Parshinによる高次元局所類体論の構成について

M2　渡邉　崇

1月31日

目次

1　序文

1.1　概略

本修士論文は A.N.Parshin([P1]) による高次元局所類体論の主定理の証明の紹介と、その論文の中で示されていない高次元局所類体論の諸定理を I.B.Fesenko([F2]) の方法で示した、標数 $p\ (>0)$ の高次元局所類体論の証明である．主にこの論文通じて示したいことは次の主定理と類体論の諸定理である．

定理 1.1 (高次元局所類体論の主定理)**.** F を標数 $p\ (>0)$ が n 次元局所体．$K_n^{top}(F)$ を位相的 n 次 Milnor K-group とするとき

$$\psi_F : K_n^{top}(F) \to Gal(F^{ab}/F)$$

単射連続な準同型 ψ_F でその image が dense となるものが存在する．

本論文では、まず §2 で高次元局所体の性質、§3 で K 群の性質を述べた後に、§4 で主定理の証明方法の方針を示す．そして主定理の証明に決定的な役割を果たす Kummer pairing（§5) と Artin-Schreier-Witt pairing(§7) の非退化性を示し、最後に §8 主定理の証明と、他の重要な存在定理などを述べる．

1.2　歴史

高次元局所類体論について、類体論の歴史について概観しながら見ていくことにする．

Hilbert・高木貞治、最終的に 1925 年の E.Artin による相互写像の写像の証明により、まず代数体の類体論 (大域類体論) が完成した．その後解析を使わない類体論の算術的な証明の研究が進み、Chevalley により イデールが導入され算術的類体論の証明が完成した．その当時局所類体論は大域類体論の系として得られていたが、大域類体論とは独立して局所類体論を証明する動きが起こり、中山正・Hochschild・Tate らによる有限群の Galois Cohomology の研究により Cohomology を用いて局所類体論が証明された。またその結果を利用して局所類体論を証明してから、大域類体論を証明する方法も見出された．その後 Cohomology を使わない局所類体論の証明方法の研究がなされ、M.Hazewinkle([H1],[I1]) の方法．Neukirch([NE1]) の方法．Lubin-Tate([LT1]) による formal group を用いる証明方法. と現在様々な局所類体論の証明方法が知られている．(大域類体論と局所類体論全般については例えば [KKS1]、また歴史については [A.M1] を参

照されたい.)

高次元局所体は伊原康隆による 1968 年京大数理解析研究所講究録の 「ある p 進完備な関数体についての問題」([IH1]) の中に最初に現れたといわれている. 彼の仕事に刺激を受けた加藤和也によって 1978 年ごろに高次元局所類体論が完成された.([K1, K2, K3]) 高次元局所類体論の要点は、主定理が表しているように最大 Abel 拡大の Galois 群が Milnor K-group で近似されることである. 一方 A.N.Parshin は $\mathbb{Z}$ 上有限型既約スキームの研究 ([P2]) をしているなかで、高次元局所体が現れることを見出し、加藤和也とは独立してほぼ同時期に高次元局所類体論を完成させたといわれている. Parshin による類体論の証明方法 ([P1]) は、河田・佐竹による標数 p (> 0) の局所類体論の証明方法 ([KS1]) を応用したものである. この論文で述べることであるが、Parshin による証明は主定理の証明において表面上は Cohomology を使用しない類体論の証明方法である. 加藤と Parshin の証明の大きな違いを述べると、Parshin の方法は K 群から最大 Galois 群の p-part への写像の構成が、加藤の証明方法のように de Rham-Witt Complex を用いたりせず、Artin-Schreier-Witt pairing を用いて、比較的容易にできる点である. その後も高次元局所類体論について研究がなされ、Neukirch の方法を応用した I.B.Fesenko([F1, F2] による方法、modified hypercohomology を用いた小屋 ([Ko1]) による方法が知られている. (高次元局所体・高次元局所類体論全般については [F1] や [FK1] を参照のこと.)

局所類体論の証明方法またはそのアイディアを応用して、Parshin や Fesenko など高次元局所類体論がいくつか証明されており、局所類体論の方法で高次元局所類体論が証明できるのではと期待されるのだが、Lubin-Tate による方法などの応用は、今のところ良い結果が知られておらず ([V.Z1]) 同様にして証明できるか否か不明である.

一方で局所体に対して大域体と上位の概念があるように、高次元局所体に対して高次元大域体というものがあり、加藤和也・斎藤秀司によって高次元大域類体論が完成されている. 大域類体論と局所類体論の関係のようにして、高次元大域類体論を証明した後に、その系として高次元局所類体論を得るということも考えられるが、高次元局所類体論の結果を用いずに、高次元大域類体論を証明する方法はまだ知られておらず、大域類体論の時のように、高次元大域類体論を最初に証明してから、高次元局所類体論を証明できるかどうかも現在わかっていない. (高次元局所類体論と高次元大域類体論全般については [RA],[IS1],[KA1],[KA2] を参照.)

今のところ素体 (有理数体 $\mathbb{Q}$ および有限体) に関係する体において、扱いやすい形で Abel 拡大における Galois 群を近似する方法・すなわち類体論がいくつか知られているわけだが、素体によらない体で、類体論が構成され得るのか? また 1 世紀以上過ぎても依然として Hilbert23 の問題の未解決問題として残っている類体の構成問題は、類体論が証明

されているすべての体上で解決できる問題なのか? など代数体の類体論が完成して、一世紀弱が経過しているが、類体論について考えるべき問題が依然として多く残されている.

1.3 記号

ここでは本論文で主に用いる記号についてまとめておく. (記号の詳細は各初出セクションを参照のこと)

一般的な記号

$\mathbb{F}_n$ を位数 n の有限体と定義する.
$\mathbb{Z}$ を有理整数環と定義する.
$\mathbb{Q}$ を有理数体と定義する.
$\mathbb{N}$ を自然数全体と定義する.
$\mathbb{Q}_p$ を p 進数体と定義する.
ζ_n を 1 の原始 n 乗根と定義する.

F を体とする時

$F^{\times}$ を F の乗法群と定義する.
F^{ab} を F の最大 Abel 拡大と定義する.
F^{sep} を F の最大分離拡大と定義する.
$F^{ab}_{(p)}$ を F の最大指数 p 冪 Abel 拡大と定義する.
$F^{ab}_{p^m}$ を F の最大 p^m 次 Abel 拡大と定義する.
$F^{ab}_{(no\ p)}$ を F 上拡大次数が p と互いに素な有限次 Abel 拡大全ての合成体と定義する.
$K^M_n(F)$ を F の n 次 Milnor K-group と定義する.
$K^{top}_n(F)$ を F の n 次位相的 Milnor K-group と定義する.
G_F を F の絶対 Galois 群と定義する.
G^{ab}_F を F の最大 Abel 拡大の Galois 群と定義する.
$F((t))$ を F 係数一変数ローラン級数体と定義する.

F を n 次元高次元局所体とする時

$t_1, \cdots, t_n$ を F の局所パラメータ系と定義する.
v を F の rank n の付値と定義する.
$\mathcal{O}_F$ を F の v に関する付値環と定義する.

$\mathcal{M}_F$ を F の v に関する極大イデアルと定義する.
$\mathcal{U}_F$ を F の v に関する単数群と定義する.
$\mathcal{V}_F$ を F の v の主単数群と定義する.
v_F を F の valuation map と定義する.
t_F を F の tame symbol と定義する.

<u>Witt ring 関係. A を標数 p の可換環とする時</u>

$W_m[A]$ を A の長さ m の Witt ring と定義する.
$a^{(i)}$ を a を $W_m[A]$ の元とする時、a の i-th ghost componet と定義する.
V を Witt ring の shift map と定義する.
A を Witt ring の back map と定義する.
$[p]$ を Witt ring の Frobenius 写像と定義する.
$\mathcal{P}$ を Witt ring の Artin-Schreier 写像と定義する.

A を可換群とし、その群法則を加法的に書くとする. このとき $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$A \longrightarrow A \qquad x \longmapsto nx$$

の cokernel を A/n と定義する.

謝辞

最後に本修士論文を書き終えるまでの修士２年間ご指導して頂いた雪江明彦先生、高次元類体論についてご指導して頂いた山　隆雄先生、同じセミナーの仲間であった酒井祐貴子、曽根浩圭、樋口勇気、福井邦彦、八木勇磨に深く感謝します.

2　高次元局所体

2.1　諸定義

このセクションでは、全体を通して用いる高次元局所体に関係する定義や命題について述べる．またこのセクションでは各定理、命題などには証明を与えないので詳細は [P1, §1], [FK1, Part 　, Section1],[MZ1] 参照のこと．

定義 2.1 (高次元局所体)**.** 高次元局所体は n (≥ 1) について帰納的に

$$F \text{ が } n \text{ 次元局所体}. \overset{def}{\Longleftrightarrow} F \text{ は完備離散付値体かつその剰余体が } (n-1) \text{ 次元局所体}.$$

と定義する．また 0 次元局所体を有限体と定義する．上の定義から、通常局所体と呼ばれているものは、1 次元局所体であることがわかる．

F が n 次元局所体のとき F を $F^{(n)}$．$F^{(n)}$ の剰余体を $F^{(n-1)}$．$F^{(n-1)}$ の剰余体を $F^{(n-2)}$. $\cdots$. と今後書くことがあるので注意．高次元局所体の構造はその標数によって具体的に構造が知られている．

定理 2.2 (Classification Theorem)**.** n 次元局所体 F はその標数の値により以下のいずれかと同型である．

(1) $\quad F \cong \mathbb{F}_q((X_1))\cdots((X_n)) \qquad (\mathrm{char}(F) = p\ (>0)).$

(2) $\quad F \cong K((X_1))\cdots((X_{n-1})) \quad (\mathrm{char}(F^{(i)}) = 0\ \ (1 \leq i \leq n)).$

(3) $\quad F \cong K((X_1))\cdots((X_{i-1}))\{\{X_{i+1}\}\}\cdots\{\{X_n\}\}.$

$$\mathrm{char}(F^{(l)}) = 0\ \ (i \leq l \leq n) \text{ かつ } \mathrm{char}(F^{(l)}) = p\ \ (1 \leq l \leq i-1).$$

ここで $\mathbb{F}_q$ は標数 p (>0) ($q = p^m$ ($m \in \mathbb{N}$)) の有限体．K は標数 0 の局所体、すなわち $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体である．さらに $\{\{\ \}\}$ は次のようなことを意味している．F を離散付値 v_F で完備な離散付値体．その剰余体を $\bar{F}$ とするとき K を

$$K = F\{\{T\}\} = \{\sum_{-\infty}^{\infty} a_i T^i \mid a_i \in F,\ \inf v_F(a_i) > -\infty,\ \lim_{i \to -\infty} v_F(a_i) = +\infty\}$$

と定義し、さらに K の付値 v_K を $v_K(\sum a_i T^i) := \min_i\{v_F(a_i)\}$ と定義する．このとき K は付値 v_K について完備離散付値体となっている．そしてその剰余体は $\bar{K} = \bar{F}((t))$ となる．ただし t は T の $\bar{K}$ における剰余類である．

例えばこの定理より 2 次元局所体は p を素数とする時、$\mathbb{F}_p((T_1))((T_2)), \mathbb{Q}_p((T)), \mathbb{Q}_p\{\{T\}\}$ の有限次拡大体である．

今回扱う Parshin による高次元局所類体論の証明では、F の標数 $p\ (>0)$ の高次元局所体の場合のみを扱う．Classification Theorem により標数 $p\ (>0)$ の時、高次元局所体は $F \cong \mathbb{F}_q((X_1))\cdots((X_n))$ となるので、特に断りがない限り今後 n 次元局所体 F、もしくは単に n 次元局所体といった場合は、

$$F \cong \mathbb{F}_q((X_1))\cdots((X_n)) \ \ (\mathrm{char}(F) = p\ (>0),\ \ F^{(0)} = \mathbb{F}_q,\ q = p^m\ (m \in \mathbb{N}))$$

を意味しているものとする．

それでは高次元局所体において、離散付値体における素元に相当する重要な概念を定義しよう．

定義 2.3 (局所パラメータ系)**.** $F = F^{(n)}$ から素元を一つ選びそれを t_n とする．$F^{(n)}$ の単数のなかから、$F^{(n-1)}$ で素元となるものを一つ選びそれを t_{n-1} とする．$\cdots$. $F^{(n)}$ の単数のなかから、$F^{(n-1)}, \cdots, F^{(n-i+1)}$ で単数かつ、$F^{(n-i)}$ で素元となるものを一つ選びそれを t_{n-i} とする．$i = 1$ から $n-1$ まで繰り返して得られる、 $t_n, \cdots, t_1$ を F の局所パラメータ系と呼ぶ．各 t_i を局所パラメータと呼ぶこともある．

もちろん各 t_i の選び方は任意であるから、高次元局所体 F について固有に定まるものではない．今後 $t_n, \cdots, t_1$ と書いた時は特に断りがない限り、F の局所パラメータ系を表しているものとする．この local parameter を用いれば、この論文で扱う n 次元局所体 F は

$$F \cong \mathbb{F}_q((t_1))\cdots((t_n)) \ \ (\mathrm{char}(F) = p\ (>0),\ \ F^{(0)} = \mathbb{F}_q,\ q = p^m\ (m \in \mathbb{N}))$$

