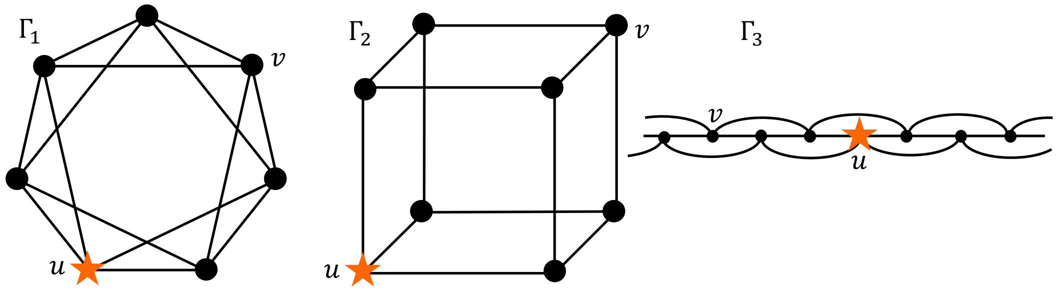
例. 例えば u をそれぞれのグラフでの以下の頂点とするとき，u を中心とする半径 2 のボール $\mathrm{B}_\Gamma(u, 2)$ はそれぞれ以下のようなグラフとなります．中心 u は見やすいように**橙色の★印**でかいてあります．



Γ_i，Γ_{ii} は有限グラフですが，それぞれの直径は 3, 1 です（Γ_{ii} の直径は 1 なので半径 1 のボールを取った時点で Γ_{ii} と一致します．なので，半径 2 のボールも Γ_{ii} と同じグラフとなります）．

問題 1. 次の図のグラフ $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ を考えます．ここで，Γ_3 はこれが左右にずっと伸

びている無限グラフです（辺をまっすぐにかくと図がかけないため，一部の辺を曲線的に描いています）．



(1) Γ_1, Γ_2 それぞれの頂点数，辺数，次数を求めて下さい．Γ_3 の次数を求めて下さい．

(2) $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ それぞれに対し，図示された 2 頂点 u, v の間のグラフ距離をそれぞれ求めて下さい

(3) Γ_1, Γ_2 の直径を求めて下さい．

(4) $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ それぞれに対し，図の**橙色の★印**でかかれている頂点 u を中心とする半径 1 のボール，半径 2 のボールがどんなグラフであるかをそれぞれ描いて下さい．

次に，「整数を割った余りの集合」から定まる「色つき基点付きグラフ」というものを「定義」します．m を 3 以上の整数とします．このとき，「$\mathbb{Z}_m$」という記号で，整数を m で割ったときの余りとしてありうる値全体の集合を表します．これはつまり，集合$\{0,1,2,\ldots,m-1\}$ のことですが，ここで考えているのは整数自体ではなく「m で割った余り」なので，区別するために［］に入れて，

$$\mathbb{Z}_m = \{[0],[1],[2],\ldots,[m-1]\}$$

と書きましょう．例えば，$[1]$ は「m で割った余りが 1」ということを 1 つのモノと思ったものです．

正の整数 a を 1 つとってきます．すると，$\mathbb{Z}_m$ とこの a のペア $(\mathbb{Z}_m; a)$ から，次のようにして 1 つの「色つき基点付きグラフ」$\mathrm{C}(\mathbb{Z}_m; a)$を作ることができます．

◎ 頂点集合は $\mathbb{Z}_m(=\{[0],[1],[2],\ldots,[m-1]\})$ 自身とします（従って，$\mathrm{C}(\mathbb{Z}_m; a)$ の頂点数はちょうど m 個です）．

◎ 辺集合は以下のように決めます：$0 \leqq k \leqq m-1$ に対して，$k+a$ を m で割った余りが k' であるとき，$[k]$ から $[k']$ に**赤い矢印**を飛ばして，これを「$[k]$ と $[k']$ を結ぶ辺」とします（グラフの辺に本来方向はないので，逆向きの辺も同じ辺だと思っています．ここでの矢印による“向き”は「色によるラベル付け」を表しています）．この操作を全ての $0 \leqq k \leqq m-1$ で行なっ

て，辺集合を作ります．

◎ 最後に，このグラフの基点（目印となる頂点）を頂点 $[0]$ とします．

※ こうしてできるグラフは (m,a) の組によっては連結（1 ページ目を見てみてください）になりません．「グラフ $\mathrm{C}(\mathbb{Z}_m;a)$ が連結になる」ことは，「m と a が互いに素である」こと（つまり，「m と a の最大公約数が 1 であること」）と同値であることが証明できます．以下，このクイズでは，そのようなときのみを扱います．

