数論的関数の平均の漸近挙動について
On the asymptotic behavior of the average of arithmetic functions

東北大学大学院理学研究科数学専攻博士課程前期２年　吉田宏大

2011年３月

目 次

1 はじめに

本修士論文は, 数論的関数の平均の漸近挙動についての Chandrasekharan, K. と Narasimhan, Raghavan の論文 [1] の一部の解説で, その部分の内容は E. Landau の論文 [2], [3] が元となっている. なお，Chandrasekharan 等は、Landau も使った方法で『分母』の部分の因子の数を十分大きくしたとき、得られた密度定理がある意味で最良であることも示しているが、それについては、本修士論文ではふれないことにする. 数論的関数とは定義域が正整数である複素数を値に持つ関数のことであり, 例えば正整数 n の約数の個数を表すディリクレの約数関数 $d(n)$ などがある. 本論文の目的は, ある種の関数等式をみたす数論的関数の x までの平均の振る舞いを調べることである. 古典的な予想として次のようなものがある.

予想 1.1. (ディリクレの約数問題).

$$R(x) = \sum_{n\leqq x} d(n) - x\log x - (2\gamma - 1)x$$

とおく. ただし, γ はオイラー定数である. このとき, $R(x) = O(x^{1/4+\varepsilon})$ である. ただし, ε は任意の正数で, O はランダウ記号である.

ディリクレ自身は $R(x) = O(x^{1/2})$ を証明した ([4]). その後, この $R(x)$ のオーダーを $1/4$ に近づける試みが行われ, この論文の目的もそうである. 主定理からは $R(x) = O(x^{1/3+\varepsilon})$ が得られる. しかしこの結果は E. Landau の論文 [2], [3] ですでに得られていて, [1] ではその証明の中で誤差項を評価するときにベッセル関数を使うなどの工夫がなされている. 現在のところ, $R(x)$ の最良の評価は $R(x) = O(x^{131/416+\varepsilon})(131/416 = 0.3149\cdots)$ である (Huxley [5]). 一方で $R(x) = O(x^{1/4})$ ではないことは示されている (Hardy [6]). また, 本論文では, 最後に $\sum_{n\leqq x} d(n)$ とその主要項 $x\log x + (2\gamma - 1)x$ は x が大きいときどのくらいの差があるかをコンピュータによる数値計算によって求めた結果を紹介する.

[1] のアイディアは, 数論的関数 a_n の x までの和 $A_0(x) := \sum_{n\leqq x} a_n$ の主要項は a_n を係数にもつディリクレ級数 $\varphi(s) = \sum_{n\geqq 1} a_n\lambda_n^{-s}$ の留数によって表すことができるということである. ただし λ_n は狭義単調増加列で $n \to \infty$ のとき $\lambda_n \to +\infty$ となるものである. さらに $\varphi(s)$ の極から得られるある関数を $Q_0(x)$ とすれば誤差項は $A_0(x) - Q_0(x)$ で表され, これの評価も与えられる.

本論文では $\varphi(x)$ に関するある積分を与えるとき, 積分路を動かすために十分大きい整数 ρ による $A_\rho(x), Q_\rho(x)$ といったものを考える. この $A_\rho(x)$ というのは, 後で定義を述べるが, おおざっぱにいうと a_n と λ_n から定まる有限和で, $Q_\rho(x)$ とは, その有限和の主要部を表す関数であり, $\varphi(x)$ から定まる関数の留数の和で表される. そして, $A_\rho(x) - Q_\rho(x)$ を評価した後, 差分して $A_0(x) - Q_0(x)$ に関する評価を得るをいう方針で話を進める.

まずは本論文内で用いる記号の紹介をする.

定義 1.2. 関数 $f(s), g(s)$ に対して $f(s) \sim g(s)$ は s がある極限に近づくとき $f(s)/g(s) \to 1$ を表す.

定義 1.3. 2 つの数列 $\{\lambda_n\}, \{\mu_n\}$ を正の狭義単調増加で無限大に発散する数列とする. また, $\{a_n\}, \{b_n\}$ を全ての項が 0 ではない複素数列とする. これに対し 2 つのディリクレ級数 $\varphi(s)$ と $\psi(s)$ を次のように定義する. ただし $s = \sigma + i\tau$ は複素数である.

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^s}, \quad \psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\mu_n^s}.$$

ただし, $\varphi(s), \psi(s)$ はそれぞれ $\sigma > \alpha, \sigma > \beta$ で絶対収束し, 全平面に解析接続でき, 真性特異点はなく極は有限個であるものとする.

定義 1.4. $N \geqq 1, 1 \leqq \nu \leqq N$ に対し, β_ν は任意の複素数, $\alpha_\nu > 0$ とする. これに対し,

$$\Delta(s) = \prod_{\nu=1}^{N} \Gamma(\alpha_\nu s + \beta_\nu)$$

と定義する. さらに, $A = \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu$ とし, $A \geqq 1$ と仮定する.

定義 1.5. 0 以上の整数 ρ に対し,

$$A_\rho(x) = \frac{1}{\rho!} {\sum_{\lambda_n \leqq x}}' a_n (x - \lambda_n)^\rho$$

と定義する. ただし $\sum'$ は $\rho = 0$ かつ $\lambda_n = x$ のときに最後の項を 1/2 倍にする記号である.

定義 1.6. 0 以上の整数 ρ に対し,

$$Q_\rho(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(s)}{s(s+1)\cdots(s+\rho)} x^{s+\rho}\, ds$$

と定義する. ただし, C は被積分関数の極を全てまわる路である.

$\rho = 0$ とした $Q_0(x)$ が数論的関数 a_n の x までの和 $A_0(x)$ の主要項である. 例えば $\varphi(s) = 1/(1-s)^2$ とすると $Q_0(x)$ がどのような形をしているか計算してみる. この $\varphi(s)$ はディリクレ級数ではないが, $\varphi(s)$ は有理型関数なので本質は同じである. 被積分関数の極は $s = 0$ と $s = 1$ だから,

$$\begin{aligned}
Q_0(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{x^s}{s(1-s)^2}\, ds \\
&= \frac{x^s}{s-1} \bigg|_{s=0} + \left(\frac{x^s}{s}\right)' \bigg|_{s=1} \\
&= -1 + \frac{x^s(\log x) - x^s}{s^2} \bigg|_{s=1} \\
&= -1 + x\log x - x.
\end{aligned}$$

$\varphi(s)$ は真性特異点はなく極は有限個であるから, 一般の $\varphi(s)$ に対しても, このような計算で $Q_0(x)$ は $x^a(\log x)^b$ の線形結合で表されることがわかる. ただしこの a と b は $\varphi(s)$ の極の情報によって定まる数である.

定義 1.7. (**ベッセル関数** [7, p.40]). ベッセル関数 $J_\nu(z)$ を次で定義する.

$$J_\nu(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m+\nu}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)}, \quad \nu \in \mathbb{C}. \tag{1.8}$$

定理 1.9. (**ベッセル関数の性質** [7, pp. 192, 199]). (1.8) で定義した $J_\nu(z)$ に対して次の (1),(2) が成立する.

(1) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{c/2-i\infty}^{c/2+i\infty} \frac{2^{2z-\nu}\Gamma(z)}{\Gamma(\nu+1-z)} x^{-2z}\, dz = \frac{J_\nu(x)}{x^\nu}, \quad 0 < c \leqq \mathrm{Re}(\nu+1), \mathrm{Re}(\nu) > 0.$$

(2) $$J_\nu(x) = O(x^{-1/2}) \quad : x \to \infty.$$

最後に本論文の主定理を述べる.

定理 1.10. 定義 1.3,1.4 で定義した $\varphi(s), \psi(s), \Delta(s)$ は次の関数等式を満たすと仮定する.

$$\Delta(s)\varphi(s) = \Delta(\delta - s)\psi(\delta - s). \tag{1.11}$$

ただし δ は正の実数である. さらに任意の vertical strip で一様に

$$\lim_{|\tau|\to\infty} |\Delta(s)\varphi(s)| \to 0 \tag{1.12}$$

であると仮定する. このとき任意の 0 以上の実数 η に対して次が成立する.

$$\begin{aligned} A_0(x) - Q_0(x) &= O(x^{(\delta/2)-(1/4A)+2A\eta u}) \\ &\quad + O(x^{q-(1/2A)-\eta}(\log x)^{r-1}) \\ &\quad + O\left(\sum_{x<n\leqq x'} |a_n|\right). \end{aligned} \tag{1.13}$$

ただし $x' = x + O(x^{1-\eta-1/(2A)})$, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $u = \beta - (\delta/2) - (1/4A) + \varepsilon$ であり, q は $\varphi(s)$ の極の実部の最大値, r は実部が q である $\varphi(s)$ の極の位数の最大値である.

(1.11) の関数等式としてリーマンゼータ関数の関数等式を考えることを見据えてるいため本論文内では任意の $\varepsilon > 0$ に対して $u > 0$ と仮定する. 次章で詳しく述べるが, 実際, リーマンゼータ関数の関数等式を用いると $\beta = 1, \delta = 1, A = 1$ より $u = 1/4 + \varepsilon > 0 (\varepsilon > 0)$ である.

謝辞

セミナーや論文作成にあたり多忙な中親切に御指導して下さった雪江明彦先生に心から感謝申し上げます. また, セミナー等でお世話になりました奈良忠央先輩, 田嶋和明先輩, キンショウヒ先輩にも感謝致します.

2　具体的な例

この章では実際に主定理を具体的な数論的関数に対して適用させる.

例 2.1. $a_n = c_n = \begin{cases} 1, & n \text{が平方数} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$ のとき.

はじめに最も自明な例 $a_n = 1$ に対して定理 1.10 を直接適用したいがそれはできないことに注意しておく．その理由を述べる．$a_n = 1$ を係数にもつディリクレ級数はリーマンゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

であり, これは次の関数等式をみたす.

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s). \tag{2.2}$$

これが定理 1.10 の条件の関数等式 (1.11) に相当するならば $\Delta(s) = \Gamma(s/2)$ であるが, このとき $A = 1/2$ であるので, 定義 1.4 の仮定 $A \geqq 1$ に反する．したがって最も自明な例 $a_n = 1$ に対して定理 1.10 を適用できない．そこでその条件に引っかからないようなものとして上記の c_n を考える.

明らかに $\sum_{n \leq x} c_n$ は, x 以下の平方数の個数となる．よってこの有限和の主要項は $\sqrt{x}$ になるはずである.

この c_n を係数にもつディリクレ級数は $\sum_{n \geq 1} 1/n^{2s} = \zeta(2s)$ であるから, 定理 1.10 の仮定の関数等式 (1.11) は (2.2) において s を $2s$ に変えたものが相当する．すなわち,

$$\pi^{-\frac{2s}{2}} \Gamma\left(\frac{2s}{2}\right) \zeta(2s) = \pi^{-\frac{1-2s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-2s}{2}\right) \zeta(1-2s).$$

これと仮定の関数等式を見比べると, これには $\pi^{-2s/2}$ や $\pi^{(1-2s)/2}$ が余計に付いているので $\varphi(s) = \pi^{-s}\zeta(2s) = \sum_{n \geq 1} c_n/(\pi n)^s$ としなければならない.