である．つづいて高次元局所体 F の rank n の付値を定義する．

定義 2.4 (rank n の付値)**.** $\mathbb{Z}^n$ を辞書式順序が入った加法群としてみる．辞書式順序とは、$I, J \in \mathbb{Z}^n$ に対して

$$I = (i_1, i_2, \cdots, i_n) \le J = (j_1, j_2, \cdots, j_n) \Longleftrightarrow i_l \le j_l, i_{l+1} = j_{l+1}, \cdots, i_n = j_n\ (\exists l \le n)$$

という全順序である．このとき $v := (v_1, \cdots, v_n) : F^\times \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ という写像を導入する．ただし v_i は、完備離散付値体 $F^{(i)}$ の離散付値を $v_{F^{(i)}}$ と表すとき、任意の $\alpha \in F^\times$ に対して i について帰納的に $v_i(\alpha) = v_{F^{(i)}}(\alpha_i)$ と定義する．ここで α_i は $\alpha t_n^{-v_{(n)}(\alpha)} \cdots t_{i+1}^{-v_{(i+1)}(\alpha)}$ の $F^{(i)}$ における剰余類である．この v は実際付値となる．これを F の rank n の付値という．また単に F の付値と呼ぶこともある．その定義の仕方から分かるように v は F の

local parameter 系の取り方に依存する．しかし local parameter 系の取り方を変えても、このような手続きで定義される rank n の付値は互いに同値なものになることが知られている.([MZ1], [L1, §1] を参照)．たとえば各 local parameter t_i について rank n の付値 v を計算すると、$v(t_1) = (1, 0, \cdots, 0), v(t_2) = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, v(t_n) = (0, \cdots, 0, 1)$ となる.

n 次元局所体 F の rank n の付値 v に付随する次の概念を定義する.

定義 2.5 (付値環と極大イデアル)**.** F を n 次元局所体．v を F の rank n の付値とする．このとき以下のものを定義する.

$$\mathcal{O}_F := \{\alpha \in F \mid v(\alpha) \geq 0 = (0, \cdots, 0)\}.$$
$$\mathcal{M}_F := \{\alpha \in F \mid v(\alpha) > 0 = (0, \cdots, 0)\}.$$
$$\mathcal{U}_F := \{\alpha \in F \mid v(\alpha) = (0, \cdots, 0)\}.$$

$\mathcal{O}_F$ を v による付値環．$\mathcal{M}_F$ を v による極大イデアル．$\mathcal{U}_F$ を v による単数群と呼ぶ．なお辞書式順序の入れ方から、$\mathcal{O}_F/\mathcal{M}_F \cong F^{(0)} = \mathbb{F}_q$ が成り立つことが分かる．また $\mathcal{V}_F := 1 + \mathcal{M}_F$ を主単数群と呼ぶ．またこれらは local parameter 系の取り方によらず定まる.

続いて高次元局所体の拡大における分岐などについて述べることにしよう．その前に F を n 次元局所体とするとき、F の有限次拡大体 L も n 次元局所体となることを注意しておく.

定義 2.6. F を n 次元局所体．v を F の rank n の付値．$t_n, \cdots, t_1$ を F の local parameter 系とする．また L を F の有限次拡大とし、v' を L の rank n の付値とする．v' を F に制限した $v'|_F$ も F の rank n の付値となる．このとき任意の α $(\in F)$ に対して

$$v'|_F(\alpha) = v(\alpha)M(L/F)$$

を満たす $n \times n$ 行列 $M(L/F)$ が存在する．具体的には $M(L/F)$ を表すと、

$$M(L/F) = \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & e_2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & e_n \end{pmatrix}$$

である．ここで各 e_i $(1 \leq i \leq n)$ は $v'|_F(t_i) = (0, \cdots, 0, e_i, 0, \cdots, 0)$ である．F, L の local parameter の取り方によってそれぞれの rank n の付値の取り方が変わり、それに

伴い行列 $M(L/F)$ も一意的に定まるわけではないが、対角成分である各 e_i の値は local parameter の取り方によらず一意的に定まることが知られている．そこで

$$e := e(L/F) := \prod_{i=1}^{n} e_i$$

と置き e を拡大 L/F の分岐指数と呼ぶ．各 e_i はその定義より離散付値体の拡大 $L^{(i)}/F^{(i)}$ の分岐指数と一致していることを注意しておく．離散付値体の理論より

$$[L : F] = e(L/F)f(L/F)$$

が成り立つ．ここで $f(L/F)$ は $L^{(0)}/F^{(0)}$ の拡大次数である．有限次拡大 L/F について $e(L/F) = 1$ となるとき、すなわち $f(L/K) = [L : F]$ が成り立つとき L/F を purely unramified と呼ぶ.

2.2 高次元局所体の位相

次は標数 p の n 次元局所体 F に入れる位相について述べることにしよう．

定義 2.7. F を位相体とする．このとき F 係数 1 変数ローラン級数体 $F((X))$ に次のように位相を入れる．十分大きな i について $U_i = F$ となる $U_i \subseteq U_{i+1}$ を満たす、各 U_i が F の部分群である F の 0 近傍列 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ に対して、$U_{\{U_i\}} := \{\sum a_i X^i \mid a_i \in U_i\}$ と置く．このとき、$U_{\{U_i\}}$ のうち $F((X))$ の部分群となっているものすべてを $F((X))$ の 0 基本近傍系とする位相を $F((X))$ に入れる．この位相で、「$F((X))$ の点列 $\{x_n = \sum_i a_i^{(n)} X^i\}$ が $x_n \to 0$ となる．$\Longleftrightarrow$ 任意の n についてある m が存在して $x_n \in X^m F[[X]]$ かつ任意の i について a_i が 0 に収束する」ということが成り立つ. この位相の入れ方で、n について帰納的に n 次元局所体 F に位相を入れるものとする．ただし $n = 0$ のとき、F が 0 次元局所体すなわち有限体の時は discrete 位相が入っているものとする．実際 $n = 1$ の時この位相で 1 次元局所体に局所コンパクトな位相が入ることがわかる．その概略を示そう．まず 0 次元局所体を K とし、上の注意の通り discrete 位相が入っているものとする．K の 0 近傍列として任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して $U_m = K$ となるものをとる．上のように $U_{\{U_i\}}$ で部分群となるものを考えると $U'_m = \{\sum_{m\le i} a_i X^i \mid a_i \in K,\ a_m \neq 0\}$ である．$K((X))$ を X について $v(X) = 1, v(a) = 0,\ \forall a \in K$ となる離散付値 v を持つ離散付値体と見た時、$\mathcal{P}_v := \{a \in K((X)) \mid v(a) > 0\}$ とおけば $U'_m = {\mathcal{P}_v}^m$ であり、$U'_m \subseteq U'_{m+1}$ が成り立つ．従って $K((X))$ には $\{{\mathcal{P}_v}^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を 0 の基本近傍系とする位相が入る．実際この位相で $F((X))$ は局所コンパクトになる．([I1, p.31, 定理 2] 参照)

つづいて上の位相の性質について述べることにしよう.

命題 2.8. F を n 次元局所体. F には定義 2.7 によって定義される位相が入っているものとする. このとき位相の入った F について次のことが成り立つ.

(1)　定義 2.6 によって定めた F の位相は local parameter のとり方によらない.

(2)　F の加法群はこの位相で Hausdorff な位相群でありかつ完備である.

(3)　F の点列が $x_n \to x, y_n \to y$ となるとき、$x_n y_n \to xy$ となる.

(4)　F の自己同型写像は同相写像である.

高次元局所体 F に入った位相により、任意の F の元について次のことが成り立つ.

系 2.9 (展開定理)**.** F を n 次元局所体. $t_n, \cdots, t_1$ を F の local parameter とする. このとき F の任意の元 x は次のような収束和の形で一意的に表せる.

$$x = \sum a_{i_n,\cdots,i_1} t_n^{i_n} \cdots t_1^{i_1} \qquad (a_{i_n,\cdots,i_1} \in \mathbb{F}_q)$$

続いて F の乗法群 $F^\times$ の構造とその位相について述べる. 最初に $F^\times$ の構造についてから始めよう. $F^\times$ は乗法性から次のように表すことができる.

$$F^\times = < t_1 > \times \cdots \times < t_n > \times \mathbb{F}_q^\times \times \mathcal{V}_F$$

ただし $t_1, \cdots, t_n$ は F の局所パラメータ系. $< t_i >$ は t_i 生成される巡回群である. $\mathcal{V}_F$ は F の主単数群である. 次に位相についてだが、各 $< t_i >$ と $\mathbb{F}_q$ にディスクリート位相を、$\mathcal{V}_F$ には F からの誘導位相を入れる. そしてそれらの直積位相を $F^\times$ の位相とする. そしてこの位相について次のことが成り立つ.

命題 2.10. F を n 次元局所体. $F^\times$ には上で定義した位相が入っているものとする. また L/F を F の有限次拡大とする. $L^\times$ にも上で定義した位相を入っているものとする. このとき $F^\times$ について次のことが成り立つ.

(1)　上で定めた $F^\times$ の位相は local parameter 取り方によらない.

(2)　F の自己同型写像は $F^\times$ の同相写像となる.

(3)　$F^\times$ の収束点列 $x_n \to x, y_n \to y$ に対して、$x_n y_n \to xy, x_n^{-1} \to x^{-1}$ となる.

(4)　任意の $\epsilon \in \mathcal{V}_F$ に対して ϵ^{p^n} という点列は 1 に収束する.

(5)　$F^\times$ は $L^\times$ の閉集合である.

(6)　$L^\times$ から誘導される $F^\times$ の位相は、上で定義した位相と一致する.

(7)　主単数群 $\mathcal{V}_F$ は $\gcd(k, p) = 1$ となる整数 k について k-divisable である.

3　Milnor K-group

このセクションでは全体を通じて用いる Milonr K-group の記号の定義・命題などについて述べる．省略してある証明などの部分についての詳細については [FV1, chapter9], [FK1, Part　, Section 6] を参照のこと．

3.1　Milnor K-group の定義

定義 3.1. F が体のとき、n 次 Milnor K-group は次のように定義される．

$$K_n^M(F) := \underbrace{F^\times \otimes \cdots \otimes F^\times}_{n} / J \qquad (n \geq 2)$$

ただし J は $J = < \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_j \otimes \cdots \mid \ x_i + x_j = 1 \quad (1 \leq i, j \leq n \ \ (i \neq j)) >$ である．ここで $< >$ は生成されるという意味で用いている．また $\cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_j \otimes \cdots$ の剰余類を $\{\cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots\}$ と表す．Milnor K-group の元を symbol と呼ぶことがある．なお $n = 0, 1$ の場合は $K_1^M(F) := F^\times$, $K_0^M(F) := \mathbb{Z}$ と定義する．$K_n^M(F)$ の具体的な計算規則は、

(1) $$\{\cdots, \alpha_i\beta_i, \cdots\} = \{\cdots, \alpha_i, \cdots\} + \{\cdots, \beta_i, \cdots\}.$$

(2) $$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} = 0 \qquad (\alpha_i + \alpha_j = 1 \ (i \neq j)).$$

である．$K_n^M(F)$ における演算は、上式の右辺のように加法的に表される．さらに

$$K_n^M(F) \times K_m^M(F) \longrightarrow K_{n+m}^M(F) \qquad (x, y) \longmapsto x \cdot y$$

という写像は準同型写像である．ただし $x = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, $y = \{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$, $x \cdot y = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_m\}$ である．また特に誤解の恐れがない場合、Milnor K-group を K-group , K 群と表現することがあるので注意．さらに $K_n^M(F)$ の M を省略して $K_n(F)$ と書くこともあるので同様に注意されたい．

Milnor K-group の演算について次のことが成り立つ.

補題 3.2. F を体とする. $K_n^M(F)$ $(n \geq 2)$ の演算において次のことが成り立つ.

(1) $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} = 0 \qquad (\alpha_i + \alpha_j = 0\ (1 \leq i, j \leq n)\ (i \neq j))$.

(2) $\{\cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots\} = -\{\cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i, \cdots\}$.

(3) $\{\cdots, x, \cdots, 1, \cdots\} = \{\cdots, 1, \cdots, x, \cdots\} = 0$.

(4) $\{\cdots, x, \cdots, y^{-1}, \cdots\} = \{\cdots, x^{-1}, \cdots, y, \cdots\} = -\{\cdots, x, \cdots, y, \cdots\}$.

(5) $2\{\cdots, x, \cdots, x, \cdots\} = 0$.

(6) $\{\cdots, x, \cdots, x, \cdots\} = \{\cdots, -1, \cdots, x, \cdots\} = \{\cdots, x, \cdots, -1, \cdots\}$.