いきなりこのような話が始まって面食らったかもしれないので，例を見てみましょう．

例． ここでは，$(m,a)=(3,1)$ のとき，つまり「色つき基点付きグラフ $\mathrm{C}(\mathbb{Z}_3;1)$」を実際に図示してみます．

◎ 頂点集合は $\mathbb{Z}_3=\{[0],[1],[2]\}$ の 3 点からなる集合です．

◎ 辺を結ぶところを実際にやってみましょう：$k=0,1,2$ に対して，

・$k=0$ のとき，0+1=1 を 3 で割った余りは 1 なので，$[0]$ から $[1]$ へ**赤い矢印**が飛びます．

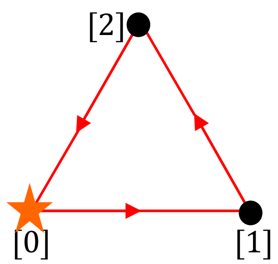
・$k=1$ のとき，1+1=2 を 3 で割った余りは 2 なので，$[1]$ から $[2]$ へ**赤い矢印**が飛びます．

・$k=2$ のとき，2+1=3 を 3 で割った余りは 0 なので，$[2]$ から $[0]$ へ**赤い矢印**が飛びます（ここの議論で，「3 で割った余り」を考えていることが効いてきます）．

◎ 基点を頂点 $[0]$ としたのでした．

以上から，「色つき基点付きグラフ $\mathrm{C}(\mathbb{Z}_3;1)$」は次の図のようなグラフです．赤い色および矢印の向きが辺の「色付け」を，橙色の☆が「基点」をそれぞれ表しています．

$\mathrm{C}(\mathbb{Z}_3;1)$



（注意）：上にも書いたように「辺」には本来向きはありません（矢印も「色によるラベル付け」です）．従って上図で $[2]$ と $[0]$ は辺で結ばれているので $[0]$ と $[2]$ も辺で結ばれていることになります．ですので例えば，$[0]$ と $[2]$ のグラフ距離は 1 です．

問題 2.　上の例にならって，次の(1)～(3)の色つき基点付きグラフをそれぞれ描いてみて下さい．

(1) $\mathrm{C}(\mathbb{Z}_6;1)$

(2) $\mathrm{C}(\mathbb{Z}_3;2)$

(3) $\mathrm{C}(\mathbb{Z}_7;2)$

（ヒント：上の例でみた通り，頂点 $[0],[1],\ldots,[m-1]$ の m 点を“円周上に”配置しておくと図示がしやすいです．）

問題 3.　問題 2 の(1), (2), (3) の各「色つき基点付きグラフ」に対して，基点（**橙色の★印**）を中心とする半径 1 のボール，半径 2 のボールをそれぞれ図示してみて下さい．ここで，もとのグラフには色による矢印が付いているので，ボールの各辺にもその色による矢印の情報を残しておいてください．

（このようにして「色つき基点付きグラフ」の基点を中心とするボールも「色付き基点グラフ」となります．）

今さっきまでは 1 つの正の整数をとって $\mathrm{C}(\mathbb{Z}_m;a)$ を作りましたが，今度は正の整数を順番も込めて a,b と **2 つ**とってきて，同様に「色つき基点付きグラフ」$\mathrm{C}(\mathbb{Z}_m;a,b)$ を作りましょう．具体的には，以下のようにします：

◎ 頂点集合は変わらず，$\mathbb{Z}_m(=\{[0],[1],[2],\ldots,[m-1]\})$ 自身です．

◎ 辺集合は以下のように決めます：$0 \leqq k \leqq m-1$ に対して，以下の操作をします．

- $k+a$ を m で割った余りが k' であるとき，$[k]$ から $[k']$ に**赤い矢印**を飛ばして，これを「$[k]$ と $[k']$ を結ぶ辺」とします．
- $k+b$ を m で割った余りが k'' であるとき，$[k]$ から $[k'']$ に**青い矢印**を飛ばして，これを「$[k]$ と $[k'']$ を結ぶ辺」とします．

この操作を全ての $0 \leqq k \leqq m-1$ で行なって，辺集合を作ります．

◎ 最後に，このグラフの基点を，変わらず頂点 $[0]$ とします．

辺を作るときに a,b 2 つの正整数があるのでそれぞれを用いて辺を作って行くのですが，どちらの整数を用いて辺を作ったかを**赤**・**青**の色で区別をしておくのがポイントです．