さて, 定義より $\delta = 1/2$ である．さらに, (1.11) と (2.2) が同値になるように順に $a_n = b_n = c_n, \lambda_n = \mu_n = \pi n, \Delta(s) = \Gamma(2s/2)$ と決めていけばこれらは関数等式 (1.11) と同値である．すると定義より $A = 1, q = 1/2, r = 1, \beta = 1/2, u = \varepsilon$ である．ここで, $\zeta(s)$ は $s = 1$ でただ一つの位数 1 の極を持つことを使った．また, η は 2 つの誤差項の指数が同じになるようにとればよいので計算すれば,

$$\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4A} + 2A\eta u = q - \frac{1}{2A} - \eta$$

より, $\eta = 0$ である．よって, 誤差項の指数は,

$$q - \frac{1}{2A} - \eta + \varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 0 + \varepsilon = \varepsilon$$

である．ここで任意の正数 ε に対して $\log x = O(x^\varepsilon)$ であることを使った．また, 定義 1.5 より $A_0(x) = \sum_{\pi n \leqq x} c_n = \sum_{n \leqq x/\pi} c_n$ であるから, 定理 1.10 より

$$\sum_{n \leqq x/\pi} c_n = Q_0(x) + O(\varepsilon).$$

すなわち,

$$\sum_{n \leqq x} c_n = Q_0(\pi x) + O(\varepsilon)$$

を得る．また, $Q_0(\pi x)$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}
Q_0(\pi x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta(2s)}{s} x^s\, ds \\
&= \mathrm{Res}_{s=0}\left(\frac{\zeta(2s)}{s}x^s\right) + \mathrm{Res}_{s=1/2}\left(\frac{\zeta(2s)}{s}x^s\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \left(s - \frac{1}{2}\right)\frac{\zeta(2s)}{s}\, x^s \Bigg|_{s=1/2} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(t-1)\zeta(t)\frac{1}{t/2}\, x^{t/2} \Bigg|_{t=1} \\
&= -\frac{1}{2} + \sqrt{x}.
\end{aligned}$$

4 番目の等号では $2s = t$ とおいた．また, $\lim_{t\to 1}(t-1)\zeta(t) = 1$ を用いた．したがって

$$\sum_{n \leqq x} c_n = \sqrt{x} + O(\varepsilon)$$

となり確かに辻褄が合っていることが分かる．また, $\sqrt{x} = y$ とおくと左辺は y^2 以下の平方数の個数, すなわち y 以下の正整数の個数である．よって, 定理 1.10 より次の最も自明な結果を得る．

$$\sum_{n \leq y} 1 = y + O(\varepsilon).$$

例 2.3. $a_n = d(n)$ のとき．

$d(n)$ は正整数 n の正の約数の個数である．よく知られているように

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2$$

であるから, (2.2) の両辺を 2 乗した式

$$\pi^{-s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2 \zeta(s)^2 = \pi^{-(1-s)}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)^2 \zeta(1-s)^2$$

が定理 1.10 の仮定の関数等式 (1.11) と同値になるように数式を定めていく.

今度は $\delta = 1$ である. これに注意して例 2.1 と同様に $\varphi(s) = \psi(s) = \pi^{-s}\zeta(s)^2 = \sum_{n\geq 1} d(n)(\pi n)^{-s}, a_n = b_n = d(n), \lambda_n = \mu_n = \pi n, \Delta(s) = \Gamma(s/2)^2$ と決めていけばこれらは関数等式 (1.11) を確かに満たす. 一方, 定義より $A = 1, q = 1, r = 2, \beta = 1, u = 1/4 + \varepsilon$ であり, η は例 2.1 と同様の計算を行うことにより $\eta = 1/6$ を得る. よって, 誤差項の指数は,

$$q - \frac{1}{2A} - \eta + \varepsilon = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \varepsilon$$

である. また, 定義 1.5 より $A_0(x) = \sum_{\pi n \leqq x} d(n) = \sum_{n \leqq x/\pi} d(n)$ であるから, 定理 1.10 より

$$\sum_{n \leqq x/\pi} d(n) = Q_0(x) + O(x^{1/3+\varepsilon}).$$

すなわち,

$$\sum_{n \leqq x} d(n) = Q_0(\pi x) + O(x^{1/3+\varepsilon})$$

を得る. また, $Q_0(\pi x)$ は次のとおりである.

$$Q_0(\pi x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta(s)^2}{s} x^s \, ds.$$

これを求める. 被積分関数を $f(s)$ とおく. $Q_0(x)$ は $f(s)$ の留数の和である. $f(s)$ の極は $s = 0, 1$ の 2 つ.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{s=0} f(s) &= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{\zeta(s)^2}{s} x^s = \zeta(0)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,. \\
\mathrm{Res}_{s=1} f(s) &= \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}\left((s-1)^2 f(s)\right).
\end{aligned}$$

ここで $\zeta(s)$ は全平面で正則な関数 $g(s)$ を用いて次のようにかける.

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + g(s).$$

よって,

$$\begin{aligned}
(s-1)^2 f(s) &= (s-1)^2 \frac{x^s}{s}\left(\frac{1}{s-1} + g(s)\right)^2 \\
&= \frac{x^s}{s}\left(1 + (s-1)g(s)\right)^2. \\
\log(s-1)^2 f(s) &= s\log x - \log s + 2\log\left(1 + (s-1)g(s)\right). \\
\frac{((s-1)^2 f(s))'}{(s-1)^2 f(s)} &= \log x - \frac{1}{s} + 2\frac{g(s) + (s-1)g'(s)}{1 + (s-1)g(s)}\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{s=1} f(s) &= \lim_{s\to 1}(s-1)^2 f(s)\left(\log x - \frac{1}{s} + 2\,\frac{g(s)+(s-1)g'(s)}{1+(s-1)g(s)}\right)\\ &= x(\log x - 1 + 2g(1))\\ &= x\log x + (2\gamma - 1)x\,.\end{aligned}$$

最後の等号では次の事実を用いた.

$$g(1) = \lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma\ (\gamma\text{はオイラー定数}).$$

よって,

$$Q_0(\pi x) = \frac{1}{4} + x\log x + (2\gamma-1)x$$

となるから, $d(n)$ の x までの和の評価は次のようになる.

$$\sum_{n\leqq x} d(n) = x\log x + (2\gamma-1)x + O(x^{1/3+\varepsilon}).$$

第 1 章でも述べたとおりこの誤差項の評価は最良ではない.

例 2.4. $a_n = d_3(n) := \sharp\left\{(j,k,l)\in\mathbb{Z}^3_{>0} | jkl = n\right\}$ のとき.

すなわち $d_3(n)$ は正整数 n を 3 つの正の整数の積に表す方法の個数である. これを係数にもつディリクレ級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_3(n)}{n^s} = \zeta(s)^3$$

であるから, 例 2.3 と同様のやり方で (2.2) の両辺を 3 乗した式

$$\pi^{-\frac{3s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^3\zeta(s)^3 = \pi^{-\frac{3}{2}(1-s)}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)^3\zeta(1-s)^3$$

が定理 1.10 の仮定の関数等式 (1.11) と同値になるように数式を定めていく.

$\delta = 1$ であり, 例 2.3 と同様に $\varphi(s) = \psi(s) = \pi^{-3s/2}\zeta(s)^3 = \sum_{n\geqq 1} d_3(n)(\pi^{3/2}n)^{-s}, a_n = b_n = d_3(n), \lambda_n = \mu_n = \pi^{3/2}n, \Delta(s) = \Gamma(s/2)^3$ と決めていけばこれらは関数等式 (1.11) を確かに満たす. 一方, 定義より $A = 3/2, q = 1, r = 3, \beta = 1, u = 1/3+\varepsilon$ であり, η は例 2.1 と同様の計算を行うことで $\eta = 1/6$ を得る. よって, 誤差項の指数は,

$$q - \frac{1}{2A} - \eta + \varepsilon = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \varepsilon = \frac{1}{2} + \varepsilon$$

である. また, 定義 1.5 より $A_0(x) = \sum_{\pi^{3/2}n\leqq x} d_3(n) = \sum_{n\leqq\pi^{(-3/2)}x} d_3(n)$ であるから, 定理 1.10 より

$$\sum_{n\leqq\pi^{(-3/2)}x} d_3(n) = Q_0(x) + O(x^{1/2+\epsilon}).$$

すなわち,

$$\sum_{n\leqq x} d_3(n) = Q_0(\pi^{3/2}x) + O(x^{1/2+\epsilon})$$

を得る. また, $Q_0(\pi^{3/2}x)$ は次のとおりである.

$$Q_0(\pi^{3/2}x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta(s)^3}{s} x^s\, ds.$$

これを例 2.3 と同様に求めると次のようになる.

$$Q_0(\pi^{3/2}x) = -\frac{1}{8} + \frac{x}{2}(\log x - 1 + 3\gamma)^2 + \frac{x}{2}(1 + 6\gamma_1 - 3\gamma^2).$$

ただし, γ_1 とは $\zeta(s)$ を $s=1$ のまわりにテイラー展開をしたときの $(s-1)$ の係数である. よって, $d_3(n)$ の x までの和の評価は次のようになる.

$$\sum_{n\leqq x} d_3(n) = \frac{x}{2}(\log x)^2 + (3\gamma - 1)x\log x + (3\gamma_1 + 3\gamma^2 - 3\gamma + 1)x + O(x^{1/2+\varepsilon}).$$

$d_3(n)$ を一般化して $d_m(n) := \sharp\big\{(a_1, \cdots, a_m) \in \mathbb{Z}_{>0}^m | a_1 \cdots a_m = n\big\}$ と定義すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_m(n)}{n^s} = \zeta(s)^m$$

である. よって, 例 2.3, 2.4 と同様のやり方で $d_m(n)$ の x までの和の評価が得られる. しかし, このとき誤差項は $O(x^{(m-1)/(m+1)+\varepsilon})$ となり, m が大きいほど精度は悪くなる.

例 2.5. $a_n = \sigma_k(n) = \sum_{0<d|n} d^k$ のとき.

$\sigma_k(n)$ は正整数 n の正の約数の k 乗の和である. $\sigma_0(n)$ は $d(n)$ と同じだから $k > 0$ とする. $\sigma_k(n)$ を係数にもつディリクレ級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-k)$$

である. したがって, (2.2) と (2.2) の s を $s-k$ に置き換えた式の両辺を掛け合わせた式

$$\begin{aligned} & \pi^{-s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-k}{2}\right)\zeta(s)\zeta(s-k) \\ = \ & \pi^{-(1+k-s)}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+k-s}{2}\right)\zeta(1-s)\zeta(1+k-s). \end{aligned}$$

が定理 1.10 の仮定の関数等式 (1.11) と同値になるように数式を定めていく.