証明. 証明に入る前に、Milnor K-group の演算規則から $n = 2$ の場合について示せばよいことを注意しておく.
(1) についてまず示す. $\alpha_j = -\alpha_i = (1 - {\alpha_i}^{-1})^{-1}(1 - \alpha_i)$ が成り立つので、左辺を計算すると

$$\begin{aligned}\{\alpha_i, \alpha_j\} &= \{\alpha_i, (1 - {\alpha_i}^{-1})^{-1}(1 - \alpha_i)\} \\ &= \{\alpha_i, (1 - {\alpha_i}^{-1})^{-1}\} + \{\alpha_i, (1 - \alpha_i)\} = \{{\alpha_i}^{-1}, (1 - {\alpha_i}^{-1})\} = 0.\end{aligned}$$

が成り立つ.
(2) の場合は (1) の結果を使うと

$$\{\alpha_i\alpha_j, -\alpha_i\alpha_j\} = \{\alpha_i, \alpha_j\} + \{\alpha_j, \alpha_i\} + (\{\alpha_i, -\alpha_j\} + \{\alpha_j, -\alpha_i\}) = 0$$

が成り立つので、

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = -\{\alpha_j, \alpha_i\}$$

となる.
同様に (3),(4),(5),(6) も計算すればすぐにわかるので省略する. □

次の命題は高次元局所体の Milnor K-group を計算する際使うことになる.

命題 3.3. F を有限体とするとき、$K_n^M(F) = 0$ $(n \geq 2)$ が成り立つ.

証明. Milnor K-group の演算規則から、$n = 2$ の場合に成り立つことを示せば十分である. つまり任意の $\alpha, \beta \in F$ に対して、$\{\alpha, \beta\} = 0$ が成り立つことを示せばよい. F は有限体なのでその乗法群 $F^\times$ は巡回群である. $F^\times$ の generator を θ とすれば、$\alpha = \theta^i, \beta = \theta^j$ $(i, j \in \mathbb{N})$ と表せるので、$\{\alpha, \beta\} = \{\theta^i, \theta^j\} = ij\{\theta, \theta\}$ が成り立つ. また

補題 3.2 (5) により $2\{\theta,\theta\}=0$ が成り立つ．従って $\{\theta,\theta\}$ が奇数位数を持つことを示せればよい．

F の標数が 2 のとき、F の位数を 2^m とすれば $(2^m-1)\{\theta,\theta\}=\{1,\theta\}=0$ が成り立つ．したがって $\{\theta,\theta\}=0$ ゆえに $\{\alpha,\beta\}=0$ が成り立つ．

また F の標数が奇素数 p のとき、F の位数を p^m とすれば $F^\times$ の中にちょうど $(p^m-1)/2$ 個づつ平方数と非平方数が存在する．$F^\times \longrightarrow F^\times$ $\alpha \longmapsto 1-\alpha$ という写像はすべての非平方数を平方数からなる部分集合へ移さない．なぜなら 1 はこの写像の像に入らないからである．それゆえある非平方数でこの写像で非平方数へうつるものが存在する．したがってある奇数 k,l が存在して、$\theta^k=1-\theta^l$ となるものを得られるから、

$$0=\{\theta^k,1-\theta^k\}=\{\theta^k,\theta^l\}=kl\{\theta,\theta\}$$

が成り立つ．これより $\{\theta,\theta\}=0$ が成り立つので、この場合も $\{\alpha,\beta\}=0$ が成り立つ． $\square$

3.2 border map

つづいて離散付値体の Milnor K-group とその剰余体の Milnor K-group とを結びつける写像について述べることにしよう．以下 F を離散付値 v をもつ離散付値体とし、O_v で F の付値環、U_v で F の単数群、$\bar{F}$ で F の剰余体を表すものとする．$\alpha\ (\in O_v)$ に対して、$\bar{\alpha}$ で α の $\bar{F}$ における剰余類を表す．また π を離散付値 v に関する F の素元とする．このとき、任意の F の元 $\alpha_i\ (i\in\mathbb{N})$ は、$v(\alpha_i)=a_i$ のとき $\alpha_i=\pi^{a_i}\epsilon_i\ (\epsilon_i\in U_v)$ と表せる．$k_1,\cdots,k_m\ (1\le k_1<\cdots<k_m\le n\ (m\le n))$ に対して、

$$\partial^{k_1,\cdots k_m}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=a_{k_1}\cdots a_{k_m}x\cdot y$$

という写像を定義する．ここで x は $m\neq n$ のときは $\{\bar{\epsilon}_1,\cdots,\bar{\epsilon}_n\}$ という symbol から k_1 番目、k_2 番目、・・・、k_m 番目の成分を除いた $K^M_{n-m}(\bar{F})$ の元．$m=n$ のときは $x=1$ である．また $m>1$ のとき $y=\{-1,\cdots,-1\}\in K^M_{m-1}(\bar{F})$ であり、$m=1$ のときは $y=1$ である．例えば $m=n$ のとき $\partial^{k_1,\cdots k_m}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\partial^{1,\cdots n}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\{-1,\cdots,-1\}\in K^M_{n-1}(\bar{F})$ であり、$m=1$ のとき $k_1=i$ ならば $\partial^i(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ は $\{\bar{\epsilon}_1,\cdots,\bar{\epsilon}_i,\cdots,\bar{\epsilon}_n\}$ から i 番目の成分を除いたものである．また $n=1$ の時、$\partial^1(\alpha):=a\ (\alpha=\pi^a\epsilon,\ \epsilon\in U_v)$ と定義する．すなわちこのときは F の離散付値である．それでは $\partial^{k_1,\cdots k_m}$ を用いて border map を定義することにしよう．

定義 3.4. F を離散付値 v をもつ離散付値体とするとき、次のように定義される写像を border map という.

$$\partial : K_n(F) \longrightarrow K_{n-1}(\bar{F}) \qquad \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \longmapsto \partial(\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}).$$

具体的には

$$\partial(\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}) = \sum_{\substack{1 \le k_1 \le \cdots \le k_m \le n \\ 1 \le m \le n}} (-1)^{n-k_1-\cdots,-k_m} \partial^{k_1,\ldots k_m}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

で与えられる. また border map は

$$\partial(\{\cdots, \alpha_i\beta_i, \cdots\}) = \partial(\{\cdots, \alpha_i, \cdots\}) + \partial(\{\cdots, \beta_i, \cdots\}).$$
$$\partial(\{\cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots\}) = -\partial(\{\cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i, \cdots\}).$$

が成り立つので、K 群の準同型写像でもある. また定義からこの写像が全射であることもわかる. なお $n = 1$ は border map は F の離散付値 v に一致する. 例えば具体的に少し計算してみると、$n > 1$ に対して

$$\partial(\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}) = 0 \qquad (\epsilon_i \in U_v \ (1 \le i \le n)).$$
$$\partial(\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n-1}, \pi\}) = \{\bar{\epsilon}_1, \cdots, \bar{\epsilon}_{n-1}\}.$$

が成り立つ. 特に $n = 2$ の時は $\partial(\alpha_1, \alpha_2) = (-1)^{a_1 a_2}\overline{\alpha_1^{a_2}\alpha_2^{a_1}} \ \in K_1(\bar{F})$ である. さらにこの border map が F の素元の取り方によらないことを注意しておく. なぜならば F の素元として π_1 を新たに取ると、$\pi_1 = \pi\epsilon$ $(\epsilon \in U_v)$ と表すことができるので、上の具体的計算より

$$\partial(\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n-1}, \pi_1\}) = \partial(\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n-1}, \pi\}) + \partial(\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n-1}, \epsilon\}).$$
$$= \partial(\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n-1}, \pi\}).$$

すなわち

$$\partial(\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n-1}, \pi_1\}) = \partial(\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n-1}, \pi\})$$

が成り立つ. ところで $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ $(\in K_n(F))$ は Milnor K-group の線形性と各成分を入れ替えるなどして $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} = \sum\{u_1, \cdots, u_{n-1}, \pi\}$ $(u_i \in U_v \ (1 \le i \le n-1))$ と表せるので、上式の関係性から素元の取り方によらず $\partial(\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\})$ の値は一意に定まる. また border map の kernel は $U_1K_n(F) + U_n(F)$ であることが知られている. ただし $U_1K_n(F) := \{\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \in K_n(F) \mid \alpha_1 \in 1 + \pi O_v, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in F^\times\}$, $U_n(F) := \{\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \in K_n(F) \mid \alpha_i \in U_v \ (1 \le i \le n)\}$ である. なお border map ∂

はその定義から分かるように離散付値 v に依存しているので、そのことを強調するために ∂_v と表すことがある.

今後用いる border map に関係する補題や命題をいくつか述べる.

補題 3.5. F を離散付値 v をもつ離散付値体とする. また F の素元を一つ取りそれを π とおく. $\alpha \in F^\times$ の時

$$K_1(F) \longrightarrow K_0(F) \qquad \alpha \longmapsto \partial(\alpha) = v(\alpha)$$

が成り立ち. $\{\alpha, \beta\} \in K_2(F)$ の時

$$\partial(\{\alpha, \beta\}) \equiv (-1)^{v(\alpha)v(\beta)} \alpha^{v(\beta)} \beta^{-v(\alpha)} \qquad \mathrm{mod}\ \pi O_v$$

が成り立つ.

証明. 最初の主張は border map の定義より明らかである. $v(\alpha) = a, v(\beta) = b$ とする時、$\alpha = \pi^a \epsilon,\ \beta = \pi^b \eta\ \ (\epsilon, \eta \in U_v)$ と表せば、

$$\begin{aligned}\{\alpha, \beta\} &= \{\pi^a \epsilon, \pi^b \eta\}.\\ &= \{\pi^a, \pi^b\} + \{\epsilon, \pi^b\} + \{\pi^a, \eta\} + \{\epsilon, \eta\}.\\ &= \{\epsilon, \eta\} + \{\epsilon^b \eta^{-a} (-1)^{ab}, \pi\}.\end{aligned}$$

と計算されるので

$$\partial(\{\alpha, \beta\}) = (-1)^{ab} \bar{\epsilon}^b \bar{\eta}^{-a} \equiv (-1)^{ab} \alpha^b \beta^{-a} \qquad \mathrm{mod}\ \pi O_v$$

が成り立つ. □

命題 3.6. F を離散付値 v をもつ離散付値体とし、L を離散付値 w を持つ F の代数拡大体. w の F への制限は v と同値な付値であるとする. $j_{F/L}$ を

$$j_{F/L} : K_n(F) \longrightarrow K_n(L) \qquad \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \longmapsto \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\},\ (\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \in K_n(F))$$

という自然な埋め込みとし、$e := e(w|v)$ を L/F の分岐指数. また $j_{v/w} := j_{\bar{F}/\bar{L}}$ とするとき、次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} K_n(F) & \xrightarrow{j_{F/L}} & K_n(L) \\ {\scriptstyle\partial}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\ K_{n-1}(\bar{F}) & \xrightarrow{e j_{\bar{F}/\bar{L}}} & K_{n-1}(\bar{L}) \end{array}$$

さらに、L/F が Galois 拡大であるとき $\sigma(\in Gal(L/F))$ が $Gal(L/F)$ の分解群に含まれている時 (L/F の最大部分不分岐拡大の Galois 群に含まれている時) $Gal(L/F) \xrightarrow{\sim} Gal(\bar{L}/\bar{F})$ による σ の像を $\bar{\sigma}$ で表すとき、次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} K_n(L) & \xrightarrow{\sigma} & K_n(L) \\ \partial\big\downarrow & & \big\downarrow\partial \\ K_{n-1}(\bar{L}) & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & K_{n-1}(\bar{L}) \end{array}$$

証明. $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ $(\in K_n(F))$ は Milnor K-group の演算規則より、$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} = \sum\{u_1, \cdots, u_{n-1}, \pi\}$ $(u_i \in U_v\ (1 \leq i \leq n-1))$ と表せたので、$\{u_1, \cdots, u_{n-1}, \pi\}$ について図式が成り立つことをみればよい. 初めに上の図式について見てみる. π' を L の素元とすれば、

$$\partial(\{u_1, \cdots, u_{n-1}, \pi\}) = \{\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_{n-1}\}$$

が成り立ち、また

$$\begin{aligned} \partial(j_{F/L}(\{u_1, \cdots, u_{n-1}, \pi\})) &= \partial(\{u_1, \cdots, u_{n-1}, {\pi'}^e\}) \\ &= e\{\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_{n-1}\} \end{aligned}$$

が成り立つので、上の図式は可換であることが分かる. また下の図式も同様に計算すれば確かめられる. □

つづいて K 群の Norm 写像を定義するのに不可欠な定理を述べることにしよう. F を体. E を F を係数体とする一変数関数体 $E = F(X)$ とする. v を F 上自明な E の離散付値とすれば、このような離散付値と F 上 monic 既約多項式と $1/X$ は一対一に対応していることは知られている. $1/X$ に対応している E の離散付値 v_∞ は $v_\infty(f(X)/g(X)) := \deg g(X) - \deg f(X)$, $(f(X), g(X) \in F[X])$ であった. このとき次の定理が成り立つ.