問題 4. 以下(1)～(3)の色つき基点付きグラフをそれぞれ描いてみて下さい．

(1) $\mathrm{C}(\mathbb{Z}_5; 1,2)$

(2) $\mathrm{C}(\mathbb{Z}_7; 1,2)$

(3) $\mathrm{C}(\mathbb{Z}_8; 2,3)$

問題 5. 問題 4 の(1), (2) の各「色つき基点付きグラフ」に対して，基点（**橙色の★印**）を中心とする半径 1 のボール，半径 2 のボールをそれぞれ図示してみて下さい．ここで問題 3 同様，もとのグラフには色による矢印が付いているので，ボールの各辺にもその色による矢印の情報を残しておいてください．

いよいよこの数学クイズのテーマである，

「色つき基点付きグラフの極限」

の話に入ります．

※ このようなことを考えると何が面白いのか，ということにはいろいろな回答ができますが（後で配る本数学クイズの解答プリントにも多少書きました．また，担当者（見村）はこの話を使って新しい学術論文を執筆しました．現代数学にもこのトピックが顔を出すとは驚きですね！），ここでは，後のページに書いた**「エクスパンダーグラフ列」**という話に応用してみましょう．この応用が気になる人は 9 ページの最後から始まる内容にある問題 10，問題 11＃ にもチャレンジしてみて下さい．

本題に入りましょう．**「色つき基点付きグラフの極限」**というものを，以下のように「定義」をします．問題 3，問題 5 で見たように，色つき基点付きグラフの基点を中心とするボールは，もとのグラフの「辺の色づけ」と「基点」をそのままもってくることによって「色つき基点付きグラフ」になっていることに注意をしてください．

定義： l を正の整数として固定します．$D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ を l 色の色で辺がラベル付けされた基点付きグラフたちの列とします．

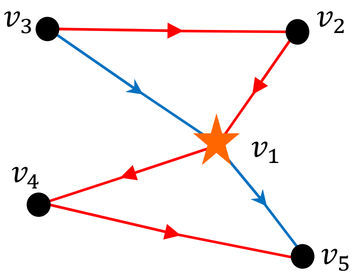
※ 例えば $\mathrm{C}(\mathbb{Z}_m; a)$ なら**赤** 1 色で（$l = 1$），$\mathrm{C}(\mathbb{Z}_m; a, b)$ なら**赤**・**青**の 2 色で（$l = 2$）辺がラベル付けされています．

$\widetilde{D}$ をまた別の，l 色の色で辺がラベル付けされた基点付きグラフとします．

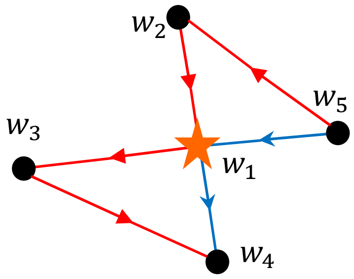
(i) 各 n に対し，D_n の $\widetilde{\boldsymbol{D}}$ **に対する近似半径**を，以下の「条件」を満たす半径 R の最大値として定義します（満たす R が存在しないときは近似半径を 0 とします）：

「条件」: D_n の基点を中心とする半径 R のボールが，$\widetilde{D}$ の基点を中心とする半径 R のボールと，「色つき基点つきグラフ」として同一である．ここで，2 つの「色つき基点付きグラフ」が同一であるとは，2 つのグラフを，基点を重ねて他の頂点たちも，「同じ色（矢印の向きまで含めて）の辺が同じ色の辺にちょうど対応するように」重ねることができることをいいます．

例えば，次の二つの「赤・青 2 色で辺がラベル付けされた基点付きグラフ」は，基点 v_1 と w_1 を重ねて，それから他の頂点を，v_2 と w_2 を；v_3 と w_5 を；v_4 と w_3 を；v_5 と w_4 をそれぞれ重ねれば同じ色（向きまで含め）が丁度重なることになるので，同一な色つき基点付きグラフです．



赤・青 2 色のラベルつき基点付きグラフとして，左右 2 つのグラフは同一！！



(ii) 色つき基点付きグラフの列 $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ の**極限**が $\widetilde{D}$ であるとは，D_n の $\widetilde{D}$ に対する近似半径がどんどん際限なく大きくなっていくことをいいます（数列の極限を知っている人向けに言うと，より正確には，D_n の $\widetilde{D}$ に対する近似半径 R_n が $n \to \infty$ で「無限大に発散」することです）．