$\delta = 1+k$ であり, 例 2.3 と同様に $\varphi(s) = \psi(s) = \pi^{-s}\zeta(s)\zeta(s-k) = \sum_{n\geqq 1} \sigma_k(n)(\pi n)^{-s}$, $a_n = b_n = \sigma_k(n)$, $\lambda_n = \mu_n = \pi n$, $\Delta(s) = \Gamma(s/2)\Gamma((s-k)/2)$ と決めていけばこれらは関数等式 (1.11) を確かに満たす. 一方, 定義より (また, $k > 0$ より) $A = 1, q =$

$1+k, r=1, \beta=1+k, u=(1/4)+(k/2)+\varepsilon$ であり, η は例 2.1 と同様の計算を行うことで $\eta=(1/2)-1/(2k+3)$ を得る．よって, 誤差項の指数は,

$$q-\frac{1}{2A}-\eta+\varepsilon=k+\frac{1}{2k+3}+\varepsilon$$

である．また, 定義 1.5 より $A_0(x)=\sum_{\pi n\leqq x}\sigma_k(n)=\sum_{n\leqq x/\pi}\sigma_k(n)$ であるから, 定理 1.10 より

$$\sum_{n\leqq x/\pi}\sigma_k(n)=Q_0(x)+O(x^{k+(1/(2k+3))+\varepsilon}).$$

すなわち,

$$\sum_{n\leqq x}\sigma_k(n)=Q_0(\pi x)+O(x^{k+(1/(2k+3))+\varepsilon})$$

を得る．また, $Q_0(\pi x)$ は次のとおりである．

$$Q_0(\pi x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{s}x^s\,ds.$$

被積分関数を $f(x)$ とおくと, $f(x)$ の極は $s=0$ と $s=1$ と $s=1+k$ の 3 つで, $k>0$ よりこれらはすべて相異なる．それぞれの留数をそれぞれ計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{s=0}\,f(s) &= \zeta(s)\zeta(s-k)x^s\Big|_{s=0}=-\frac{1}{2}\,\zeta(-k).\\
\mathrm{Res}_{s=1}\,f(s) &= (s-1)\zeta(s)\cdot\frac{\zeta(s-k)}{s}x^s\Big|_{s=1}=\zeta(1-k)x.\\
\mathrm{Res}_{s=1+k}\,f(s) &= (s-k-1)\zeta(s-k)\cdot\frac{\zeta(s)}{s}x^s\Big|_{s=1+k}=\frac{\zeta(1+k)}{1+k}x^{1+k}.
\end{aligned}$$

したがって,

$$Q_0(\pi x)=-\frac{1}{2}\,\zeta(-k)+\zeta(1-k)x+\frac{\zeta(1+k)}{1+k}x^{1+k}$$

となり, $k>0$ のとき $k+1/(2k+3)>1/3$ だから,

$$\sum_{n\leqq x}\sigma_k(n)=\frac{\zeta(1+k)}{1+k}x^{1+k}+\zeta(1-k)x+O(x^{k+(1/(2k+3))+\varepsilon}).$$

特に $k=1$ とすると $\sigma_1(n)$ は n の正の約数の和で, その x までの和は $\zeta(2)=\pi^2/6$ より,

$$\sum_{n\leqq x}\sigma_1(n)=\frac{\pi^2}{12}\,x^2+O(x^{6/5+\varepsilon})$$

となる.

一方, $k<0$ のときは条件 $\delta>0$ より $-1<k$ のときしか考えられないが, $k>0$ のときと同様の方法で $\sum_{n\leqq x}\sigma_k(n)$ の評価が得られる. ただし, $q=1,\beta=1$ に変更しなくてはならない. したがって誤差項の指数は $1/(3-2k)+\varepsilon$ となり, $-1<k<0$ のときの結果は次のようになる.

$$\sum_{n\leqq x}\sigma_k(n)=\zeta(1-k)x+\frac{\zeta(1+k)}{1+k}x^{1+k}+O(x^{1/(3-2k)+\varepsilon}).$$

例 2.6. $a_n=r(n)=\sharp\big\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2|a^2+b^2=n\big\}$ のとき.

$r(n)$ は正整数 n を 2 つの平方数の和としてあらわす方法の個数である. たとえば, $1=0^2+1^2=0^2+(-1)^2=1^2+0^2=(-1)^2+0^2$ であるから $r(1)=4$ である. このとき, $r(n)/4$ は乗法的で, $r(n)/4$ を係数にもつディリクレ級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)/4}{n^s}=\zeta(s)L(s)$$

で与えられる. ここで

$$L(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}=1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\cdots$$

は主指標でないディリクレ指標 $(\mathrm{mod}\,4)$, すなわち,

$$\chi(n)=\begin{cases}1, & n\equiv 1 \pmod 4\\ -1, & n\equiv -1 \pmod 4\\ 0, & n\equiv 0 \pmod 2\end{cases}$$

を係数にもつディリクレ級数である. この $L(s)$ は全平面で解析的であることが知られている. また, この $L(s)$ は次の関数等式を満たすことが知られている.

$$\pi^{-\frac{s}{2}}4^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)L(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}4^{\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)L(1-s).$$

これと (2.2) の両辺を掛け合わせた式

$$\begin{aligned}&\pi^{-s}2^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\zeta(s)L(s)\\ =\;&\pi^{-(1-s)}2^{(1-s)}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\zeta(1-s)L(1-s).\end{aligned}$$

が定理 1.10 の仮定の関数等式 (1.11) と同値になるように数式を定めていく.

$\delta=1$ であり, $\varphi(s)=\psi(s)=\pi^{-s}2^s\zeta(s)L(s)=\sum_{n\geqq 1}(r(n)/4)/\{(\pi/2)n\}^{-s}$, $a_n=b_n=r(n)/4$, $\lambda_n=\mu_n=(\pi/2)n$, $\Delta(s)=\Gamma(s/2)\Gamma((s+1)/2)$ と決めていけばこれら

は関数等式 (1.11) を確かに満たす．一方, 定義より $A=1, q=1, r=1, \beta=1, u=(1/4)+\varepsilon\,(>0)$ であり, η は例 2.3 とまったく同様で $\eta=1/6$ である．よって, 誤差項の指数は,

$$q-\frac{1}{2A}-\eta+\varepsilon=\frac{1}{3}+\varepsilon$$

である．また, 定義 1.5 より $A_0(x)=\sum_{(\pi/2)n\leqq x} r(n)/4=\sum_{n\leqq(2/\pi)x} r(n)/4$ であるから, 定理 1.10 より

$$\sum_{n\leqq\frac{2}{\pi}x} r(n)/4=Q_0(x)+O(x^{1/3+\varepsilon}).$$

すなわち,

$$\sum_{n\leqq x} r(n)=4\,Q_0((\pi/2)x)+O(x^{1/3+\varepsilon})$$

を得る．また, $Q_0((\pi/2)x)$ は次のとおりである．

$$Q_0\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta(s)L(s)}{s}x^s\,ds.$$

被積分関数を $f(x)$ とおくと, $L(s)$ は全平面で解析であるから, $f(x)$ の極は $s=0$ と $s=1$ との 2 つである．それぞれの留数をそれぞれ計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{s=0} f(s) &= \zeta(s)L(s)x^s\Big|_{s=0}=-\frac{1}{4}\,. \\ \operatorname{Res}_{s=1} f(s) &= (s-1)\zeta(s)\cdot\frac{L(s)}{s}x^s\Big|_{s=1}=\frac{\pi}{4}\,x.\end{aligned}$$

途中, $L(0)=1/2, L(1)=\pi/4$ である事実を使った．したがって,

$$Q_0(\pi x)=-\frac{1}{4}+\frac{\pi}{4}\,x$$

となるから, $r(n)$ の x までの評価は次のようになる．

$$\sum_{n\leqq x} r(n)=\pi x+O(x^{1/3+\varepsilon}).$$

3　$A_\rho(x)$ の積分表示

定理 1.10 の証明に移る．証明の第一歩は $A_\rho(x)$ を積分の形にすることである．この章ではそれについて述べる．それを命題の形で書くと次のようになる．

命題 3.1. ([8, p.81]). $\rho \geqq 0, c > \alpha$ に対して, 次が成立する．

$$A_\rho(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\varphi(s)}{s(s+1)\cdots(s+\rho)} x^{s+\rho}\, ds. \tag{3.2}$$

$A_0(x)$ の評価が目的であるが, 証明では助変数 ρ を導入している．この ρ は十分大きいものとする．ρ を導入した理由は, 次章でこの $A_\rho(x)$ の積分表示の積分路を Real part が $\delta-\beta$ より左側の半平面に移すのだが, そのためには (3.2) の右辺の分母を増やす必要があるからである．$\delta-\beta$ というのは $\psi(\delta-s)$ の収束軸である．$\varphi(s)$ は関数等式 (1.11) より (ガンマ関数/ガンマ関数)$\times\psi(\delta-s)$ という表示を持つ．したがって (3.2) の右辺は $\delta-\beta$ より左側の半平面で評価ができ, これが誤差項にあたる部分となる．また, (3.2) の右辺の被積分関数の極は有限個であるから, c を大きくすれば移す前の積分路と移した後の積分路で被積分関数の極をすべて囲むことができる．これが主要項にあたる部分である．そして第 5 章では差分により ρ を 0 に落として元の情報を引き出す．

さて, 命題 3.1 の証明について述べる．注目すべき点は $A_\rho(x)$ は有限和であるが $\varphi(s)$ は無限和であることである．すなわち $\varphi(s)$ から積分によって有限個の項のみを取り出すという操作が必要になる．その肝心な部分は次の補題 3.3 である．

補題 3.3. ([8, p.79]). $c > 0, r \geqq 0$ に対して, 次が成立する．

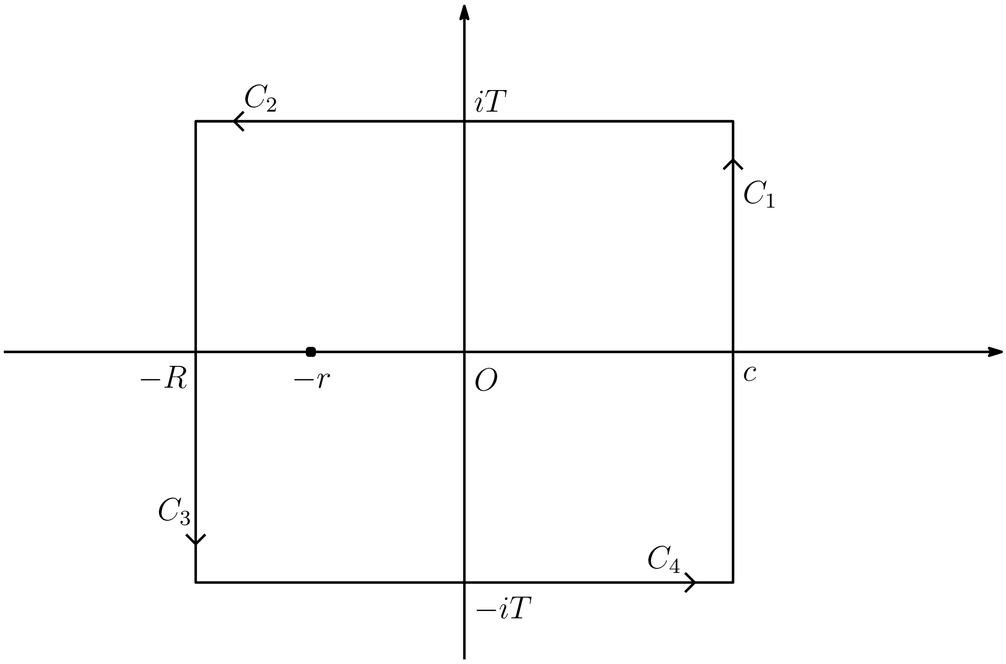
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s+r}\, ds = \begin{cases} x^{-r}, & x > 1 \\ 1/2, & x = 1 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

証明. $s = \sigma + i\tau$ とおく．

・$x > 1$ のとき．

留数定理を用いて示す．次のページの図のような積分路 $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ を考える．欲しいのは R と T が無限大にしたときの C_1 である．C_2 と C_4 の評価は同じであるから C_3 と C_2 が消えることを示す．積分の絶対値を上から評価する．

$$\begin{aligned} \left|\int_{C_3} \frac{x^s}{s+r}\, ds\right| &\leqq \int_{-R+iT}^{-R-iT} \frac{x^\sigma}{|s+r|}\, |ds| \\ &= x^{-R}\int_{-R+iT}^{-R-iT} \frac{|ds|}{|s+r|} \\ &\leqq x^{-R}\int_{-R+iT}^{-R-iT} \frac{|ds|}{|-R+r|} \\ &= \frac{x^{-R}}{R-r}\int_{-R+iT}^{-R-iT} |ds| \end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
&= \frac{x^{-R}}{R-r}|-2iT| \\
&= 2x^{-R}\frac{T}{R-r}\,.
\end{aligned}
$$

一方,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_2}\frac{x^s}{s+r}\,ds\right| &\leqq \int_{c+iT}^{-R+iT}\frac{x^\sigma}{|s+r|}\,|ds| \\
&\leqq x^c\int_{c+iT}^{-R+iT}\frac{|ds|}{|s+r|} \\
&\leqq x^c\int_{c+iT}^{-R+iT}\frac{|ds|}{|T|} \\
&= \frac{x^c}{T}\int_{c+iT}^{-R+iT}|ds| \\
&= x^c\frac{R+c}{T}\,.
\end{aligned}
$$

C_4 の場合も同様で $\left|\int_{C_4}\right| \leqq x^c\dfrac{R+c}{T}$ である.