定理 3.7 (Bass-Tate)**.** F, E, v など記号は上記の通りとする. このとき次の列

$$0 \longrightarrow K_n(F) \xrightarrow{j_{F/L}} K_n(F(X)) \xrightarrow{\oplus\partial_v} \bigoplus_{v \neq v_\infty} K_{n-1}(\bar{E}_v) \longrightarrow 0$$

は完全列かつ split である. ただし右の v は E の $v \neq v_\infty$ である離散付値すべてを走るものとし、$\bar{E}_v$ は E の離散付値 v で E を離散付値体と見た時の剰余体を表すものとする.

この定理の証明は省略する.([FV1, p,290, Theorem] 参照)

3.3 Norm 写像 その１

E を F 係数一変数関数体 $E = F(X)$. v を F 上自明となる $(v(a) = 0\ \forall a \in F)$ 非自明な E の離散付値とし、その離散付値 v による E の剰余体 $\bar{E}_v$ をここでは $\bar{E}_v = F(v)$ と表すことにする．また $1/X$ に対応する E の離散付値を前同様に v_∞ と表す．v に対応する F 上 monic 既約多項式を $p_v(X)$ と表せば、$[F(v) : F] = \deg\, p_v(X)$ が成り立つ．また $F(v_\infty) = F$ である．$n\ \geq 1$ に対して $j_{F/E} : K_n(F) \longrightarrow K_n(E)$ と $j_{F/F(v)} : K_n(F) \longrightarrow K_n(F(v))$ は、$x \in K_n(F)$ に対して $x \cdot y := j_{F/E}(x) \cdot y\ \ (y \in K_n(E))$, $x \cdot z := j_{F/F(v)}(x) \cdot z\ \ (z \in K_n(F(v)))$ と定義することにより、$K_n(E),\ K_n(F(v))$ はそれぞれ $K_n(F)$-module と見ることができる．またこれにより border map $\partial : K_n(E) \longrightarrow K_n(F(v))$ は $K_n(F)$-module の準同型となる．次の $K_n(F)$-module の列を考える：

$$0 \longrightarrow K_n(F) \xrightarrow{j_{F/E}} K_n(E) \xrightarrow{\oplus\partial_v} \bigoplus_v K_{n-1}(F(v)) \longrightarrow 0$$

ここで v は E の離散付値で F 上自明なものすべてを走るとする．この列は定理 3.7 より完全列ではない．しかし定理 3.7 および $\partial_{v_\infty} \circ j_{F/E}(K_n(F)) = 0$ が成り立つので、$K_n(F)$ と $K_n(E)$ においては完全である．

$K_n(F)$ 準同型

$$N := \oplus N_v : \bigoplus_v K_n(F(v)) \longrightarrow K_{n-1}(F) \qquad \oplus_v\ (\alpha_v) \longmapsto \sum_v N_v(\alpha_v)$$

を導入する．ここで $\alpha_v \in K_n(F(v))$ であり、また N_{v_∞} は $K_n(F(v_\infty)) = K_n(F)$ の恒等写像と定義する．また $N_v\ (v \neq v_\infty)$ はどのような写像かというと

$$0 \longrightarrow K_n(F) \xrightarrow{j_{F/E}} K_n(E) \xrightarrow{\oplus\partial_v} \bigoplus_v K_{n-1}(F(v)) \xrightarrow{\oplus N_v} K_{n-1}(F) \longrightarrow 0$$

が $K_n(F)$-module の完全列となるよう定義をする．v はすべての E の F 上自明な離散付値を走るものとする．まず上の列で $K_{n-1}(F)$ の完全性は N_{v_∞} が恒等写像からわかる．以前の議論から $K_n(F)$ および $K_n(E)$ における完全性はわかっているので、N_v は $\bigoplus_v K_{n-1}(F(v))$ において完全となるように定めればよい．つまり

$$K_n(E)/j_{F/E}(K_n(F) \xrightarrow{\oplus_{v\neq v_\infty}\partial_v} \bigoplus_{v\neq v_\infty} K_{n-1}(F(v)) \xrightarrow{\oplus_{v\neq v_\infty}N_v} K_{n-1}(F)$$

という合成写像が、

$$-\partial_{v_\infty} : K_n(E)/j_{F/E}(K_n(F)) \longrightarrow K_{n-1}(F)$$

と一致するように取ればよい．実際 $v \neq v_\infty$ に対してこのように N_v を取ることができ、かつ一意的に定まる ([B1] 参照)．また $N_v : K_n(F(v)) \longrightarrow K_n(F)$ は $K_n(F)$-module の準同型写像である．すなわち

$$N_v(j_{F/F(v)}(x) \cdot y) = x \cdot N_v(y) \quad (x \in K_n(F),\ y \in K_m(F(v))$$

が成り立つ．それでは Norm map に関係する命題について述べることにしよう．

命題 3.8. F を v を離散付値にもつ離散付値体．$F(v), N_v$ など記号は上と同じ物とする．このとき

(1) $N_v \circ j_{F/F(v)} : K_n(F) \longrightarrow K_n(F)$ は $\deg p_v(X) = [F(v) : F]$ 倍写像に一致する．

(2) $N_v : K_1(F(v)) \longrightarrow K_n(F)$ は体の Norm 写像 $N_{F(v)/F} : F(v)^\times \longrightarrow F^\times$ に一致する．

証明. $n = 1$ の時すなわち $K_1(F) = F^\times$ について示す．また $v \neq v_\infty$ の場合を示せばよい．なお一般の n $(\in \mathbb{N})$ の場合については [B1], [FV1, p,294] 参照．$f(X) \in F(X)$ に対して

$$\sum_{v \neq v_\infty} \deg\, p_v(X) v(f(X)) + v_\infty(f(X)) = 0$$

が成り立つ．ただし $p_v(X)$ は E の離散付値 v に対応する monic 既約多項式である．v に関する border map $\partial_v : F(X)^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$ と離散付値 v は一致するので、上式を書き直して

$$\sum_{v \neq v_\infty} \deg\, p_v(X) \partial_v(f(X)) + \partial_{v_\infty}(f(X)) = 0$$

が成り立つ．Norm 写像の定義より $-\partial_{v_\infty} = \oplus_{v \neq v_\infty} \partial_v \circ \oplus_{v \neq v_\infty} N_v$ となるので上式より

$$\sum_{v \neq v_\infty} \deg\, p_v(X) \partial_v(f(X)) = \oplus_{v \neq v_\infty} \partial_v \circ N_v(f(X))$$

となる．したがって $f(X) = j_{F/E}(x) \ \ (x \in F^\times)$ の時 $j_{F/E}(x) = j_{F/F(v)}(x)$ となるから

$$\sum_{v \neq v_\infty} \deg\, p_v(X) \partial_v \circ j_{F/F(v)}(x) = \oplus_{v \neq v_\infty} \partial_v \circ N_v \circ j_{F/F(v)}(x)$$

となり、$j_{F/F(v)}(x) = x \ (\in K_1(F(v)) = F(v)^\times)$ と表せ、さらに $n = 1$ のとき $\oplus_{v \neq v_\infty} = \sum_{v \neq v_\infty}$ なので

$$\sum_{v \neq v_\infty} \partial_v(x^{\deg\ p_v(X)}) = \sum_{v \neq v_\infty} \partial_v(N_v \circ j_{F/E}(x))$$

が成り立つ．よって各 v で考えれば、

$$x^{\deg\ p_v(X)} = N_v \circ j_{F/F(v)}(x)$$

が成り立つので、

$$N_v \circ j_{F/F(v)} = \deg\ p_v(X)$$

となる．なお (2) については省略する．([FV1, p,294] 参照) □

3.4 Norm 写像 その２

F を体．L/F を F 上有限次拡大とし、$L = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$ ただし各 α_i は F 上代数的な数であるとする．このとき $F_0 := F,\ F_i := F_{i-1}(\alpha_i)$ とおく．v_i を α_i に対応する $F_{i-1}(X)$ の離散付値とするとき、(つまり α_i を根にもつ monic 既約多項式に対応する離散付値) Norm 写像から $N_{v_i} : K_n(F_i) \longrightarrow K_n(F_{i-1})$ という準同型が存在する．この N_{v_i} を N_{α_i} と表せば、

$$N_{\alpha_1,\dots,\alpha_l} := N_{\alpha_1} \circ \cdots \circ N_{\alpha_l} : K_n(L) \longrightarrow K_n(F)$$

を得る．もし $N_{\alpha_1,\dots,\alpha_l}$ が $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ の取り方や順序によらなければ、$N_{L/F} := N_{\alpha_1,\dots,\alpha_l}$ と定義して、$N_{L/F} : K_n(L) \longrightarrow K_n(F)$ と体の拡大について K 群の Norm 写像を得ることができる．実際にこのことが成り立つことが知られている．([B1] 参照)．よって今までのことから、

$$\text{(A)} \qquad N_{L/F}(j_{F/L}(x) \cdot y) = x \cdot N_{L/F}(y) \qquad (x \in K_n(F),\ y \in K_m(L))$$

が成り立つ．また $N_{L/F} \circ j_{F/L} : K_n(F) \longrightarrow K_n(F)$ は $[L : F]$ 倍写像に一致し、加えて $K_0(L)$ においては $N_{L/F}$ は $[L : F]$ 倍写像となり、$K_1(L)$ においては $N_{L/F}$ は体の Norm 写像 $N_{L/F} : L^\times \longrightarrow F^\times$ に一致する．以上のことなどまとめると K 群の Norm map について次のことが成り立つことが知られている．

定理 3.9 (Bass-Tate-Kato)**.** L/F を体 F 上の有限次拡大. このとき $K_n(F)$-module の準同型である Norm 写像 $N_{L/F} : K_n(L) \longrightarrow K_n(F)$ が存在し、以下の性質を満たす.

(1) $N_{L/F}$ は $N_{\alpha_1,\dots,\alpha_l}$ に一致する. ($\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_l \in L$ $s.t$ $L = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$)
(2) L/F のすべての部分拡大 M/F について $N_{L/F} = N_{M/F} \circ N_{L/M}$ が成り立つ.
(3) $N_{L/F}$ は $K_0(L)$ に対しては $[L : F]$ 倍写像に一致する.
(4) $K_1(L)$ に対しては体の Norm 写像 $N_{L/F} : L^\times \longrightarrow F^\times$ に一致する.
(5) $N_{L/F} \circ j_{F/L}$ は $[L : F]$ 倍写像に一致する.
(6) σ を L の F 上の自己同型とする. このとき $N_{L/F} \circ \sigma = N_{L/F}$ が成り立つ.

ただし (6) における σ の作用は $\sigma : K_n(L) \longrightarrow K_n(L)$ $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \longmapsto \{\sigma(\alpha_1), \cdots, \sigma(\alpha_n)\}$ である. (1) の性質は拡大 L/F に関して一意的に Norm が定まると言い換えることができる. さらに実際の Norm 写像の計算について重要なので (A) をより具体的に表すと、$\{x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n\} \in K_{m+n}(L)$ (ただし $\{x_1, \cdots, x_m\} \in K_m(F), \{y_1, \cdots, y_n\} \in K_n(L)$) に対して、

(7) $$N_{L/F}(\{x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n\}) = \{x_1, \cdots, x_m, N_{L/F}(\{y_1, \cdots, y_n\})\}$$

が成り立つ.

3.5 高次元局所体と K 群の関係

ここでは、高次元局所体 F と Milnor K-group との関係について述べることにしよう. 最初に乗法群 $F^\times$ に入っている位相から、F の m 次 Milnor K-group へ位相を導入する.

定義 3.10 (Milnor K-group の位相)**.** F を n 次元局所体とする. $F^\times$ には 2.2 節に定めた位相が入っているものとする. このとき $K_m^M(F)$ に以下の二つの条件をみたす最強の位相を入れる.

$$\underbrace{F^\times \times \cdots \times F^\times}_{n} \longrightarrow K_m^M(F) \qquad (a_1, \cdots, a_m) \longrightarrow \{a_1, \cdots, a_m\}$$

この写像が点列連続である. ただし左辺は直積位相が入っているものとする. さらに $x_n \to x$ かつ $y_n \to y$ $(x_n, y_n, x, y \in K_m^M(F))$ のとき

$$x_n + y_n \longrightarrow x + y, \qquad -x_n \longrightarrow -x$$

が成り立つ.

注意 3.11. さて実際このような位相が存在するか否かが問題となるがもちろんそのような位相は存在する．その概略を簡単に述べよう．まず上の条件を満たす $K_m^M(F)$ の位相からなる集合 M を考える．条件をみたす位相としてまず密着位相 (開集合が空集合と自分自身からなる位相) があるので、一応この集合は空集合ではないことを注意しておく．さて位相空間論から、空でない集合に定義される位相全体の集合は、位相の強弱によって順序が入り完備束（順序集合 S において、その任意の空でない部分集合が上限・下限を S のなかにもつもの) である事が知られているから、M の上限が存在することがわかる．そして実際この上限が条件をみたす最強の位相となる．上限となる位相が上の条件をみたすことの詳細は [BR], [P1, §2, Lemma2] 参照.