いきなり定義を見せられても実感がわかないと思うので，例をやってみましょう．

問題 6. $\{C(\mathbb{Z}_n;1)\}_{n\geq 4}$ は，赤 1 色で辺がラベル付けされた基点付きグラフの列 $C(\mathbb{Z}_4;1)$, $C(\mathbb{Z}_5;1)$, $C(\mathbb{Z}_6;1)$, $\dots$, $C(\mathbb{Z}_n;1)$, …. のことです．「この列の極限が，次の図のような，赤 1 色で辺がラベル付けされた基点付きグラフである」ことを示しましょう．

$C(\mathbb{Z}_4;1), C(\mathbb{Z}_5;1), \dots, C(\mathbb{Z}_n;1), \dots$ **の極限として現れる色つき基点付き（無限）グラフ** $\widetilde{D}$

この色つき基点付き（無限）グラフを $\widetilde{D}$ とおきます．

(1) $n \geqq 4$ に対して，$\mathrm{C}(\mathbb{Z}_n; 1)$ の $\widetilde{D}$ に対する近似半径を求めて下さい．

（ヒント：n の偶奇によって式が変わります．）

(2) $\{\mathrm{C}(\mathbb{Z}_n; 1)\}_{n \geqq 4}$ の極限が上の $\widetilde{D}$ となっていることを証明して下さい．

※ このように，一般に，有限色つき基点付きグラフの極限は無限グラフになります．

問題 7. $\{\mathrm{C}(\mathbb{Z}_{2n+1}; 2)\}_{n \geqq 2}$ の極限は，どんな「（**赤** 1 色でラベル付けされた）基点付きグラフ」でしょうか．図示してみましょう（証明は細部まで正確でなくても構いません）．

問題 8. $\{\mathrm{C}(\mathbb{Z}_n; 1,2)\}_{n \geqq 6}$ の極限は，どんな「（**赤**・**青** 2 色でラベル付けされた）基点付きグラフ」でしょうか．図示しましょう（証明は細部まで正確でなくても構いません）．

次の問題はチャレンジ問題です．時間内に解けなくても意欲の有る人はお家に帰ってからでも引き続き挑戦してみましょう．このクイズの時間内に解けたらすさまじくすごいです．後でウンウン考えてから解けたなら，それも大したものです．皆さんの挑戦をお待ちしています！！

※ その解答例は，後日，東北大学理学部数学科のオープンキャンパスのウェブサイト

http://www.math.tohoku.ac.jp/admission/opencampus/opencampus.html

に，

2014 年 8 月 12 日（火）の正午

までに載せます．時間内に解けなかった問題がある人は興味があればあとでもじっくり考えて，答えあわせをするのを楽しみにしていて下さい．

問題 9#（チャレンジ問題）. $\{\mathrm{C}(\mathbb{Z}_{n^2+1}; 1, n)\}_{n \geqq 3}$ の極限は，どんな「（**赤**・**青** 2 色でラベル付けされた）基点付きグラフ」でしょうか．

［さらに考えたい人向けの内容］：

有限グラフの列に対して，「**エクスパンダーグラフ列**」と呼ばれる概念があります．

これは現代数学の最先端でも活発に研究されているとてもホットな話なのですが，実はその定義だけなら今の段階でもできてしまいます！やってみましょう．

有限グラフ Γ に対し，その頂点集合 V の（空でない）部分集合 S をとってきたとき，次の比

$$j(S)=\frac{「S\text{に属する頂点と，}S^c\,(S\text{の補集合})\text{に属する頂点を結ぶ辺」の個数}}{「S\text{に属する頂点」の個数}}$$

は,「ネットワークの一部拠点を孤立させるためには,（拠点の大きさに対し）どれだけのネットワークを分断すればよいか」という量となっています．分子は S を S^c にいっせいに置き換えても同じ個数になるので，上の比で意味があるのは S の頂点の個数が S^c の頂点の個数以下のとき，つまり，$|S| \leqq \frac{|V|}{2}$ のときです（例えば，$j(V)=0$ ですが，これはこのときは冷静に考えるとそもそも一部の拠点を分断していないので，0 になっても当たり前ですよね）．ここで，$|T|$ は集合 T に属する要素の総数のことです．以上から，$j(S)$ の S が$|S| \leqq \frac{|V|}{2}$ の範囲を動くときでの最小値を

$$\boxed{h(\Gamma)=\min\left\{j(S) : 1 \leqq |S| \leqq \frac{|V|}{2}\right\}}$$

と書き，これをグラフ Γ の**等周定数**といいます．この値がある程度（>0）以上あるということは,「ネットワークを分断して半分以下の拠点を孤立させようと思うと，その個数に見合う分だけのネットワークを切断しないといけない」ことになります．ですので, この値が小さくない, ということはネットワークが安定することを意味しています.