そこで, $T=R^2$ という関係をもたせて R と T を同時に $+\infty$ に飛ばすと $x>1$ であるから,

$$
\left|\int_{C_3}\right| \leqq 2x^{-R}\frac{R^2}{R-r} \to 0 \quad (R\to\infty).
$$

$$\left|\int_{C_2}\right| \leqq x^c \frac{R+c}{R^2} \to 0 \ \ (R\to\infty).$$
$$\left|\int_{C_4}\right| \leqq x^c \frac{R+c}{R^2} \to 0 \ \ (R\to\infty).$$

極 $s=-r$ での留数は x^{-r} である．よって留数定理より，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^s}{s+r}\,ds = x^{-r}$$

である，

・$x=1$ のとき．

このとき積分は直接求められる．実際，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^s}{s+r}\,ds\\
=&\ \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+\infty}\frac{1}{s+r}\,ds\\
=&\ \frac{1}{2\pi i}\left[\log(s+r)\right]_{c-i\infty}^{c+i\infty}\\
=&\ \frac{1}{2\pi i}\left[\log|s+r|+i\arg(s+r)\right]_{c-i\infty}^{c+i\infty}\\
=&\ \frac{1}{2\pi i}\left[\lim_{T\to\infty}\log\left|\frac{c+r+iT}{c+r-iT}\right|+i\lim_{T\to\infty}\Big\{\arg(c+r+iT)-\arg(a+r-iT)\Big\}\right]\\
=&\ \frac{1}{2\pi i}\left(\log|1|+i\Big\{\frac{\pi}{2}-\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big\}\right)\\
=&\ \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

・$0<x<1$ のとき．

$$\int_{c-i\infty}^{c+\infty}\frac{x^s}{s+r}\,ds = 0$$

であることを示す．部分積分より，

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^s}{s+r}\,ds = \frac{1}{\log x}\left[\frac{x^s}{s+r}\right]_{c-i\infty}^{c+i\infty}+\frac{1}{\log x}\int_{c-i\infty}^{c+\infty}\frac{x^s}{(s+r)^2}\,ds.$$

第 1 項目の絶対値は 0 である．実際，

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\log x}\left[\frac{x^s}{s+r}\right]_{c-iT}^{c+iT}\right| &= \frac{1}{\log x}\left|\frac{x^{c+iT}}{c+r+iT}-\frac{x^{c-iT}}{c+r-iT}\right|\\
&\leqq \frac{x^c}{\log x}\left(\frac{1}{|c+r+iT|}+\frac{1}{|c+r-iT|}\right)\\
&\to 0\ (T\to\infty).
\end{aligned}$$

一方, 第 2 項目の絶対値は次のように上から評価できる.

$$\left|\frac{1}{\log x}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^s}{(s+r)^2}\,ds\right| \leqq \frac{x^c}{\log x}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{ds}{|s+r|^2}\,.$$

被積分関数の極は $s=-r$ のみであるから右半平面 $\mathrm{Re}(s)>-r$ では被積分関数は正則である. したがって c はいくらでも大きくできる. 今, $0<x<1$ であるから x^c はいくらでも小さくできる. また, 積分は絶対収束し c に依らない定数で抑えられるため右辺はいくらでも小さくできる. よって, この第 2 項は 0 である. したがって,

$$\int_{c-i\infty}^{c+\infty}\frac{x^s}{s+r}\,ds=0$$

となる. 以上により補題 3.3 が示された. □

積分の値が $x=1$ を境に消えるという性質が積分によって無限級数の項が有限個の項を除いて 0 になることのポイントである. $A_\rho(x)$ の積分表示のため, さらにもう 1 つの補題を示す.

補題 3.4. ([8, p.79]). $\rho>0, c>0$ に対して,

$$I(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{s(s+1)\cdots(s+\rho)}x^{s+\rho}\,ds$$

とおく. このとき次が成立する.

$$I(x)=\begin{cases}(1/\rho!)\,(x-1)^\rho, & x\geqq 1\\ 0\,, & 0<x<1\end{cases}\quad .$$

証明.

$$\begin{aligned}\frac{\rho!}{s(s+1)\cdots(s+\rho)} &= \frac{\Gamma(\rho+1)\Gamma(s)}{\Gamma(s+\rho+1)}\\ &= B(s,\rho+1)\\ &= \int_0^1 t^{s-1}(1-t)^\rho\,dt\\ &= \int_0^1 t^{s-1}\sum_{r=0}^{\rho}(-1)^r\binom{\rho}{r}t^r\,dt\\ &= \sum_{r=0}^{\rho}(-1)^r\binom{\rho}{r}\int_0^1 t^{s+r-1}\,dt\\ &= \sum_{r=0}^{\rho}\frac{(-1)^r\binom{\rho}{r}}{s+r}\,.\end{aligned}$$

2 つ目の等号では, ベータ関数が次のようにガンマ関数で表されるという事実を使った.

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ p>0,q>0.$$

また, $\binom{\rho}{r}$ は二項係数である. これより,

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{\rho!}\sum_{r=0}^{\rho}\frac{(-1)^r\binom{\rho}{r}}{s+r}x^{s+\rho}\,ds \\ &= \frac{x^\rho}{\rho!}\sum_{r=0}^{\rho}(-1)^r\binom{\rho}{r}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^s}{s+r}\,ds. \end{aligned}$$

最後の式変形で積分と級数の順序を交換できたのは, 各々の積分が収束しているからである.

よって 補題 3.3 より $x>1$ のときは,

$$I(x)=\frac{x^\rho}{\rho!}\sum_{r=0}^{\rho}(-1)^r\binom{\rho}{r}x^{-r}=\frac{x^\rho}{\rho!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^\rho=\frac{1}{\rho!}\,(x-1)^\rho.$$

また $\sum_{r=0}^{\rho}(-1)^r\binom{\rho}{r}=0$ であるから, $x=1$ のときは $I(x)=0$. さらに $0<x<1$ のときは補題 3.3 より $I(x)=0$ である. よって 補題 3.4 が示された. □

注意 3.5. 補題 3.4 の $I(x)$ で $\rho=0$ のときを考える. $x>1, 0<x<1$ のときは補題 3.4 の結果に $\rho=0$ を代入したものと同じであるが $x=1$ のときは結果が違う. $\rho=0$ かつ $x=1$ とすると補題 3.3 の $x=1$ での結果より $I(1)=1/2$ となる.

補題 3.4 を用いて命題 3.1 を示す.

命題 3.1 の証明. (3.2) の右辺の式から出発する. $c>\alpha$ とすると $\varphi(s)$ は絶対収束し, $\rho>0$ のとき積分は絶対収束するので順序を交換できる. よって,

$$\begin{aligned} \text{(3.2) の右辺} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{s(s+1)\cdots(s+\rho)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{{\lambda_n}^s}x^{s+\rho}\,ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}a_n\lambda_n^\rho\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{s(s+1)\cdots(s+\rho)}(\lambda_n^{-1}x)^{s+\rho}\,ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}a_n\lambda_n^\rho\, I(\lambda_n^{-1}x). \end{aligned}$$

補題 3.4 より $\lambda_n^{-1}x<1$, すなわち, $x<\lambda_n$ では $I(\lambda_n^{-1}x)=0$ である. つまり有限個を除く無限個の項が消えて無限級数が有限級数になった. ここが補題 3.3 の $x=1$ を境に積分の値が消えるという性質がうまく機能している部分である.

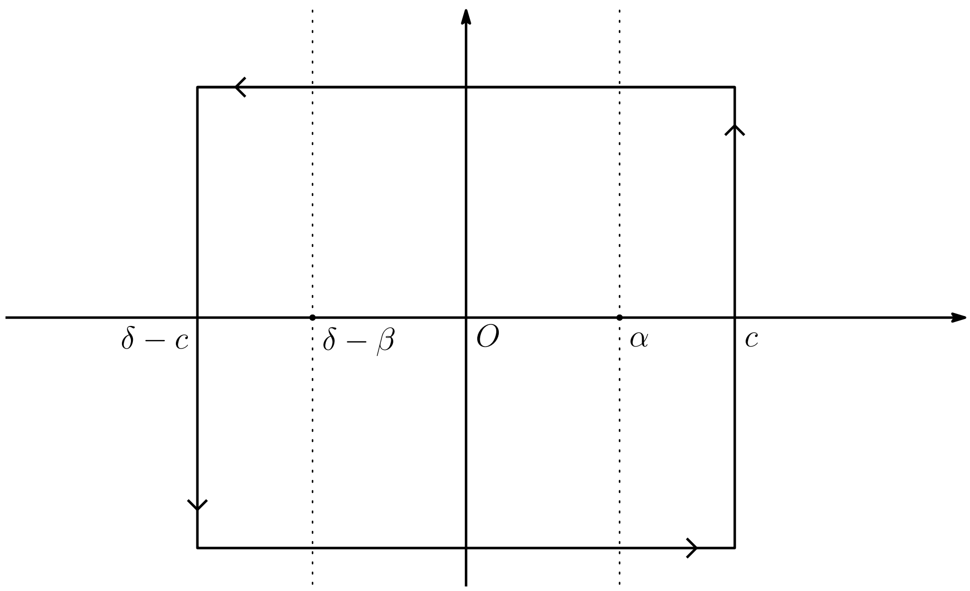
一方, $\lambda_n^{-1}x \geqq 1$, すなわち, $\lambda_n \leqq x$ では $I(\lambda_n^{-1}x) = (1/\rho!)(\lambda_n^{-1}x-1)^\rho$. よって,

$$\begin{aligned}
(3.2)\text{ の右辺} &= \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n \lambda_n^\rho \frac{1}{\rho!}(\lambda_n^{-1}x-1)^\rho \\
&= \frac{1}{\rho!}\sum_{\lambda_n \leqq x} a_n (x-\lambda_n)^\rho \\
&=: A_\rho(x).
\end{aligned}$$

$\rho = 0$ のときは注意 3.5 より $I(1) = 1/2$ であるから, $\rho = 0$ かつ $\lambda_n = x$ のときに限り $\sum_{n \leqq x} a_n$ の最後の項が $1/2$ 倍される. □

4　$A_\rho(x) - Q_\rho(x)$ の級数表示

前章の冒頭にも述べたとおり, この章では $A_\rho(x)$ の積分表示の積分路を $\delta - \beta$ より左側の半平面に移す. そこで下図のような積分路を考える.



すると評価ができない vertical strip $\delta - \beta \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq \alpha$ での Imagnary part が無限大にいくときの振る舞いを調べる必要がでてくる. そのために Lindelof の定理と Stirling の公式を使う.