定義 3.12 (位相的 Milnor K-group)**.** F を n 次元局所体. $K_m^M(F)$ には上で定めた位相が入っているものとする．$\Lambda(F) := \bigcap \ \{ K_m^M(F)$ の 0 開近傍 $\}$ と定義する．位相の定義からこれは閉部分群をなすことは容易に分かる．この $\Lambda(F)$ を用いて位相的 Milnor K-group $K_m^{top}(F)$ を次のように定義する.

$$K_m^{top}(F) := K_m^M(F)/\Lambda(F)$$

ただし $K_m^{top}(F)$ には商位相が入っているものとする．注意として一般の n, m に対して $K_m^{top}(F)$ は位相群はならない．なお $K_m^{top}(F)$ の元 $\{\cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots\} \mod \Lambda(F)$ は特に誤解が生じない限り Milnor K-group の元と同様に、その代表元 $\{\cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots\}$ で表すものとする．例えば $n = 1$ の時は、F は局所体であり $F^\times$ には局所コンパクト位相が入っている．このとき $\Lambda(F) = \{1\}$ であるから、$K_1^{top}(F) = F^\times$ となる.

3.6 border map と高次元局所体に関係する写像

ここでは border map によって得られる写像について述べることにする．なお得られる写像は後に pairing を構成する上で重要な役割をする．初めに valuation map について述べることにしよう.

F を n 次元局所体、$t_1, \cdots, t_n$ は F の局所パラメータ系とする．このとき次のような写像を考える.

$$v_F : K_n(F) \xrightarrow{\partial} K_{n-1}(F^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} K_0(F^{(0)}) = \mathbb{Z}$$

ここで各 border map は離散付値体 $F^{(i)}$ についての border map について考えている．まず最初に border map ∂ は全射であったから、$v_F = \underbrace{\partial \circ \cdots \circ \partial}_{n}$ も全射である．つ

づいて v_F の kernel を考える．最初に $\partial : K_n(F) \longrightarrow K_{n-1}(F^{(n-1)})$ の kernel を求める．F を t_n についての離散付値体としてみれば、border map の議論から Ker $\partial = U_1K_n(F^{(n)}) + U_n(F^{(n)})$ である．ただし

$$U_1K_n(F^{(n)}) := \{\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \in K_n(F) \mid \alpha_1 \in 1 + O_{t_n}, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in F^\times\}.$$
$$U_n(F^{(n)}) := \{\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \in K_n(F) \mid \alpha_i \in U_{t_n}\ (1 \leq i \leq n)\}.$$

であり、ここで O_{t_n} は F を素元を t_n とする離散付値体とみなした時の付値環．U_{t_n} は F を素元を t_n とする離散付値体とみなした時の単数群である．同様な議論を $\partial : K_i(F^{(i)}) \longrightarrow K_{i-1}(F^{(i-1)})$ についておこなうことにより、$v_F(\{t_1, \cdots, t_n\}) = 1$ であり、$v_F = \underbrace{\partial \circ \cdots \circ \partial}_{n}$ の kernel は $\{t_1, \cdots, t_n\}$ から生成されていない元全体であることがわかる．また border map は係数体が離散付値体のとき素元の取り方によらなかったので、v_F は local parameter の取り方によらないことも分かる．以上のことをまとめると次の命題を得る．

命題 3.13 (valuation map)**.** F を n 次元局所体とする．このとき F の local parameter の取り方によらない全射準同型写像

$$v_F : K_n^M(F) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

で以下の性質を満たすものが存在する．この写像を F の valuation map と呼ぶ.

(1) $v_F(\{t_1, \cdots, t_n\}) = 1$.

(2) $\{t_1, \cdots, t_n\}$ によって生成されない任意の元 $\alpha \in K_n^M(F)$ について、$v_F(\alpha) = 0$.

つづいて、valuation map と同じように次の写像を考える.

$$t_F : K_{n+1}(F) \xrightarrow{\partial} K_n(F^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} K_1(F^{(0)}) = \mathbb{F}_q^\times$$

border map は全射なので t_F も全射である．valuation map の時のように border map の kernel を考えれば、任意の $\mathbb{F}_q^\times$ の元 θ に対して $t_F(\{\theta, t_1, \cdots, t_n\}) = \theta$ が成り立ち、$t_F(\{\theta, t_1, \cdots, t_n\}) = \theta$ の元から生成されない元 α $(\in K_{n+1}(F))$ に対して $t_F(\alpha) = 1$ が成り立つ．またこの写像も local parameter 取り方によらずに定まる．以上のことをまとめると、

命題 3.14 (tame symbol)**.** F を n 次元局所体とする．このとき F の local parameter の取り方によらない全射準同型写像

$$t_F : K_{n+1}^M(F) \longrightarrow \mathbb{F}_q^\times$$

で以下の性質を満たすものが存在する．この写像を F の tame symbol と呼ぶ.

(1) $t_F(\{\theta, t_1, \cdots, t_n\}) = \theta$ ただし $\theta \in \mathbb{F}_q^\times$である.

(2) $\{\theta, t_1, \cdots, t_n\}$ によって生成されない任意の元 $\alpha \in K_{n+1}^M(F)$ について $t_F(\alpha) = 1$ が成り立つ.

3.7 $K_n^{top}(F)$ の構造

ここでは具体的に高次元局所体 F における $K_n^{top}(F)$ の構造がどのようになっているのかを見ていく．そのために必要な補題からまず始めることにしよう.

補題 3.15. F を n 次元局所体とする. このとき任意の $\theta \in \mathbb{F}_q$ と主単数群の元 ϵ $(\in \mathcal{V}_F)$ に対して、

$$\{\theta, \epsilon\} = 0$$

が成り立つ.

証明. $\mathcal{V}_F$ は命題 2.10 (7) より $(q-1)$-divisable なので、任意の $\epsilon \in \mathcal{V}_F$ に対して、ある $\eta \in \mathcal{V}_F$ が存在して $\epsilon = \eta^{q-1}$ と表せ、

$$\{\theta, \epsilon\} = \{\theta, \eta^{q-1}\} = \{\theta^{q-1}, \eta\} = \{1, \eta\} = 0$$

が成り立つ. □

補題 3.16. F を n 次元局所体とする．このとき主単数群の元 ϵ, η $(\in \mathcal{V}_F)$ に対して、

$$\{\epsilon, \eta\} = \sum \{\epsilon, t_i\}$$

と local parameter からなる symbol の和として表される.

証明. $\eta = (\eta - 1)(1 - \eta^{-1})$ となるから、

$$\{\theta, \epsilon\} = \{\epsilon, \eta - 1\} + \{\epsilon, 1 - \eta^{-1}\}$$

が成り立つ．さらに具体的に $\eta = 1 + at_n^{i_n} \cdots t_1^{i_1}$, $(a \in \mathbb{F}_q)$ とおけば、補題 3.15 より

$$\{\epsilon, \eta - 1\} = \{\epsilon, at_n^{i_n} \cdots t_1^{i_1}\} = \{\epsilon, a\} + \sum \{\epsilon, t_i\} = \sum \{\epsilon, t_i\}$$

が成り立つ. また $\eta^{-1} = 1 + bt_n^{j_n} \cdots t_1^{j_1}$, $(b \in \mathbb{F}_q)$ とおけば、同様に計算して

$$\{\epsilon, 1-\eta^{-1}\} = \{\epsilon, -bt_n^{j_n} \cdots t_1^{j_1}\} = \{\epsilon, -b\} + \sum \{\epsilon, t_i\} = \sum \{\epsilon, t_i\}$$

となるから、

$$\{\epsilon, \eta\} = \sum \{\epsilon, t_i\}$$

が成り立つ. $\square$

準備が整ったので、それでは $K_n^{top}(F)$ の構造について調べていこう.

定理 3.17. F を n 次元局所体とし、$t_n, \cdots, t_1$ を F の local parameter とする. このとき $K_n^{top}(F)$ の元は次の元から生成される:

(1) $\{t_n, \cdots, t_1\}$.

(2) $\{\theta, t_n, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_1\} \quad \theta \in \mathbb{F}_q^\times$.

(3) $\{\epsilon, t_n, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_1\} \quad \epsilon \in \mathcal{V}_F \quad (1 \leq m \leq n)$.

ただし (1) は各成分に重複なく local parameter が入る symbol である.
また (2),(3) の ^ はそこの成分を除くという意味である.

証明. $F^\times$ の構造は、

$$F^\times = <t_1> \times \cdots \times <t_n> \times {\mathbb{F}_q}^\times \times \mathcal{V}_F$$

であるから、任意の $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ $(\in K_n^{top}(F))$ は K 群の演算規則と補題 3.2 (6) により、$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ は local parameter、有限体の乗法群 ${\mathbb{F}_q}^\times$、主単数群の成分からなる symbol の和として表され、その symbol は $F^\times$ の同じ元が重複して symbol の成分になることはない. さらに命題 3.3 からその symbol は、2 つ以上の成分に有限体の元が含まれないものであることが分かり、加えて補題 3.15 より有限体と主単数群の両方を成分に含む symbol はない. 最後に二つ以上の主単数群の元を成分として含む symbol は補題 3.16 より、一つまで減らすことができることがわかる. よって

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} = \sum \{t_n, \cdots, t_1\} + \sum \{\theta, t_n, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_1\} + \sum \{\epsilon, t_n, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_1\}$$

と表すことができる. $\square$

系 3.18. F を n 次元局所体. t_F を F の tame symbol とするとき

$$t_F : K_{n+1}^{top}(F) \simeq \mathbb{F}_q^\times$$

が成り立つ.

証明. $K_{n+1}^{top}(F)$ の任意の元について上と同じような議論をすれば、θ を有限体の乗法群 ${\mathbb{F}_q}^{\times}$ とする時 $\{\theta, t_n, \cdots, t_1\}$ という元で生成されていることが分かる．したがって $K_{n+1}^{top}(F)$ の位数は $q-1$. 一方で命題 3.14 より $t_F : K_{n+1}^{top}(F) \to \mathbb{F}_q^{\times}$ は全射準同型なので、両辺の位数を考えることにより t_F は同型であることがわかる． $\square$

$$\mathcal{V}K_n^{top}(F) := \{\{\epsilon, a_1, \cdots, a_{n-1}\} \in K_n^{top}(F) \mid \epsilon \in \mathcal{V}_F, \{a_1, \cdots, a_{n-1}\} \in K_{n-1}^{top}(F)\ \}$$

と定義すれば、定理 3.17, 系 3.18. さらに valuation map と tame symbol の性質から次のことが分かる．

系 3.19. F を n 次元局所体とする．このとき

$$K_n^{top}(F) \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{F}_q^{\times})^{\oplus n} \oplus \mathcal{V}K_n^{top}(F)$$

が成り立つ．

また具体的に $\mathcal{V}K_n^{top}(F)$ の構造は知られている．

命題 3.20. F を n 次元局所体とする．このとき $\mathcal{V}K_n^{top}(F)$ は次のような元から生成される．

$$\{1 + at_n^{i_n} \cdots t_1^{i_1}, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\} \ \ (a \in \mathbb{F}_q,\ \ i_j \in \mathbb{Z}\ \ (1 \leq j \leq n)).$$

ここで m は $p \nmid i_m$ かつ $p | i_k$ $(1 \leq k \leq m-1)$ を満たす自然数 $(1 \leq m \leq n)$ である．

証明は省略する．([FK1, Section7, Theorem1] 参照) この命題から次のことも知られる．

系 3.21. F を n 次元局所体とする．このとき $K_n^{top}(F)$ には p-torsion が存在しない．

これも [FK1, Section7, Corollary] 参照のこと

4 主定理証明の方法

このセクションでは主定理の構成方法についての概説を述べる．具体的な構成について述べる前に使う命題などを最初に述べることにする．

定理 4.1 (Pontrjagin 双対定理)**.** G を局所 compact Abel 群とする．このとき

$$f : G \xrightarrow{\sim} (G^\vee)^\vee \qquad a \longmapsto f(a) = f_a$$

は位相群として canonical な同型である．ここで $G^\vee$ は指標群を表すものとする．ただし f_a は任意の χ $(\in G^\vee)$ に対して、$f_a(\chi) := \chi(a)$ となるものである．

この定理の証明は省略する．

補題 4.2. G を局所 compact Abel group．$G^\vee$ を G の指標群とする．このとき $G^\vee$ の部分群 H について以下同値である．

(1)
$$H = G^\vee.$$

(2)
$$\bigcap_{\chi\ \in H} \ker\,\chi = \{1_G\}.$$

証明. (1) $\Rightarrow$ (2)
定義より、

$$a\ \in \bigcap_{\chi \in H} \ker\,\chi \Longleftrightarrow \text{ 任意の } \chi\ \in H \text{ について } \chi(a) = f_a(\chi) = 0.$$

ここの f_a は 定理 4.1 における Pontrjagin 双対を導く canonical map から得られるものである．もし $H = G^\vee$ ならば $f_a = 0$ となり $a = 1_G$ となることが分かる．