問題 10. 今までに出てきた，$\Gamma_i, \Gamma_{ii}, \Gamma_2$（2 ページおよび 4 ページ参照）の等周定数をそれぞれ求めて下さい．また，$m \geqq 3$ に対し，$\mathrm{C}(\mathbb{Z}_m;1)$（色によるラベルと基点の情報を忘れて単にグラフと見ます．次の問題 11 の $\{\mathrm{C}(\mathbb{Z}_{n^2+1};1,n)\}_{n\geqq 3}$ でも同様です）の等周定数 $h(\mathrm{C}(\mathbb{Z}_m;1))$ を m で表して下さい．

※ 一般に頂点数の大きいグラフでは，等周定数を求めることは大変困難です.

有限グラフの列 $\{\Gamma_n\}_n$ においてそれらの次数が一定であり，しかも頂点数がどんどん大きくなっていくとします. このとき, この列が**エクスパンダーグラフ列**であるとは,

「どれだけ n が大きくなっても，$h(\Gamma_n)$ がある正（>0）の一定値以上ある」

ようになっているときをいいます. 上で見たように等周定数がある正の一定値以上あれば，ネットワークの分断が難しくなるので，頂点数が非常に大きくてそのようなものが

見つければ非常によいことになります. このような観点からも, 現代数学の観点からも, エクスパンダーグラフ列というのは大変興味深い対象なのですが, 「具体的にエクスパンダーグラフ列を1つでよいから見つけてくる」ことにも深い現代数学の理論が必要となります（例えば1つの構成は, 担当者（見村）の専門分野である「幾何学的群論」と呼ばれる分野の道具を使います. また, もう1つの構成では, 「整数論」の深い定理を用います. このようなグラフの話と, 「整数論」が深いところで関係するというのは, 意外ではないでしょうか？）. ここではさすがにちょっとそちらの方向には進めませんので（気が早いですが, 数学科にお越しになったらの“お楽しみ”としておきましょう）, 逆に, 具体的なグラフの列が, 残念ながらエクスパンダーグラフ列ではないことを示してみましょう.

次の問題がこのクイズ最後の問題（&最後のチャレンジ問題）かつ, 恐らく最も難しい問題となります. 腕に自信がある人はじっくり取り組んでみて下さい.

問題 11#（チャレンジ問題）. $\mathrm{C}(\mathbb{Z}_{n^2+1}; 1, n)$ から**赤**・**青**の辺のラベル付けと基点の情報を忘れて単にグラフと思ったものを Γ_n とおきましょう.

(1) グラフの列 $\{\Gamma_n\}_{n \geqq 3}$ は「エクスパンダーグラフ列」にはなりません. このことは, そんなに難しくなく確認できます. 実際, Γ_n の頂点数は n^2+1 ですが, この約半分（で半分以下）の個数の頂点からなる, Γ_n の頂点集合の部分集合 U_n で, 「$j(U_n)$ の値が n が大きくなっていくときにいくらでも小さく（0 に近く）なっていく」ようなものをとることができます. このような U_n を（各 $n \geqq 3$ に対して）具体的に見つけてみましょう.

(2) 本問の本題は, 以下の問いです：

(1)では, Γ_n の頂点集合の部分集合 U_n は頂点全体の集合の約半分の個数の頂点からなるものをとってきました. 実は, なんと, うまく頂点たちを選んでくると,

$\boxed{\text{元の頂点全体の個数（}= n^2+1\text{）の } \sqrt{\ } \text{ 位, つまり, } \Gamma_n \text{ に対して } \boldsymbol{n} \text{ 個以下}}$

の頂点からなる部分集合 W_n をとることで, 上と同じように,

$\boxed{j(W_n) \text{ の値が } n \text{ が大きくなっていくときにいくらでも小さくなっていく}}$

ようにできるのです！！このような W_n をどうとったらよいかを考えて下さい. さらに例えば, $j(W_n) < 0.000001$ とできるような n と, そのときの W_n としてどんな（頂点集合の）部分集合がとれるかを挙げてみて下さい.

皆さんの挑戦をお待ちしています！！