定理 4.1. (**Lindelof の定理 [9, p.118]**). $s = \sigma + i\tau, F = \left\{s \in \mathbb{C} | \nu_1 \leqq \sigma \leqq \nu_2\right\}$ とする. $f(s)$ は F を含む開領域で正則で, 次の (1), (2) をみたすものとする：
(1)　ある正の定数 a が存在して, F で一様に $|f(s)| = O(e^{|\tau|^a})\ \ : |\tau| \to \infty$.
(2)　F の境界で $|f(s)| = O(|\tau|^b)\ \ : |\tau| \to \infty$.
　このとき $f(s)$ は F で一様に $|f(s)| = O(|\tau|^b)$ となる.

証明. まずはじめに $b = 0$ のときを証明する. 仮定 (2) より, ある $M > 0$ が存在して, F の境界上で $|f(s)| \leqq M$ である. m を 4 で割ると 2 余る正整数とする. このとき F で一様に

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(s^m) &= \mathrm{Re}((\sigma + i\tau)^m) \\ &= -\tau^m + O(|\tau|^{m-1})\ \ : |\tau| \to \infty\end{aligned}$$

であるから, $\mathrm{Re}(s^m)$ は F 上で上界をもつ. m, N として $m > \delta, \mathrm{Re}(s^m) \leqq N$ とすれば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$F \text{ の境界上で } |f(s)e^{\varepsilon s^m}| \leqq Me^{\varepsilon N}$$

かつ

$$F \text{ で一様に } |f(s)e^{\varepsilon s^m}| = O(e^{|\tau|^\delta - \varepsilon\tau^m + K|\tau|^{m-1}}) \to 0\ \ : |\tau| \to \infty$$

となる．ただし K はある定数である．すなわち,

$$|f(s)e^{\varepsilon s^m}| \leqq Me^{\varepsilon N},\ (s \in F)$$

である．$\varepsilon \to 0$ とすれば $|f(s)| \leqq M$, すなわち $|f(s)| = O(|\tau|^0)$ である．これで $b = 0$ の場合は示された.

$b \neq 0$ のときは $b = 0$ の場合に帰着させて証明する.

$$g(s) = (s - \nu_1 + 1)^b = e^{b \log(s - \nu_1 + 1)}$$

とする．ただし対数は主値をとることにする．$\mathrm{Re}(\log(s - \nu_1 + 1)) = \log|s - \nu_1 + 1|$ だから $g(s)$ は F で一様に

$$|g(s)| = |s - \nu_1 + 1|^b \sim |\tau|^b \quad : |\tau| \to \infty$$

である．ここで, $f_1(s) = f(s)/g(s)$ とおく．このとき, この $f_1(s)$ は定理の $b = 0$ の場合の仮定をみたす．定理の $b = 0$ の場合はすでに示されているので $f_1(s)$ は F で有界関数である．よって $|f(s)| = O(|\tau|^b)$ である. □

定理 4.2. (Stirling の公式 [10, p.201]). 任意の vertical strip で一様に次が成立する.

$$|\Gamma(\sigma + i\tau)| \sim \sqrt{2\pi}|\tau|^{\sigma - 1/2} e^{-(\pi/2)|\tau|} \quad : |\tau| \to \infty. \tag{4.3}$$

証明. 出発点は $\log \Gamma(s)$ の 2 階微分に関する公式

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(s+n)^2}$$

の右辺の部分和

$$\frac{1}{s^2} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(s+n)^2}$$

を線積分で表すことである．それには整数点 $s = \nu$ で留数 $1/(s+\nu)^2$ をもつ関数が必要であるが, その関数として,

$$\Phi(\zeta) = \frac{\pi \cot \pi\zeta}{(z+\zeta)^2}$$

を選ぶ．ただし, $\cot s = 1/\tan s$ である．ここで ζ が変数で, 助変数 $s = \sigma + i\tau$ に関しては $\sigma > 0$ とする．その後 $n \to \infty$ とし, 2 回積分して主張を示す.

垂直辺が $\xi = 0$ と $\xi = n + 1/2$ の上にあり水平辺が $\eta = \pm Y$ の上にある長方形を考え, そこで留数定理を用い, Y, n の順に ∞ にもっていく．この長方形の周を K とおくと, これは原点で極を通るが, 積分は主値をとり原点での留数を半分にすれば留数定理を使うことができる．また, $\sigma > 0$ としているので K で囲む極は $s = 0, 1, 2 \cdots, n$ である．ゆえに,

$$\text{p.v.}\frac{1}{2\pi i}\int_K \Phi(\zeta)\, d\zeta = -\frac{1}{2s^2} + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{(s+\nu)^2}$$

を得る．ただし, p.v. とは積分の主値を表す記号である．Y, n をこの順に ∞ にもっていくと, K の水平面および $\xi = n + 1/2$ 上の積分はともに 0 に収束する．したがって虚軸上の $-\infty$ から ∞ への積分の主値を計算することにより次を得る．

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right) = \frac{1}{s} + \frac{1}{2s^2} + \int_0^\infty \frac{4\eta s}{(\eta^2+s^2)^2}\cdot\frac{d\eta}{e^{2\pi\eta}-1}\,.$$

この式を積分する．$\log s$ は主値をとることにし, C を積分定数として

$$\left(\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right) = C + \log s - \frac{1}{2s} - \int_0^\infty \frac{2\eta}{\eta^2+s^2}\cdot\frac{d\eta}{e^{2\pi\eta}-1} \tag{4.4}$$

となる．注意点としては右辺の積分が, 積分記号の中で微分できることは確かめなくてはならないが, これは s を半平面 $\sigma > 0$ の任意のコンパクト集合上に限ればこの積分は一様収束するからこれは正しい．

もう一度積分する．そうすると積分の中に $\arctan(s/\eta)$ が表れる．多価関数を用いることを回避するために (4.4) の積分を部分積分する．

$$-\int_0^\infty \frac{2\eta}{\eta^2+s^2}\cdot\frac{d\eta}{e^{2\pi\eta}-1}\,d\eta = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{s}{\eta^2+s^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}\,d\eta.$$

ここで対数は実数である．これより次を得る．

$$\log\Gamma(s) = C' + Cs + \left(s - \frac{1}{2}\right)\log s + J(s). \tag{4.5}$$

ただし,

$$J(s) = \int_0^\infty \frac{s}{\eta^2+s^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}\,d\eta \tag{4.6}$$

である．C' は新しい積分定数で, 便宜上 $C-1$ を C にとりかえた．

最後に C と C' 決める．そのためには $J(s)$ の振る舞いを調べる必要があるがこれは $\sigma \geqq c > 0$ のとき $s \to \infty$ で $J(s) \to 0$ となる．実際,

$$J(s) = \int_0^{|s|/2} + \int_{|s|/2}^\infty = J_1 + J_2$$

とかく．J_1 では $|\eta^2 + s^2| \geqq 3|s|^2/4$ より,

$$|J_1| \leqq \frac{4}{3\pi|s|}\int_0^\infty \log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}\,d\eta$$

を得る．J_2 では $|\eta^2+s^2| > c|s|$ より,

$$|J_2| < \frac{1}{\pi c}\int_{|s|/2}^\infty \log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}\,d\eta$$

を得る．$\log(1-e^{-2\pi\eta})$ の積分は収束するから, $s \to \infty$ で J_1, J_2 は 0 に収束する．

C の値は $\log\Gamma(s+1)=\log s+\log\Gamma(s)$ に (4.5) を代入することにより求める．実際,

$$C=-\left(s+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{s}\right)+J(s)-J(s+1)$$

となり $s\to\infty$ より $C=-1$ を得る．一方, C' の方は $s=(1/2)+i\tau$ として $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\pi/(\sin\pi s)$ を適用することにより $C'=(1/2)\log 2\pi$ を得る．これにより,

$$\log\Gamma(s)=\frac{1}{2}\log 2\pi-s+\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s+J(s) \tag{4.7}$$

を得る．ただし, $J(s)$ の表示 (4.6) は右半平面で成立し, 半平面 $s\geqq c>0$ において $s\to\infty$ のとき 0 に収束する．この結果と $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ により (4.3) を得る． □

Stirling の公式 (4.3) により (ガンマ関数/ガンマ関数) という形の関数は分母と分子で変数 s の Imagnary part が等しければ評価式の exponential の部分が打ち消しあって $|\tau|\to\infty$ で高々多項式増加であることが分かる．

$\varphi(s)$ の極は有限個しかないから適当な多項式 $P(s)$ をかけるとそれは全平面で正則な関数となる．この $P(s)\varphi(s)$ に定理 4.1 を適用する．そのため $P(s)\varphi(s)$ が定理 4.1 の条件 (1), (2) を満たしていることを確かめる．

(1) 任意の vertical strip で $|\Delta(s)\varphi(s)|\to 0,\ |\tau|\to\infty$ という仮定 (1.12) より $|\varphi(s)|=O(1/|\Delta(s)|)$ である．$\Delta(s)$ は N 個のガンマ関数の積であったから Stirling の公式 (4.3) より, $\varphi(s)$ は $|\tau|\to\infty$ で高々指数増加である．よって, $|P(s)\varphi(s)|$ もそうである．

(2) $\sigma>\alpha$ では $\varphi(s)$ は絶対収束するから $|\varphi(s)|$ は定数で抑えられる．一方で, $\sigma<\delta-\beta$ では関数等式より $|\varphi(s)|=|\Delta(\delta-s)/\Delta(s)||\psi(\delta-s)|$ で, $|\psi(\delta-s)|$ は定数で抑えられ, $|\Delta(\delta-s)/\Delta(s)|$ は分母分子で Imagnary part が同じだから Strling の公式 (4.3) より $|\varphi(s)|$ は $|\tau|\to\infty$ で高々多項式増加である．したがって $|P(s)\varphi(s)|$ は $\sigma>\alpha$ および $\sigma<\delta-\beta$ において $|\tau|\to\infty$ で高々多項式増加である．

以上より $|P(s)\varphi(s)|$ は定理 4.1 の仮定をすべてみたすことが確かめられたので適用できて, $|P(s)\varphi(s)|$ は vertical strip $\delta-\beta\leqq\sigma\leqq\alpha$ において $|\tau|\to\infty$ で高々多項式増加であることがわかった．$P(s)$ は多項式だから $|\varphi(s)|$ は $|\tau|\to\infty$ で高々多項式増加である．この事実を用いて $A_\rho(x)$ の積分路の vertical line を $\sigma=\delta-\beta$ の左側に移すということを考える．$A_\rho(x)$ の積分表示 (3.2) を見てみると分母に $s(s+1)\cdots(s+\rho)$ があるので ρ を十分大きくとって Imagnary part を無限大に飛ばせは水平辺での積分は消える．よって, $\varphi(s)$ の極は有限個しかないから c を十分大きくとれば,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\varphi(s)}{s(s+1)\cdots(s+\rho)}x^{s+\rho}\,ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-c+i\infty}^{\delta-c-i\infty}\frac{\varphi(s)}{s(s+1)\cdots(s+\rho)}x^{s+\rho}\,ds\\
=\ &\text{被積分関数のすべての極に対する留数の和}\\
=\ &Q_\rho(x)
\end{aligned}$$

となる．左辺の第 1 項目が $A_\rho(x)$ で第 2 項目が誤差項である．この第 2 項目を評価する．しかし, この積分の積分路の Real part は $\delta-c$ で $\varphi(s)$ は絶対収束しないから評価

ができない. そこで $\delta-s$ を s に移して, 関数等式を使うと評価できる形となる. 実際,

$$\begin{aligned}
&A_\rho(x)-Q_\rho(x)\\
=&\ -\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-c+i\infty}^{\delta-c-i\infty}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\rho+1+s)}\varphi(s)x^{s+\rho}\,ds\\
=&\ \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(\delta-s)}{\Gamma(\delta-s+\rho+1)}\varphi(\delta-s)x^{\delta-s+\rho}\,ds\\
=&\ \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(\delta-s)}{\Gamma(\delta-s+\rho+1)}\frac{\Delta(s)}{\Delta(\delta-s)}\psi(s)x^{\delta-s+\rho}\,ds.
\end{aligned}$$

いま,

$$g(s):=\frac{\Gamma(\delta-s)}{\Gamma(\delta-s+\rho+1)}\frac{\Delta(s)}{\Delta(\delta-s)}$$

$$I(x):=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}g(s)x^{\delta-s+\rho}\,ds \tag{4.8}$$

とおく. c と ρ が十分大きければ積分も $\psi(s)$ も絶対収束するので $\int$ と $\sum$ が交換できて次のようになる.

$$\begin{aligned}
A_\rho(x)-Q_\rho(x)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}g(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{{\mu_n}^s}x^{\delta-s+\rho}\,ds\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{{\mu_n}^{\delta+\rho}}\ \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}g(s)(\mu_n x)^{\delta-s+\rho}\,ds\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{{\mu_n}^{\delta+\rho}}I(\mu_n x).
\end{aligned}\tag{4.9}$$

この等式は c と ρ が十分大きいときしか成り立たないことに注意しておく.