(2) $\Rightarrow$ (1)
対偶で考える．$H \neq G^\vee$ のとき $G^\vee/H \neq 0$. よって Pontrjagin 双対定理より零射でない連続準同型

$$\psi : G^\vee/H \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

が存在する．このとき次の合成写像 ϕ は

$$\phi : G^\vee \longrightarrow G^\vee/H \xrightarrow{\psi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$(G^\vee)^\vee$ の零でない元で $\phi(H) = 0$ を満たす．Pontrjagin 双対定理から、単位元と異なるある $a \in G$ が存在して $\phi = f_a$ と表せる．$f(H) = 0$ から $a \in \bigcap_{\chi\in H} \ker\chi$ が成り立つ．

$\square$

命題 4.3. A を Abel group. B を局所 compact Abel group とする．このとき

$$(\ , \ ) : A \times B \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

が非退化かつ双線形な pairing の時、この pairing から群同型

$$\psi : A \overset{\sim}{\longrightarrow} B^{\vee} \qquad a \longmapsto \psi(a) = (a, \ )$$

が成り立つ．ここで $\psi_F(a)$ は任意の $b\ (\in B)$ に対して $(\psi(a))(b) = (a, b)$ を満たすものである．

証明. ψ_F の群準同型性は明らかである．まず単射性からみる．$a\ (\in A)$ で $\psi(a) = 0$ をみたすものは、ψ の定義より $(\psi(a))(b) = (a, b) = 0 \ \ (\forall b\ (\in B))$ を満足する．pairing の非退化性より $a = 0$ であり、まず単射性が示された．

つついて全射性をみる．補題 4.2 より $\bigcap_{a\ \in A} \ker\, \psi(a) = 0$ が成り立てば、ψ_F は全射である．実際 $b\ (\in B)$ が $b \in \bigcap_{a\ \in A} \ker\, \psi_F(a)$ ならば、任意の $a\ (\in A)$ に対して、

$$(\psi_F(a))(b) = (a, b) = 0$$

が成り立つ．pairing の非退化性より $b = 0$ が分かる．ゆえに全射である． □

4.1 写像の構成方法

F を $n\ (\geq 1)$ 次元局所体．G_F を $G_F := Gal(F^{sep}/F)$ を F の絶対 Galois 群とする．$H^n(F, \_) := H^n(G_F, \_)$ と表す時、F の Galois Cohomology を考えることにより、$\mathrm{Hom}_{cont}(G_F^{ab}, \mathbb{Z}/m) \cong \mathrm{Hom}_{cont}(G_F, \mathbb{Z}/m) = H^1(F, \mathbb{Z}/m)$ が成り立つ．

ここで自然数 m について、つぎのような pairing $(\ , \ )_F$ を考える．

$$(\quad , \quad)_F : K_n^{top}(F)/m \times H^1(F, \mathbb{Z}/m) \to \mathbb{Z}/m$$

もしこの pairing が双線形かつ非退化ならば、$H^1(F, \mathbb{Z}/m)$ と G_F^{ab}/m は Pontrjagin dual ゆえ命題 4.3 より次の群同型写像を得る．

$$\psi_F^m : K_n^{top}(F)/m \simeq G_F^{ab}/m.$$

n 次元局所体 F について 5 節の議論より $m = q - 1$ の時、上のような Kummer pairing (定理 5.1) が存在し、定理 5.3 より

$$\psi_F^{q-1} : K_n^{top}(F)/(q-1) \simeq G_F^{ab}/q - 1 = Gal(F(\sqrt[q-1]{F^{\times}})/F)$$

が成り立つことが分かり、また m が $m = p^k$ のとき Artin-schreier-Witt pairing (定理 7.4) が存在し定理 7.6 より

$$\psi_F^{p^k} : K_n^{top}(F)/p^k \cong (G_F)^{ab}/p^k = Gal(F_{p^k}^{ab}/F)$$

が成り立つことがわかる．ここで $F_{p^k}^{ab}$ は F の最大 p^k 次 Abel 拡大体である．そこで G_F^{ab} の元の内、上の二つの写像で実際カバーしきれていない部分を把握し、そこへの map が構成できれば主定理 1.1 を得ることができる．まずカバーをしきれていない部分を知るために具体的に G_F^{ab} を見ていくことにしよう．

4.2 最大 Abel 拡大の Galois 群の構造

最初に記号を定義しよう．

$$F_{(no\ p)}^{ab} = \bigcup_{\substack{L/F \text{ は } l \text{ 次 } Abel \text{ 拡大.} \\ (l,p)=1}} L$$

を F 上 l 次 Abel 拡大全体の合成体 (ただし l は $(l,p) = 1$ をみたす自然数) とすれば、

$$Gal(F^{ab}/F) \cong Gal(F_{(p)}^{ab}/F) \oplus Gal(F_{(no\ p)}^{ab}/F)$$

である．ここで $F_{(p)}^{ab}$ はすべての m についての $F_{p^m}^{ab}$ の合成体である．$Gal(F_{(p)}^{ab}/F)$ は $m = p$ 冪時の Artin-schreier-Witt pairing の議論によりカバーされるので、カバーされない Galois 群の元は $Gal(F_{(no\ p)}^{ab}/F)$ の中にあることがわかる．それでは $Gal(F_{(no\ p)}^{ab}/F)$ の構造を見てみよう．$Gal(F_{(no\ p)}^{ab}/F)$ は F 上 l 次 Abel 拡大全体の合成体 ($(l,p) = 1$) であるから、F 上 l 次 Abel 拡大 ($(l,p) = 1$) を考えればよい．高次元局所体 F は素元として local parameter の t_n を持つ完備離散付値体としてみれば、F 上 l 次拡大体 L は完備付値体の理論から、$(l,p) = 1$ より、高々 tame(順分岐拡大) である．さらに完備付値体の理論から次のことが成り立つことが知られている．(以下の命題 4.4, 4.5, 4.6 は [FV1, Chapter .3] 参照)

命題 4.4 (完備離散付値体上の順分岐拡大)**.** F を完備離散付値体．L を F 上有限次拡大とする．この時、

$$L \text{ が } F \text{ 上順分岐分離拡大} \Longleftrightarrow L = T(\sqrt[t]{a}) \qquad (a \in F, \quad (t,p) = 1).$$

が成り立つ．ただし T は L/F における最大部分不分岐拡大である．

したがってこの命題を用いれば、

$$F^{ab}_{(no\ p)} = (\bigcup_{\substack{L=F(\sqrt[t]{a}).\\(t,p)=1.}} L) \cup (\bigcup_{\substack{T/F\ \text{は}\ n\ \text{次不分岐}\ Abel\ \text{拡大}.\\(n,p)=1.}} T)$$

であることがわかる. さらに完備離散付値体の理論から次のことも知られている.

命題 4.5 (完備離散付値体上の不分岐拡大)**.** F を完備離散付値体. L を F 上有限次拡大. $\bar{F}$ で F の剰余体を表すものとする. この時、

$$L\ \text{が}\ F\ \text{上不分岐分離拡大} \iff L = F(a)\ \text{ただし}\ a\ \text{は}\ f(x)\ \text{の根}$$

が成り立つ. ただし $f(x)$ は F 上 monic な既約多項式で、かつ $f(x)$ を $\bar{F}$ 係数で考えた時 $\bar{F}$ 上分離多項式となるものである.

従ってこの命題からさらに、

$$F^{ab}_{(no\ p)} = F(\sqrt[q-1]{t_n}) \cup (\bigcup_{\substack{T/F\ \text{は}\ n\ \text{次不分岐}\ Abel\ \text{拡大}.\\(n,p)=1}} T)$$

であることもわかる. さらに不分岐拡大について次のことが知られている.

命題 4.6 (完備離散付値体の不分岐拡大における Galois 群)**.** F を完備離散付値体. L を F 上有限次 Galois 拡大とし、$\bar{F}, \bar{L}$ でそれぞれ F および L の剰余体を表すものとする. この時

$$Gal(L/F) \cong Gal(\bar{L}/\bar{F})$$

が成り立つ.

よって $F^{ab}_{(no\ p)}/F$ の Galois 群は

$$Gal(F^{ab}_{(no\ p)}/F) \cong Gal(F(\sqrt[q-1]{t_n})/F) \oplus Gal((F^{(n-1)}_{(no\ p)})^{ab}/F^{(n-1)})$$

となることがわかる. 次に $Gal((F^{(n-1)}_{(no\ p)})^{ab}/F^{(n-1)})$ を求めることになるが $F^{(n-1)}$ も標数 $p\ (>0)$ の $\bar{t}_{n-1}$ (ただし $\bar{t}_{n-1}$ は t_{n-1} の $F^{(n-1)}$ における剰余類である.) についての完備離散付値体なので、同様の議論を繰り返すことができて、

$$Gal((F^{(n-1)}_{(no\ p)})^{ab}/F^{(n-1)}) \cong Gal(F(\sqrt[q-1]{t_n})/F) \oplus Gal(F(\sqrt[q-1]{t_{n-1}})/F) \oplus Gal((F^{(n-2)}_{(no\ p)})^{ab}/F^{(n-2)})$$

となる. よって $Gal(F^{ab}_{(no\ p)}/F)$ は n について帰納的に

$$Gal(F^{ab}_{(no\ p)}/F) \cong Gal(F(\sqrt[q-1]{t_n}, \sqrt[q-1]{t_{n-1}}, \cdots, \sqrt[q-1]{t_1})/F) \oplus Gal((F^{(0)}_{(no\ p)})^{ab}/F^{(0)})$$

とわかり $F^{(0)}=\mathbb{F}_q$ であるから、

$Gal(F^{ab}/F)\cong Gal(F^{ab}_{(p)}/F)\oplus Gal(F(\sqrt[q-1]{t_n},\sqrt[q-1]{t_{n-1}},\cdots,\sqrt[q-1]{t_1})/F)\oplus Gal((\mathbb{F}_{q_{(no\ p)}})^{ab}/\mathbb{F}_q)$

とわかる．$F^\times$ の主単数群は $(q-1)$-divisable なので $Gal(F(\sqrt[q-1]{t_n},\sqrt[q-1]{t_{n-1}},\cdots,\sqrt[q-1]{t_1})/F)=Gal(F(\sqrt[q-1]{F^\times})/F)$ が成り立つ．最終的に最大 Abel 拡大の Galois 群を共通部分を許すわかりやすい形で書き直せば、

$$Gal(F^{ab}/F)\cong Gal(F^{ab}_{(p)}/F)\cdot Gal(F(\sqrt[q-1]{F^\times})/F)\cdot Gal((F^{(0)})^{ab}F/F)$$

となる．なお・はこれら Galois 群で生成されるという意味である．従って補うべき Galois 群の部分群は $Gal((F^{(0)})^{ab}F/F)$ と同型であることがわかり、$K_n^{top}(F)$ から $Gal((F^{(0)})^{ab}F/F)$ へと map を構成できれば、よいことがわかる．

4.3 残りの部分について

それではあと $K_n^{top}(F)$ から $Gal(\mathbb{F}_q^{ab}F/F)$ への map を構成してやればよい．

$$Gal((F^{(0)})^{ab}F/F)=Gal(\mathbb{F}_q^{ab}F/F)\cong Gal(\mathbb{F}_q^{ab}/\mathbb{F}_q)\cong\hat{\mathbb{Z}}$$

が成り立つので $Gal(\mathbb{F}_q^{ab}F/F)$ の generator を Fr(Frobenius 写像) と表したとき、命題 3.13 の valuation map v_F を用いて、

$$\psi_F^v: K_n^{top}(F)\longrightarrow Gal(\mathbb{F}_q^{ab}F/F)\qquad \{a_1,\cdots,a_n\}\longmapsto (Fr)^{v_F(\{a_1,\cdots,a_n\})}$$

と定義する．これで $K_n^{top}(F)$ から $Gal(F^{ab}/F)$ への写像が構成できた．あとは各 Galois 群それぞれの共通部分である

$$Gal(F(\sqrt[q-1]{F^\times})/F)\cap Gal(\mathbb{F}_q^{ab}F/F)=Gal(F(\sqrt[q-1]{\theta})/F)$$

(ただし θ は $\mathbb{F}_q^\times$ の generator) および、

$$Gal(F^{ab}_{(p)}/F)\cap Gal(\mathbb{F}_q^{ab}F/F)=Gal(\mathbb{F}_{q(p)}^{ab}F/F)$$

において、写像が well-defined であることつまりこの共通部分において別個に定義された, 写像が compatible であることを確認する必要がある．このことについては後に示す．まずは先に述べた pairing について述べることにする．

5 Kummer Pairing について

まず $m = q-1$ の時の pairing を考えよう．早速次のような pairing を考える．

$$(\ , \ )_F : K_n^{top}(F) \times F^\times \xrightarrow{\phi_F} K_{n+1}^{top}(F)/q-1 \xrightarrow{t_F} \mathbb{F}_q^\times \cong \mathbb{Z}/q-1.$$

ただし F は高次元局所体．ϕ_F は $\{a_1, \cdots, a_n\} \in K_n^{top}(F)$ と $x \in F^\times$ に対して

$$\phi_F(\{a_1, \cdots, a_n\}, x) = \{a_1, \cdots, a_n, x\} \mod (q-1)K_n^{top}(F)$$

という写像．また t_F は命題 3.14 の tame symbol である．このとき次の定理が成り立つ．

定理 5.1 (Kummer pairing)**.**

$$(\ , \ )_F : K_n^{top}(F)/q-1 \times F^\times/q-1 \longrightarrow \mathbb{Z}/q-1$$

は双線形かつ非退化な pairing である．

証明. 最初に双線形性が成り立つことをみる．t_F は Milnor K-group の準同型写像であったから、ϕ_F が双線形写像であることを示せばよい．$\{a_1b_1, a_2, \cdots, a_n\} \in K_n^{top}(F)$ と $x \in F^\times$ に対して、

$$\begin{aligned}
\phi_F(\{a_1b_1, a_2, \cdots, a_n\}, x) &= \{a_1b_1, a_2, \cdots, a_n, x\} \quad \mod (q-1)K_n^{top}(F), \\
&= \{a_1, a_2, \cdots, a_n, x\} + \{b_1, a_2, \cdots, a_n, x\} \quad \mod (q-1)K_n^{top}(F), \\
&= \phi_F(\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}, x) + \phi_F(\{b_1, a_2, \cdots, a_n\}, x),
\end{aligned}$$

が成り立ち、また $\{a_1, \cdots, a_n\} \in K_n^{top}(F)$ と $x, y \in F^\times$ に対して、

$$\begin{aligned}
\phi_F(\{a_1, \cdots, a_n\}, xy) &= \{a_1, \cdots, a_n, xy\} \qquad \mod (q-1)K_n^{top}(F), \\
&= \{a_1, \cdots, a_n, x\} + \{a_1, \cdots, a_n, y\} \qquad \mod (q-1)K_n^{top}(F), \\
&= \phi_F(\{a_1, \cdots, a_n\}, x) + \phi_F(\{a_1, \cdots, a_n\}, y),
\end{aligned}$$

が成り立つので双線形であることが分かった．

つづいて非退化性についてみることにしよう．まず非退化性を調べる前に $\alpha \in K_n^{top}(F)$ は定理 3.17, 命題 3.20 により

(1) $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$.

(2) $\{\theta, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\} \ \ \theta \in \mathbb{F}_q^\times \ \ (1 \le m \le n)$.

(3) $\{1 + a t_n^{i_n} \cdots t_1^{i_1}, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\} \ \ (a \in \mathbb{F}_q, \ \ i_j \in \mathbb{Z} \ \ (1 \le j \le n))$.

から生成されていて、一方 $F^\times$ は local parameter $t_1, \cdots, t_n$ と $\theta \in \mathbb{F}_q$ および主単数 $1 + \theta t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}$ $(\theta \in \mathbb{F}_q^\times \ i_j \in \mathbb{Z}\ (1 \le j \le n))$ から生成されていることを思い出そう．従って非退化性は各生成元について調べればよい．ではまず最初に $K_n^{top}(F)/q-1$ 側の非退化性を調べることにしよう．任意の $\beta \in F^\times$ に対して $(\alpha, \beta)_F = 1$ を満たす $\alpha \in K_n^{top}(F)$ は

Case1. α が (1) の元で生成されているとき

$$\alpha = s\{t_1, t_2, \cdots, t_n\} \ \ (s \in \mathbb{Z})$$

と表せる．このとき

$$(\alpha, \beta)_F = st_F(\{t_1, t_2, \cdots, t_n, \beta\}) = 1 \ \ (\forall \beta \in F^\times)$$

となる s を求めたいのだが、$K_{n+1}^{top}(F)$ は tame symbol より

$$t_F : K_{n+1}^{top}(F) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_q^\times \qquad \{\theta, t_1, \cdots, t_n\} \longmapsto \theta \ \ (\theta \in \mathbb{F}_q^\times)$$

が成り立つので、β について場合分けをして考える．$\beta = t_i \ \ (1 \le i \le n)$ と local parameter のいづれかと一致するとき、

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta)_F &= st_F(\{t_1, t_2, \cdots, t_n, t_i\}),\\ &= (-1)^n st_F(\{-1, t_1, \cdots, t_n\}),\\ &= (-1)^{(-1)^n s} = 1,\end{aligned}$$

となるためには s が偶数になることが必要である．$\beta = \theta \ (\in \mathbb{F}_q^\times)$ となる時、

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta)_F &= st_F(\{t_1, t_2, \cdots, t_n, \theta\}),\\ &= (-1)^n st_F(\theta, \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}),\\ &= \theta^{(-1)^n s} = 1,\end{aligned}$$

となるためには $q-1|s$ となることが必要である．最後に $\beta = 1 + \theta t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}$ $(\theta \in \mathbb{F}_q \ i_j \in \mathbb{Z}\ (1 \le j \le n))$ と β が主単数群の元のとき、主単数群は $(q-1)$-divisable なの

で $\beta = \beta'^{q-1}$ と表すことができて、このとき s の値に関係なく常に $(\alpha, \beta)_F = 1$ が成り立つ.

Case2. α が (2) の元で生成されているとき

$$\alpha = s\{\theta, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\} \quad (s \in \mathbb{Z})$$

と表せる. このとき任意の β に対して

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta)_F &= st_F(\{\theta, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n, \beta\}) \\ &= t_F(\{\theta^s, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n, \beta\}) \\ &= \theta^s = 1\end{aligned}$$

が成り立つためには $q-1|s$ が成り立つことが必要である.

Case3. α が (3) の元で生成されているとき θ $(\in \mathbb{F}_q^\times)$ は $(q-1)$-divisable なので、$(\ ,\ )_F$ の線形性から任意の $\beta \in F^\times$ に対して $(\alpha, \beta)_F = 1$ が成り立つ. 以上 **Case1**, **Case2**, **Case3** により $q-1|s$ すなわち α は $q-1$ 倍元であることが必要であることが分かる. 逆に α が $q-1$ 倍元であれば線形性より、任意の $\beta \in F^\times$ に対して $(\alpha, \beta)_F = 1$ が成り立つので十分でもある. 以上から $K_n^{top}(F)/q-1$ の非退化性がいえた.

つづいて $F^\times/q-1$ 側の非退化性について調べることにしよう. 任意の $\alpha \in K_n^{top}(F)$ に対して $(\alpha, \beta)_F = 1$ を満たす $\beta \in F^\times$ は、

Case1. β が local parameter の元で生成されているとき、

$$\beta = t_i^s \quad s \in \mathbb{Z},\ (1 \leq i \leq n)$$

と表される. このとき $K_n^{top}(F)/q-1$ 側の非退化性の **Case1** の時と同様に α の値について場合分けして考える. $\alpha \in K_n^{top}(F)$ が (1) の元の時、

すなわち $\alpha = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ のとき

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta)_F &= t_F(\{t_1, t_2, \cdots, t_n, t_i^s\} \\ &= st_F(\{t_1, t_2, \cdots, t_n, t_i\} \\ &= s(-1)^n t_F(\{-1, t_1, \cdots, t_n\}) \\ &= (-1)^{s(-1)^n} = 1\end{aligned}$$

となるためには s が偶数になる必要がある. $\alpha \in K_n^{top}(F)$ が (2) の元の時、

すなわち $\alpha = \{\theta, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\}$ $(\forall \theta \in \mathbb{F}_q \ \ (1 \leq m \leq n))$ のときは

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta)_F &= t_F(\{\theta, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n, t_i^s\}) \\ &= t_F(\{\theta^s, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n, t_i\}) = 1\end{aligned}$$

となるためには $q-1|s$ となることが必要である．最後に $\alpha\in K_n^{top}(F)$ が (3) の元の時、すなわち $\alpha=\{1+at_n^{i_n}\cdots t_1^{i_1},t_1,\cdots,\hat{t}_m,\cdots,t_n\}$ $(a\in\mathbb{F}_q,\ \ i_j\in\mathbb{Z}\ \ (1\leq j\leq n))$ の時、主単数群は $(q-1)$-divisable であるので $\epsilon=1+at_n^{i_n}\cdots t_1^{i_1}$ はある主単数群の元 ϵ' を用いて、$\epsilon={\epsilon'}^{q-1}$ と表すことができる．ゆえにこのときは $(\ ,\ )_F$ の線形性から $(\alpha,\beta)_F=0$ が成り立つ．

Case2. β が $\theta\in\mathbb{F}_q$ から生成されている時

$$\beta=\theta^s\ \ (\forall\theta\in\mathbb{F}_q)$$

と表せる．このとき任意の $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\ \in K_n^{top}(F)$ に対して、

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta)_F&=t_F(\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\theta^s\})\\&=s(-1)^n t_F(\{\theta,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\})\\&=\theta^{(-1)^n s}=1\end{aligned}$$

が成り立つためには、$q-1|s$ となることが必要.

Case3. β が主単数 $1+\theta t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n}$ $(\theta\in\mathbb{F}_q\ i_j\in\mathbb{Z}\ (1\leq j\leq n))$ から生成されているとき $K_n^{top}(F)/q-1$ 側の非退化性の **Case3** のときと同様に $\theta\ \in\mathbb{F}_q$ は $(q-1)$-divisable なので、任意の $\alpha\in K_n^{top}(F)$ に対して $(\alpha,\beta)_F=1$ が成り立つ．以上 **Case1**, **Case2**, **Case3** により $q-1|s$ すなわち β は $q-1$ 倍元であることが必要であることが分かる．逆に β が $q-1$ 倍元のとき $(\ ,\ )_F$ の線形性から、任意の $\alpha\in K_n^{top}(F)$ に対して $(\alpha,\beta)_F=1$ が成り立つので十分でもある．以上の議論から非退化性が示された． □

ところで Kummer 理論 ([Se1, Chapter §3 p.155] 参照) により

$$1\longrightarrow\mu_{q-1}\longrightarrow(F^{sep})^\times\xrightarrow{q-1\text{ 倍}}(F^{sep})^\times\longrightarrow 1$$

という G_F -module の完全列を得る．ここで G_F は F の絶対 Galois 群である．Long-exact-sequence を考えることにより、

$$H^0(F,(F^s)^\times)\xrightarrow{q-1\text{ 倍}}H^0(F,(F^{sep})^\times)\xrightarrow{\delta}H^1(F,\mu_{q-1})\longrightarrow H^1(F,(F^{sep})^\times)$$

という完全列を得る．Hilbert 90 より $H^1(F,(F^{sep})^\times)=0$ であり、また $H^0(F,(F^{sep})^\times)=F^\times$. さらに F は 1 の原始 $q-1$ 乗根を含んでいることから、自然な群同型ではないが $\mu_{q-1}\cong\mathbb{Z}/q-1$ が成り立ち (μ_{q-1} は 1 の原始 $q-1$ 乗根が成す巡回群である) G_F は μ_{q-1} に対して自明に作用しているものとする．従って上の完全列から

$$F^\times/q-1\simeq H^1(F,\mathbb{Z}/m-1)=Gal(F(\sqrt[q-1]{F^\times})/F)^\vee$$

が得られ、それの Pontrjagin 双対を考えることによって、

$$(F^\times/q-1)^\vee \simeq Gal(F(\sqrt[q-1]{F^\times})/F).$$

を得る. ($^\vee$ はその指標群をあらわすものとする) この関係と Kummer pairing から得られる $K_n^{top}(F)/q-1 \simeq (F^\times/q-1)^\vee$ と結びつけて

$$\psi_F^{q-1} : K_n^{top}(F)/q-1 \longrightarrow (F^\times/q-1)^\vee \cong Gal(F(\sqrt[q-1]{F^\times})/F) \qquad a \longmapsto \psi_F(a) \longmapsto \sigma_a.$$

という関係を得る. それではこの同型で得られる σ_a は実際どのような元であるか教えてくれる補題を示そう.

補題 5.2. F を 1 の原始 m 乗根 ζ_m を含む体. K を F の指数 m に関する有限次 Kummer 拡大. $G := Gal(K/F)$ を K/F の Galois 群. $G^\vee$ を G の指標群とする. このとき $H(K) := (K^\times)^m \cap F^\times$ とするとき

$$H(K)/F^\times \longrightarrow G^\vee \qquad \bar{a} = a \bmod F^\times \longmapsto \chi_a$$

という対応により、

$$H(K)/F^\times \simeq G^\vee$$

が成り立つ. ただし χ_a は $\chi_a(\sigma) = \sigma(\sqrt[m]{a})/\sqrt[m]{a}$ $(\forall\sigma \in G)$ をみたす $G^\vee$ の元である.

証明. $H(K)$ の元 a は $a = \alpha^m$ $\alpha \in K^\times$ と表すことができる. したがって F は 1 の原始 m 乗根をもつので、$K[X]$ の多項式 $X^m - a$ は一次の積に分解して

$$X^m - a = \prod_{i=0}^{m-1}(X - \zeta_m^i\alpha)$$

となる. $\zeta_m^i\alpha$ のうち任意の一つを $\sqrt[m]{a}$ で表せば、$\sigma \in G$ について $\sigma(\sqrt[m]{a})$ も $X^m - a$ の根であるから $\sigma(\sqrt[m]{a}) = \zeta_m^s\sqrt[m]{a}$ となる s が定まる. このとき

$$\sigma(\zeta_m^i\sqrt[m]{a}) = \zeta_m^i\sigma(\sqrt[m]{a}) = \zeta_m^s(\zeta_m^i\sqrt[m]{a})$$

となるから、ζ_m^s は $\sqrt[m]{a}$ の取り方によらず a と σ に依存して決まる. それゆえ $\chi_a(\sigma) := \zeta_m^s$ と表す. つまり $\sigma(\sqrt[m]{a}) = \chi_a(\sigma)\sqrt[m]{a}$ である.