この $I(x)$ を評価することがこの章の目標であるが, その前に $I(x)$ が絶対収束するような c の範囲を求めておく. 再び Stirling の公式 (4.3) より,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\Gamma(\delta-s)}{\Gamma(\delta-s+\rho+1)}\right| &\sim |\tau|^{(\delta-\sigma-1/2)-(\rho+1+\delta-\sigma-1/2)}\\
&= |\tau|^{-\rho-1} \quad : |\tau|\to\infty.
\end{aligned}$$

また, $|\Delta(s)/\Delta(\delta-s)|\sim O(|\tau|^{A(2c-\delta)})$ であるから,

$$\left|\frac{\Gamma(\delta-s)\Delta(s)}{\Gamma(\delta-s+\rho+1)\Delta(\delta-s)}\right|\sim O(|\tau|^{A(2c-\delta)-\rho-1}) \quad : |\tau|\to\infty$$

である. よって, $I(x)$ が絶対収束するような c の範囲は $A(2c-\delta)-\rho-1<-1$, すなわち $c<(A\delta+\rho)/(2A)$ である. よって以下, $c=c_\rho=(A\delta+\rho)/(2A)-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ は ρ に依存しない定数) とおく. ρ が十分大ならば c も大きくとれることに注意しておく. また, 被積分関数の極と積分路が重ならないように c をとるものとする.

では $I(x)$ を評価する.

命題 4.10. (4.8) で定めた $I(x)$ に対し, 次が成立する.

$$I(x) = O(x^{(\delta/2)-(1/4A)+\rho(1-1/2A)}).$$

証明の前に方針を述べる. $I(x)$ をベッセル関数を使って評価を行いので, 被積分関数の (たくさんのガンマ関数)/(たくさんのガンマ関数) というガンマファクターを (1 つのガンマ関数)/(1 つのガンマ関数) にまとめることが最初の仕事である. そうすれば $I(x)$ をベッセル関数を用いて表すことができ定理 1.9(2) によって評価できる. そこで $I(x)$ を次のように変形し, 第 1 項目と第 2 項目をそれぞれ評価する. 第 2 項目がまとめあげた項である.

$$I(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Big[g(s)-h(s)\Big]x^{\delta-s+\rho}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}h(s)x^{\delta-s+\rho}\,ds. \tag{4.11}$$

$h(s)$ は次で定義される.

$$h(s) := \frac{\Gamma(As+\mu)}{\Gamma(\lambda-As)}e^{B+\Theta s}.$$

ここで, μ, λ, Θ, B は $\varphi(s), \psi(s)$ と関数等式から定まる定数で, 具体的に書くと次である.

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{N}\left(\beta_\nu - \frac{1}{2}\right). \\
\lambda &= \mu + A\delta + \rho + 1. \\
\Theta &= 2\sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu\log\alpha_\nu - 2A\log A. \\
B &= -\delta\sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu\log\alpha_\nu + (A\delta+\rho+1)\log A.
\end{aligned}$$

本命は第 2 項目であり, この第 1 項は第 2 項に吸収されるようにうまく定めている. では (4.11) 式の第 1 項の評価をする.

命題 4.12. ((4.11) の第 1 項の評価).

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Big[g(s)-h(s)\Big]x^{\delta-s+\rho}\,ds = O(x^{(\delta/2)-(1/2A)+\rho(1-1/2A)+\varepsilon}).$$

証明. まず Stirling の公式 (4.3) より次が成り立つことに注意しておく.

$$g(s)-h(s) = h(s)\cdot O\left(\frac{1}{|s|}\right) \quad : |\tau| \to \infty.$$

第 1 項の積分路を右に $1/2A$ だけずらす．するとずらす前と後で，もし被積分関数の極をまたいでいたら積分の値が変わってくる．そこでまたぐ極の評価も考える必要がある．$g(s)-h(s)$ の極は，

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{\mu}{A}\right),\ -\mathrm{Re}\left(\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}\right),\ \delta+n\quad n\in\mathbb{Z}_{\geqq 0}$$

であるが c を十分大きくとれば前半の 2 つは積分路の左側にあるので考慮しなくて良い．問題は $s=\delta+n$ である．この整数 n は ρ に依存しているので以下この極を $s=\delta+n_\rho(n_\rho\in\mathbb{Z}_{\geqq 0})$ と書く．ただしこのような極は必ず存在するとは限らない．

これより，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Big[g(s)-h(s)\Big]x^{\delta-s+\rho}\,ds\\
=\ &\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\rho+(1/2A)-i\infty}^{c_\rho+(1/2A)+i\infty}\Big[g(s)-h(s)\Big]x^{\delta-s+\rho}\,ds+R\\
=\ &\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\rho+(1/2A)-i\infty}^{c_\rho+(1/2A)+i\infty}h(s)\cdot O\left(\frac{1}{|s|}\right)x^{\delta-s+\rho}\,ds+R
\end{aligned}$$

となる．R は積分路の移動によってまたいだ極 $s=\delta+n_\rho$ の留数．

$h(s)$ の作り方より $\displaystyle\int h(s)x^{\delta-s+\rho}\,ds$ は絶対収束しているから，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{c_\rho+(1/2A)-i\infty}^{c_\rho+(1/2A)+i\infty}h(s)\cdot O\left(\frac{1}{|s|}\right)x^{\delta-s+\rho}\,ds\right|\\
\leqq\ &x^{\delta+\rho-c_\rho-\frac{1}{2A}}\int_{c_\rho+(1/2A)-i\infty}^{c_\rho+(1/2A)+i\infty}\left|h(s)\cdot O\left(\frac{1}{|s|}\right)\right|\,ds\\
=\ &O(x^{\delta+\rho-c_\rho-(1/2A)})\\
=\ &O(x^{(\delta/2)-(1/2A)+\rho(1+(1/2A)+\varepsilon)}).
\end{aligned}$$

また，極 $s=\delta+n_\rho$ は 1 位の極だから，

$$R=O(\delta+\rho-(\delta+n_\rho))=O(\rho-n_\rho).$$

細かい計算により $n_\rho\geqq(\rho+1-A\delta)/(2A)$ であることがわかる．よって，

$$\begin{aligned}
R\ &=\ O(x^{\rho-n_\rho})\\
&=\ O(x^{\rho-(\rho/2A)-(1/2A)+\delta/2})\\
&=\ O(x^{(\delta/2)-(1/2A)+\rho(1-1/2A)})
\end{aligned}$$

となり $\varepsilon>0$ より R の方は無視できる．したがって，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Big[g(s)-h(s)\Big]x^{\delta-s+\rho}\,ds=O(x^{(\delta/2)-(1/2A)+\rho(1-1/2A)+\varepsilon})$$

となる． □

次に第 2 項の評価ををベッセル関数を用いて評価をする.

命題 4.13. ((4.11) **の第 2 項の評価**).

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} h(s)x^{\delta-s+\rho}\,ds = O(x^{(\delta/2)-(1/2A)+\rho(1-1/2A)}).$$

証明. ベッセル関数の形になるように左辺を式変形をして, 定理 1.9 を適用する.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} h(s)x^{\delta-s+\rho}\,ds\\
=\ &\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(As+\mu)}{\Gamma(\lambda-As)}\,e^{B+\Theta s}x^{\delta-s+\rho}\,ds\\
=\ &A_1x^{\delta+\rho}\int_c \frac{\Gamma(As+\mu)}{\Gamma(\mu+A\delta+\rho+1-As)}\,e^{\Theta s}x^{-s}\,ds\\
=\ &A_2x^{\delta+\rho}\int_{Ac+\mu} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(2\mu+A\delta+\rho+1-z)}\,e^{\Theta z/A}x^{-(z/A)+(\mu/A)}\,dz\\
=\ &A_2x^{\delta+\rho+(\mu/A)}\int_{Ac+\mu} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(2\mu+A\delta+\rho+1-z)}\left\{(xe^{-\Theta})^{1/2A}\right\}^{-2z}\,dz\\
=\ &A_3x^{\delta+\rho+(\mu/A)}\int_{Ac+\mu} \frac{2^{2z-\nu}\Gamma(z)}{\Gamma(\nu+1-z)}(2y^{1/2A})^{-2z}\,dz\\
=\ &A_3x^{\delta+\rho+(\mu/A)}\,\frac{J_\nu(2y^{1/2A})}{(2y^{1/2A})^{\nu}}\\
=\ &A_4x^{\delta+\rho+(\mu/A)-(\nu/2A)}\,J_\nu(2y^{1/2A})\\
=\ &O(x^{\delta+\rho+(\mu/A)-(\nu/2A)-(1/4A)})\\
=\ &O(x^{\delta+\rho+(\mu/A)-(\mu/A)-(\delta/2)-(\rho/2A)-(1/4A)})\\
=\ &O(x^{(\delta/2)-(1/4A)+\rho(1-1/2A)}).
\end{aligned}$$

3 番目の等号では $As+\mu=z$ と変数変換をした. また, 5 番目の等号では $2\mu+A\delta+\rho=\nu, xe^{-\Theta}=y$ とおいた. さらに 6 番目と 8 番目の等号でそれぞれ定理 1.9 の (1), (2) を適用した. また,$A_1,\cdots,A_4$ は定数である.

定理 1.9(1) を適用したのだから定理 1.9(1) の条件

$$0<c\leqq \mathrm{Re}(\nu+1), \mathrm{Re}(\nu)>0$$

を満たしているかどうかを議論しなくてはならない.

積分路の実部の 2 倍は $2Ac+2\mathrm{Re}(\mu)$ で, $\nu=2\mu+A\delta+\rho, 0<c=c_\rho<(A\delta+\rho)/(2A)$ であるから第 1 の条件はみたす. また, $\mathrm{Re}(\nu)>0$ については ρ を十分大きくとれば成り立つ. したがって命題 4.13 が示された. □

命題 4.10 の証明. 命題 4.12 と命題 4.13 より,

$$I(x)=O(x^{(\delta/2)-(1/4A)+\rho(1-1/2A)+\varepsilon})+O(x^{(\delta/2)-(1/2A)+\rho(1-1/2A)})$$

となる. ε は任意だから $\varepsilon < 1/4A$ とすれば,

$$I(x) = O(x^{(\delta/2)-(1/4A)+\rho(1-1/2A)})$$

となる. $\square$

5 主定理の証明の完結

前章の (4.9) 式で $A_\rho(x) - Q_\rho(x)$ が $I(x)$ の級数という形で得られたが, これは ρ が大きいときしか成り立たない. 欲しいのは ρ が 0 のときの評価であるのでこの章では $A_0(x) - Q_0(x)$ を出すために両辺を差分して ρ を 0 に落とす.

定義 5.1. (**差分**). ρ を 0 以上の整数とし, $y > 0$ とする. 関数 $F(x)$ の ρ 階差分は次で与えられる.

$$\Delta_y^\rho F(x) := \sum_{\nu=0}^{\rho} (-1)^{\rho-\nu} \binom{\rho}{\nu} F(x+\nu y) \tag{5.2}$$

$$= \int_x^{x+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \cdots \int_{t_{\rho-1}}^{t_{\rho-1}+y} F^{(\rho)}(t_\rho)\, dt_\rho. \tag{5.3}$$

$F^{(\rho)}$ は F の ρ 階微分である. (5.2) が定義で (5.3) は特に F が C^ρ 級のとき成り立つ式である. しかし C^ρ 級でなくとも階段関数のような積分可能なものであれば成り立つことに注意しておく. これは帰納法によって証明できる. また以降 $y = O(x)$ と仮定する.

では実際に (4.9) 式の両辺を差分する.

命題 5.4. ($A_\rho(x)$ **の** ρ **回差分の評価**).

$$\Delta_y^\rho A_\rho(x) = y^\rho A_0(x) + O\left(y^\rho \sum_{x < n \leqq x+\rho y} |a_n| \right).$$

証明. 差分の定義式 (5.2) より,

$$\begin{aligned}
\Delta_y^\rho A_\rho(x) &= \sum_{\nu=0}^{\rho} (-1)^{\rho-\nu} \binom{\rho}{\nu} \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \sum_{\lambda_n \leqq x+\nu y} a_n (x+\nu y - \lambda_n)^\rho \\
&= \sum_{\nu=0}^{\rho} (-1)^{\rho-\nu} \binom{\rho}{\nu} \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \left(\sum_{\lambda_n \leqq x} + \sum_{x < \lambda_n \leqq x+\nu y} \right) a_n (x+\nu y - \lambda_n)^\rho \\
&= \sum_{\nu=0}^{\rho} (-1)^{\rho-\nu} \binom{\rho}{\nu} \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n (x+\nu y - \lambda_n)^\rho \\
&\qquad + \sum_{\nu=0}^{\rho} (-1)^{\rho-\nu} \binom{\rho}{\nu} \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \sum_{x < \lambda_n \leqq x+\nu y} a_n (x+\nu y - \lambda_n)^\rho \\
&= \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n \frac{\Delta_y^\rho (x-\lambda_n)^\rho}{\Gamma(\rho+1)} \\
&\qquad + \sum_{\nu=0}^{\rho} (-1)^{\rho-\nu} \binom{\rho}{\nu} \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \sum_{x < \lambda_n \leqq x+\nu y} a_n (x+\nu y - \lambda_n)^\rho.
\end{aligned}$$

$(x-\lambda_n)^\rho$ の ρ 階微分は $\rho! = \Gamma(\rho+1)$ であるから (5.3) より,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_y^\rho (x-\lambda_n)^\rho}{\Gamma(\rho+1)} &= \int_x^{x+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \cdots \int_{t_{\rho-1}}^{t_{\rho-1}+y} dt_\rho \\ &= y^\rho.\end{aligned}$$

一方, 第 2 項の方は, $x < \lambda_n \leqq x+\nu y$ のとき $x+\nu y-\lambda_n$ は y の定数倍だから

$$\sum_{\nu=0}^{\rho} (-1)^{\rho-\nu} \binom{\rho}{\nu} \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \sum_{x<\lambda_n \leqq x+\nu y} a_n (x+\nu y-\lambda_n)^\rho = O\left(y^\rho \sum_{x<\lambda_n \leqq x+\rho y} |a_n| \right)$$

となる. したがって,

$$\begin{aligned}\Delta_y^\rho A_\rho(x) &= y^\rho \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n + O\left(y^\rho \sum_{x<\lambda_n \leqq x+\nu y} |a_n| \right) \\ &= y^\rho A_0(x) + O\left(y^\rho \sum_{x<\lambda_n \leqq x+\rho y} |a_n| \right).\end{aligned}$$

よって, 命題 5.4 が示された. □

次に $Q_\rho(x)$ を差分する.

命題 5.5. ($Q_\rho(x)$ **の** ρ **回差分の評価**).

$$\Delta_y^\rho Q_\rho(x) = y^\rho Q_0(x) + O(y^{\rho+1} x^{q-1} (\log x)^{r-1}).$$

ただし q は $\varphi(s)$ の極の実部の最大値で, r はその位数の最大値である.

証明. 定義式 (5.3) で

$$Q_\rho(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(s)}{s(s+1)\cdots(s+\rho)} x^{s+\rho}\, ds$$

を差分する. $Q_\rho(x)$ の ρ 階微分が必要だが, 微分は積分の中で行える. なぜなら極は有限個だから積分路はコンパクトだからである.

よって

$$Q_\rho^{(\rho)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(s)}{s} x^s\, ds = Q_0(x)$$

となる. 第 1 章の例のように, 被積分関数の極 $s=\xi$ における留数は $x^\xi (\log x)^{r_\xi - 1}$ のスカラー倍でかける. ただし, r_ξ は極 $s=\xi$ の位数である. したがって,

$$\begin{aligned}Q_0(x) &= \sum_\xi O(x^\xi (\log x)^{r_\xi - 1}) \\ &= O(x^q (\log x)^{r-1})\end{aligned}$$

とかける．ただし $\sum_{\xi}$ は被積分関数の極すべてにわたる和で, q は ξ の Real part の最大値で, r は r_{ξ} の最大値である．

また, 平均値の定理から

$$\int_{x}^{x+y} Q_0(t)\,dt = y\,Q_0(x+y_0)\ :\ 0<y_0<y \tag{5.6}$$

となるが $y=O(x)$ ならば再び平均値の定理より $Q_0(x+y_0)=Q_0(x)+O(y_0Q_0'(x))$ とかける．よって,

$$y\,Q_0(x+y_0) = y\,Q_0(x)+O(y^2Q_0'(x)) \tag{5.7}$$

となる．(5.6) の左辺と (5.7) の右辺をそれぞれ ρ 回積分すると $Q_0'(x)=x^{q-1}(\log x)^{r-1}$ より

$$\Delta_y^{\rho}Q_{\rho}(x) = y^{\rho}Q_0(x)+O(y^{\rho+1}x^{q-1}(\log x)^{r-1}).$$

ただし q は $\varphi(s)$ の極の実部の最大値で, r はその位数の最大値である．よって, 命題 5.5 が示された． □

次に (4.9) 式の右辺を差分する．

命題 5.8.

$$\Delta_y^{\rho}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^{\delta+\rho}}I(nx)\right) = O(y^{\rho-2Au}x^{(\delta/2)-(1/4A)+(2A-1)u}).$$

ただし $u=\beta-(\delta/2)-(1/4A)+\varepsilon>0$ である．

証明. $I(x)$ の差分を考える．(5.2), (5.3) の定義式をそれぞれ使って 2 種類の評価を考える．まず, (5.2) の方で考えると, $y=O(x)$ であるからそのまま

$$\Delta_y^{\rho}I(x) = O(x^{(\delta/2)-(1/4A)+\rho(1-1/2A)})$$

となる．一方, (5.3) の方では, $I(x)$ の ρ 階微分の評価が必要になるが $I(x)$ の ρ 階微分は $I(x)$ の定義より $I(x)$ に $\rho=0$ を形式的に代入したものと同じである．$I^{(\rho)}(x)$ の評価は $I(x)$ の評価式に $\rho=0$ を代入したものとなる．注意点として, $I^{(\rho)}(x)$ の積分路は $|\tau|>R$ で $\sigma=c_0$ と $C_0-iR, C_0+r-iR, c_0+r+iR, C_0+iR$ を頂点とする長方形の 3 辺を通るようなものに変更しなくてはならない．ここで R と r は積分路の左右で極の個数が変化しないようにうまく取ったものである．しかし, ベッセル関数による評価は積分路に依らないため結果にも影響しない．(5.3) の積分の幅は全て y で ρ 回あるから,

$$\Delta_y^{\rho}I(x) = O(y^{\rho}x^{(\delta/2)-(1/4A)})$$

となる．しかし欲しいのは $I(nx)$ の差分である．関数 $f(x), F(x,y)$ に対して, $\Delta_y^{\rho}f(x)=F(x,y)$ とすると $\Delta_y^{\rho}f(nx)$ は $(\Delta_y^{\rho}f)(nx)$ ではなく x の差分であるので

$$\begin{aligned}\Delta_y^\rho f(nx) &= \sum_{\nu=0}^{\rho}(-1)^{\rho-\nu}\binom{\rho}{\nu}f(n(x+\nu y)) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\rho}(-1)^{\rho-\nu}\binom{\rho}{\nu}f(nx+\nu ny) \\ &= F(nx,ny)\end{aligned}$$

となり n は y の方にもかかる. したがって,

$$\Delta_y^\rho I(nx) = \begin{cases} O((nx)^{(\delta/2)-(1/4A)+\rho(1-1/2A)}) \\ O((ny)^\rho (nx)^{(\delta/2)-(1/4A)}) \end{cases}$$

となる. 命題の左辺の級数を次のように z で分け, 第 1 項に下端の評価式を, 第 2 項に上段の評価式を適用する.

$$\begin{aligned}&\Delta_y^\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^{\delta+\rho}}I(nx)\right) \\ &= O\left(\sum_{\mu_n\leqq z}\frac{|b_n|}{{\mu_n}^{\delta+\rho}}I(\mu_n x)\right)+O\left(\sum_{\mu_n> z}\frac{|b_n|}{{\mu_n}^{\delta+\rho}}I(\mu_n x)\right) \\ &= O\left(\sum_{\mu_n\leqq z}\frac{|b_n|}{{\mu_n}^{\delta+\rho}}(\mu_n y)^\rho(\mu_n x)^{(\delta/2)-(1/4A)}\right) \\ &\qquad + O\left(\sum_{\mu_n> z}\frac{|b_n|}{{\mu_n}^{\delta+\rho}}(\mu_n x)^{(\delta/2)-(1/4A)+\rho(1-1/2A)}\right) \\ &= O\left(\sum_{\mu_n\leqq z}\frac{|b_n|}{{\mu_n}^{(\delta/2)+(1/4A)}}y^\rho x^{(\delta/2)-(1/4A)}\right) \\ &\qquad + O\left(\sum_{\mu_n> z}\frac{|b_n|}{{\mu_n}^{(\delta/2)+(1/4A)+(\rho/2A)}}x^{(\delta/2)-(1/4A)+\rho(1-1/2A)}\right). \end{aligned} \tag{5.9}$$

ここで $\sum_{\mu_n\leqq z}|b_n|{\mu_n}^{-(\delta/2)-(1/4A)}$ と $\sum_{\mu_n>z}|b_n|{\mu_n}^{-(\delta/2)-(1/4A)-(\rho/2A)}$ の z のオーダーを調べる.

・$\nu<\beta+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ のとき.

$$\begin{aligned}\sum_{\mu_n\leqq z}\frac{|b_n|}{{\mu_n}^{\nu}} &= \sum_{\mu_n\leqq z}\frac{|b_n|}{{\mu_n}^{\beta+\varepsilon}}\mu_n^{\beta+\varepsilon-\nu} \\ &\leqq z^{\beta+\varepsilon-\nu}\sum_{\mu_n> z}\frac{|b_n|}{{\mu_n}^{\beta+\varepsilon}} \\ &= O(z^{\beta+\varepsilon-\nu}).\end{aligned}$$

・$\nu > \beta + \varepsilon$ のとき.

$$\begin{aligned}\sum_{\mu_n > z} \frac{|b_n|}{{\mu_n}^{\nu}} &= \sum_{\mu_n > z} \frac{|b_n|}{{\mu_n}^{\beta+\varepsilon}} \mu_n^{\beta+\varepsilon-\nu} \\ &\leqq z^{\beta+\varepsilon-\nu} \sum_{\mu_n > z} \frac{|b_n|}{{\mu_n}^{\beta+\varepsilon}} \\ &= O(z^{\beta+\varepsilon-\nu}).\end{aligned}$$

$u > 0$ より $(\delta/2) + (1/4A) < \beta + \varepsilon$ で十分大きい ρ で $(\delta/2) + (1/4A) + (\rho/2A) > \beta$ であるから,

$$(5.9) = O(y^{\rho} x^{(\delta/2)-(1/4A)} z^{u}) + O(x^{(\delta/2)-(1/4A)+\rho(1-1/2A)} z^{u-(\rho/2A)}).$$

この 2 つの誤差項の指数の最大値を最小にする z は x の指数と y の指数がそれぞれ同じになるように定めればよい. 簡単な計算で

$$z = x^{2A-1} y^{-2A}$$

とすればよいことが分かる. 代入して計算すると

$$\begin{aligned}(5.9) &= O(x^{(\delta/2)-(1/4A)+\rho(1-(1/2A))+(2A-1)(u-\rho/2A)} y^{(-2A)(u-\rho/2A)}) \\ &= O(x^{(\delta/2)-(1/4A)+(2A-1)u} y^{\rho-2Au}).\end{aligned}$$

□

これで (4.9) 式の両辺の ρ 回差分が得られた. あとは評価が最も良くなるように y を定めることによって, 主定理の証明とする.

定理 1.10 の証明. 命題 5.4, 5.5, 5.8 より次が成立する.

$$\begin{aligned}&A_0(x) - Q_0(x) \\ &= O(y^{-2Au} x^{(\delta/2)-(1/4A)+(2A-1)u}) + O(y x^{q-1} (\log x)^{r-1}) + O\left(\sum_{x < n \leqq x + \rho y} |a_n|\right).\end{aligned}$$

左辺の誤差項の指数の最大値を最小になるような y を $y = O(x)$ に注意して計算すると, 任意の $\eta \geqq 0$ にたいして $y = x^{1-(1/2A)-\eta}$ が得られる. したがって,

$$\begin{aligned}&A_0(x) - Q_0(x) \\ &= O(x^{(\delta/2)-(1/4A)+2A\eta u}) + O(x^{q-(1/2A)-\eta} (\log x)^{r-1}) + O\left(\sum_{x < n \leqq x + \rho y} |a_n|\right)\end{aligned}$$

となり, 主定理の証明が完了した. □

最後に, $a_n \geqq 0$ のとき定理の誤差項の第 3 項目が消えることを示す.

定理 5.10. $a_n \geqq 0$ のとき, (1.13) は次のようになる.

$$A_0(x) - Q_0(x) = O(x^{(\delta/2)-(1/4A)+2A\eta u}) + O(x^{q-(1/2A)-\eta}(\log x)^{r-1}).$$

証明の前に次の補題を示す.

補題 5.11. $a_n \geqq 0$ のとき, 次が成立する.

$$y^\rho A_0(x) \leqq \Delta_y^\rho A_\rho(x) \leqq y^\rho A_0(x+\rho y).$$

証明. 差分の定義式 (5.3) より次が成立する.

$$\Delta_y^\rho A_\rho(x) = \int_x^{x+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \cdots \int_{t_{\rho-1}}^{t_{\rho-1}+y} A_0(\rho)(t_\rho)\, dt_\rho.$$

$a_n \geqq 0$ より $A_\rho(x)$ は単調増加だから, 積分の上端と下端で評価すればよい. 実際,

$$\begin{aligned}
\Delta_y^\rho A_\rho(x) &= \int_x^{x+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \cdots \int_{t_{\rho-1}}^{t_{\rho-1}+y} A_0(\rho)(t_\rho)\, dt_\rho \\
&\geqq \int_x^{x+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \cdots \int_{t_{\rho-1}}^{t_{\rho-1}+y} A_0(\rho)(t_{\rho-1})\, dt_\rho \\
&= y\int_x^{x+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \cdots \int_{t_{\rho-2}}^{t_{\rho-2}+y} A_0(\rho)(t_{\rho-1})\, dt_\rho \\
&= \cdots \\
&= y^\rho A_\rho(x)
\end{aligned}$$

となり, 逆も同様である. □

定理 5.10 の証明. 補題 5.11 より次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&A_0(x) - Q_0(x) \\
\leqq\ & y^{-\rho}\Delta_y^\rho A_\rho(x) - Q_0(x) \\
=\ & y^{-\rho}\Delta_y^\rho\Big[A_\rho(x) - Q_\rho(x)\Big] + y^{-\rho}\Delta_y^\rho Q_\rho(x) - Q_0(x) \\
=\ & y^{-\rho}O(x^{(\delta/2)-(1/4A)+(2A-1)u}y^{\rho-2Au}) \\
&\qquad + y^{-\rho}(y^\rho Q_0(x) + O(y^{\rho+1}x^{q-1}(\log x)^{r-1})) - Q_0(x) \\
=\ & O(y^{-2Au}x^{(\delta/2)-(1/4A)+(2A-1)u}) + O(yx^{q-1}(\log x)^{r-1}) \\
=\ & O(x^{(\delta/2)-(1/4A)+2A\eta u}) + O(x^{q-(1/2A)-\eta}(\log x)^{r-1}).
\end{aligned}$$

ただし, 3 つ目の等号では命題 5.4, 5.5 を用いた.
一方, $Q_0(x) = O(x^q(\log x)^{r-1})$ と $y = O(x)$ より次が成立する.

$$\begin{aligned}
Q_0(x+\rho y) - Q_0(x) &= O(yx^{q-1}(\log x)^{r-1}) \\
&= O(x^{q-(1/2A)-\eta}(\log x)^{r-1}).
\end{aligned}$$

したがって, 次が成立する.

$$
\begin{aligned}
& A_0(x+\rho y)-Q_0(x+\rho y) \\
\geqq\ & y^{-\rho}\Delta_y^{\rho}A_{\rho}(x)-Q_0(x)+Q_0(x+\rho y)-Q_0(x) \\
=\ & O(x^{(\delta/2)-(1/4A)+2A\eta u})+O(x^{q-(1/2A)-\eta}(\log x)^{r-1}).
\end{aligned}
$$

$A_0(x)-Q_0(x)$ と $A_0(x+\rho y)-Q_0(x+\rho y)$ の評価は同じだから

$$A_0(x)-Q_0(x)=O(x^{(\delta/2)-(1/4A)+2A\eta u})+O(x^{q-(1/2A)-\eta}(\log x)^{r-1})$$

となる. □

6　数値計算の結果

最後に例 2.3 の結果を用いて, x が大きい値のとき, $\sum_{n\leq x} d(n)$ の主要項がどの程度近似しているかを述べる.

$\sum_{n\leq x} d(n)$ と主要項の差を x^θ で割ったものを $f_\theta(x)$ を定義する. すなわち,

$$f_\theta(x) := \frac{1}{x^\theta}\left|\sum_{n\leq x} d(n) - x\log x - (2\gamma - 1)x\right|$$

と定義する. このとき Maple13 により次のような結果が得られた.

x	$f_{0.30}(x)$	$f_{0.35}(x)$	$f_{0.40}(x)$
1.0×10^3	0.8577551	0.6072440	0.4298959
1.0×10^4	1.279769	0.807481	0.509486
1.0×10^5	0.45288	0.25468	0.14321
1.0×10^6	1.4598	0.7317	0.36671
1.0×10^7	0.748	0.3342	0.1493
2.0×10^7	1.012	0.4365	0.1883
3.0×10^7	0.005	0.002	0.0012
4.0×10^7	0.777	0.324	0.1351
5.0×10^7	1.395	0.575	0.2370
6.0×10^7	0.204	0.083	0.0341
7.0×10^7	0.483	0.196	0.0793
8.0×10^7	0.930	0.375	0.151
9.0×10^7	0.451	0.180	0.072

例 2.3 より $\theta > 1/3$ のときは $f_\theta(x) \to 0, x \to \infty$ が保証されていることになるが, この程度の x では $\theta = 0.35$ や $\theta = 0.40$ のとき 0 に収束している様子は見て取れない. しかしながら, これ以上 x を大きくして数値計算を行うと Maple13 は止まってしまうので, 数値計算によって最良の θ を推定するのは難しいと思われる.

次にこの結果を用いて $d(n)$ の x までの和は $x\log x + (2\gamma - 1)x$ でどの程度近似されているのかを検証する. $d(n)$ の x までの和と $x\log x + (2\gamma - 1)x$ の差は $x^\theta f_\theta(x)$ で表される. この上記の数値計算の結果より

$$(10^5)^{0.4} f_{0.4}(10^5) = 14.321\cdots.$$
$$(10^6)^{0.4} f_{0.4}(10^6) = 92.113\cdots.$$
$$(10^7)^{0.4} f_{0.4}(10^7) = 94.201\cdots.$$
$$(9\times 10^7)^{0.4} f_{0.4}(9\times 10^7) = 109.403\cdots.$$

これより $\sum_{n\leq x} d(n)$ は $x = 10^5, 10^6, 10^7$ および 9×10^7 のとき, $x\log x + (2\gamma - 1)x$ とそれぞれ 5 桁中上から 3 桁, 6 桁中上から 3 桁, 7 桁中上から 4 桁, 8 桁中上から 5 桁一致していることがわかる.

参考文献

[1] K. Chandrasekharan , Narasimhan. Raghavan : Functional equations with multiple gamma factors and the average order of arithmetical functions. Ann. of Math.(2) 76 (1962) 93-136.

[2] E. Landau : Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen. Vorgelegt von Herrn D. Hilbert in der Sitzung vom 18. Mai 1912.

[3] E. Landau : Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen. Vorgelegt in der Sitzung vom 17. Juli 1915.

[4] K. Chandrasekharan : Introduction to analytic number theory. Springer-Verlag., Berlin, 1968.

[5] Huxley, M. N. Integer points, exponential sums and the Riemann zeta function. Number theory for the millennium, II (Urbana, IL, 2000), 275-290, A K Peters, Natick, MA, 2002.

[6] G. H. Hardy : The average order of the arithmetical functions $P(x)$ and $\Delta(x)$, Proc. London Math. Soc.(2), 15 (1916) 192-213.

[7] G. N. Watson : A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd Ed.,Cambridge, 1948.

[8] K. Chandrasekharan , S. Minakshisundaram : Typical Means. London, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, Oxford University Press, 1952.

[9] T. Miyake : Modular Forms. Kinokuniya Co Ltd., Tokyo, 1976.

[10] Ahlfors, Lars V. Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, 1978.