G の元 σ, τ と $H(K)$ の元 a について

$$\chi_a(\sigma\tau)\sqrt[m]{a} = \sigma\tau(\sqrt[m]{a}) = \sigma(\chi_a(\tau)\sqrt[m]{a}) = \chi_a(\tau)\sigma(\sqrt[m]{a}) = \chi_a(\tau)\chi_a(\sigma)\sqrt[m]{a}$$

が成り立つ．$<\zeta_m>$ で 1 の原始 m 乗根がなす巡回群をあらわすことにすれば、任意の $\sigma \in G$ に対して $\chi_a(\sigma) \in <\zeta_m>$ なので、$\chi_a(\tau)\chi_a(\sigma) = \chi_a(\sigma)\chi_a(\tau)$ が成り立つから、上式より

$$\chi_a(\sigma\tau) = \chi_a(\sigma)\chi_a(\tau)$$

が成り立つ．したがって $\chi_a \in G^\vee$ である．

また $H(K)$ の元 a, b と任意の G の元 σ について、

$$\chi_{ab}(\sigma)\sqrt[m]{ab} = \sigma(\sqrt[m]{ab}) = \sigma(\sqrt[m]{a})\sigma(\sqrt[m]{b}) = \chi_a(\sigma)\chi_b(\sigma)\sqrt[m]{ab}$$

が成り立つので、

$$\chi_{ab}(\sigma) = \chi_a(\sigma)\chi_b(\sigma)$$

となることが分かる．従って

$$\phi : H(K) \longrightarrow G^\vee \qquad a \longmapsto \chi_a$$

は準同型写像である．つづいて Ker ϕ を求めよう．$H(K)$ の元 a が Ker ϕ の元のとき

$$\begin{aligned}\chi_a(\sigma) = 1 \ \ \forall\sigma \in G &\Longleftrightarrow \sigma(\sqrt[m]{a}) = \sqrt[m]{a} \ \ \forall\sigma \in G \\ &\Longleftrightarrow \sqrt[m]{a} \in F^\times \Longleftrightarrow a \in (F^\times)^m\end{aligned}$$

であるから Ker $\phi = F^\times$ となることがわかる．一方 $G^\vee$ の任意の元 χ を取ると、$\chi : G \longrightarrow <\zeta_m> \subseteq K^\times$ であり ($<\zeta_m>$ は ζ_m で生成される巡回群) 、上の χ に関する準同型性から χ は G-module $K^\times$ の 1 次元のコホモロジー群の元と考えられる．ところで Hilbert 90 により $H^1(G, K^\times) = 0$ が成り立つので、$\chi(\sigma) = \sigma(\alpha)/\alpha \ \ \forall\sigma \in G$ となる $K^\times$ の元 α が存在する．このとき

$$\begin{aligned}1 = \chi(\sigma)^m = \sigma(\alpha^m)/\alpha^m &\Longrightarrow \sigma(\alpha^m) = \alpha^m \ \ (\forall\sigma \in G), \\ &\Longrightarrow a = \alpha^m \in H(K).\end{aligned}$$

が成り立つ．$\sqrt[m]{a}$ として α をとれば、$\sigma(\sqrt[m]{a}) = \chi(\sigma)\sqrt[m]{a}$ であるから、

$$\chi(\sigma) = \chi_a(\sigma) \ \ (\forall\sigma \in G)$$

が成り立つ．したがって ϕ は全射であることが分かった．以上の議論より

$$\phi : H(K)/(F^\times)^m \simeq G^\vee$$

が成り立つ． □

早速上の補題で $K=F(\sqrt[q-1]{F^\times})$ かつ $m=q-1$ とすれば、$q-1$ と F の標数 p が互いに素であり、$K^\times$ の主単数群は $(q-1)$-divisable なので $H(K)=F^\times$ となるから

$$F^\times/(F^\times)^m \simeq Gal(F(\sqrt[q-1]{F^\times})/F)^\vee \qquad \bar{a}=a \mod F^\times \longmapsto \chi_a$$

を得る．ただし χ_a は $\chi_a(\sigma)=\sigma(\sqrt[m]{a})/\sqrt[m]{a}$ $(\forall\sigma\in Gal(F(\sqrt[q-1]{F^\times})/F))$ をみたすものである．ゆえに

$$\psi_F^{q-1}: K_n^{top}(F)/q-1 \cong Gal(F(\sqrt[q-1]{F^\times})/F) \qquad a\longmapsto\sigma_a.$$

によって得られる σ_a は任意の $F^\times$ の元 b をとってきた時、

$$(a,b)_F=\sigma_a(\sqrt[q-1]{b})/\sqrt[q-1]{b}$$

と reciprocity map ψ_F^{q-1} から得られる元 σ_a を特徴づけることができる．これまでの議論を statement としてまとめると次の定理が得られる．

定理 5.3. 記号などは上の通りとする．このとき

$$\psi_F^{q-1}: K_n^{top}(F)/q-1 \cong Gal(F(\sqrt[q-1]{F^\times})/F) \qquad a\longmapsto\sigma_a.$$

という同型が得られ、σ_a は任意の $F^\times$ の元 b をとってきた時、

$$(a,b)_F=\sigma_a(\sqrt[q-1]{b})/\sqrt[q-1]{b}$$

と特徴づけられる．

6 Witt ring

6.1 Witt ring の定義

ここでは、次に示す Artin-schreier-Witt pairing に使用する Witt ring についての定義、および証明に用いる主要な命題・定理について述べる．省略した証明の部分についての詳細は [FJ1, §3.17,18] 参照のこと．

早速 Witt ring の定義に取りかかりたいのだが、そのためにまず定義をするために必要な $\mathbb{Z}$ 係数 n 変数多項式 W_n $(\in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]\ (n \geq 2))$ を用意する．

定義 6.1. 素数 p を一つ取り固定する．W_n を次のように n について帰納的に定義する．

$$W_n(X_1, \cdots, X_n) = W_{n-1}({X_1}^p, \cdots, {X_{n-1}}^p) + p^{n-1}X_n \quad (n \geq 2),$$
$$W_1(X_1) = X_1 \qquad (n = 1).$$

具体的に $n = 2, 3$ の時は $W_2(X_1, X_2) = X_1^p + pX_2$, $W_3(X_1, X_2, X_3) = X_1^{p^2} + pX_2^p + p^2X_3$ であり、一般の n については具体的に

$$W_n(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} p^{i-1}X_i^{p^{n-i}}$$

と表せる．

そしてこの多項式 W_n について、次のことが成り立つ．

命題 6.2. $W_n(X_1, \cdots, X_n)$ と $W_n(Y_1, \cdots, Y_n)$ について、次の演算を満たす $\mathbb{Z}$ 係数 $2n$ 変数多項式 $\sigma_n, \tau_n \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n]$ が一意的に存在する．

$$W_n(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = W_n(X_1, \cdots, X_n) + W_n(Y_1, \cdots, Y_n).$$
$$W_n(\tau_1, \cdots, \tau_n) = W_n(X_1, \cdots, X_n) \cdot W_n(Y_1, \cdots, Y_n).$$

具体的な証明は省略する．例えば具体的には、$\sigma_1(X_1, Y_1) = X_1 + Y_1$, $\sigma_2(X_1, X_2, Y_1, Y_2) = X_2 + Y_2 - \frac{1}{p}[(X_1 + Y_1)^p - (X_1^p + Y_1^p)]$, $\tau_1(X_1, Y_1) = X_1Y_1$, $\tau_2(X_1, X_2, Y_1, Y_2) = X_1^pY_2 + X_2Y_1^p + pX_2Y_2$ と表せる．準備が整ったので、Witt ring の定義を述べることにしよう．

定義 6.3 (Witt ring の定義). A を単位元をもつ標数 $p\ (>0)$ の可換環. $A^n := \overbrace{A\times\cdots\times A}^{n}$ の元 $a=(a_1,\cdots,a_n),\ b=(b_1,\cdots b_n)$ に対して $a^{(i)}=W_i(a_1,\cdots,a_i)\in A$ を a の i-th ghost component と呼ぶ. なおここで考えている W_i においては、W_i を定義する際に固定した素数 p は可換環 A の標数と一致しているものと仮定する. A^n に以下の演算を入れる.

$$a+b=c=(c_1,\cdots,c_n)\overset{def}{\iff}\text{各 } i \text{ について、} a^{(i)}+b^{(i)}=c^{(i)}.$$
$$ab=d=(d_1,\cdots,d_n)\overset{def}{\iff}\text{各 } i \text{ について、} a^{(i)}b^{(i)}=d^{(i)}.$$

A^n は上で定めた演算に関して σ_n,τ_n の一意性から well-defined であり、可換環をなす. この環の零元は $0=(0,\cdots,0)$ 単位元は $1=(1,0,\cdots,0)$ となっている. A^n に上の演算を入れて得られる可換環を $W_n[A]$ と表し、長さ n の Witt ring と呼ぶ. 上に記した演算規則からすぐわかることだが、和・積の定義はそれぞれの成分の和・積によって定義されるのではなく、各 ghost component の和・積によって定義されているので注意されたい. 加えて Witt ring の零元および単位元も可換環の時と同様にそれぞれ 0, 1 と表すのでこちらも注意されたい.

6.2 Witt ring の各写像

ここでは Witt ring における固有な map と今後用いるいくつかの命題などについて述べる. なお今後特に断りがない限り、A は標数が $p\ (>0)$ である単位元をもつ可換環を表し、$W_m[A]$ は長さ $m(\in\mathbf{N})$ の Witt ring を表すものとする.

命題 6.4. B を単位元をもつ標数 $p\ (>0)$ の可換環. $f:A\longrightarrow B$ を準同型とするとき、f から誘導される Witt ring の写像

$$\tilde{f}:W_m[A]\longrightarrow W_m[B]\qquad (a_1,\cdots,a_m)\longmapsto (f(a_1),\cdots,f(a_m))$$

は Witt ring の環準同型となる. また $f(1_A)=1_B\Longrightarrow \tilde{f}(1_{W_m[A]})=1_{W_m[B]}$ が成り立つ. また特に f が全射である場合 $\tilde{f}$ も全射となる.

定義 6.5 (V (shift)・A (back)・Frobenius 写像について).

$$V:W_m[A]\longrightarrow W_{m+1}[A]\qquad (a_1,\cdots,a_m)\longmapsto (0,a_1,\cdots,a_m)$$

は $W_m[A]$ の加法群としての自己準同型である. すなわち、

$$V(a+b)=V(a)+V(b)\qquad (a,b\in W_m[A])$$

が成り立つ. この写像 V を shift map と呼ぶ. さらに $V^k := \underbrace{V \circ \cdots \circ V}_{k}$ $(k \in \mathbb{N})$ と表せば、$a = (a_1, \cdots, a_m) \in W_m[A]$ に対して

$$a = (a_1, \cdots, a_i, 0, 0 \cdots, 0) + V^i((a_{i+1}, \cdots, a_m)) \quad (1 \leq i \leq m)$$

が成り立つ. また

$$[p] : W_m[A] \longrightarrow W_m[A] \qquad (a_1, \cdots, a_m) \longmapsto (a_1^p, \cdots, a_m^p)$$

は $W_m[A]$ 上準同型写像である. すなわち

$$\begin{aligned} (a+b)^{[p]} &= a^{[p]} + b^{[p]} \\ (ab)^{[p]} &= a^{[p]} b^{[p]} \qquad (\forall a, b \in W_m[A]) \end{aligned}$$

が成り立つ. この写像 $[p]$ を $W_m[A]$ の Frobenius 写像と呼ぶ. また $[p^n] := \underbrace{[p] \circ \cdots \circ [p]}_{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ と表せば、上の関係式から $[p^n]$ も $W_m[A]$ 上準同型写像である. 最後に

$$A : W_{m+1}[A] \longrightarrow W_m[A] \qquad (a_1, \cdots, a_m, a_{m+1}) \longmapsto (a_1, \cdots, a_m)$$

は Witt ring の全射準同型である. すなわち、

$$\begin{aligned} A(a+b) &= A(a) + A(b) \\ A(a \cdot b) &= A(a)A(b) \qquad (\forall a, b \in W_{m+1}[A]) \end{aligned}$$

が成り立つ. この写像 A を back map と呼ぶ.

つづいて計算に必要なこの三つの写像の間の関係を示す命題を述べることにしよう.

命題 6.6 (shift・back・Frobenius の関係)**.** $V, A, [p]$ は上の通りとする. この時

(1) $$V(a) \cdot b = V(a \cdot A(b^{[p]})) \qquad (a \in W_m[A],\ b \in W_{m+1}[A]).$$

(2) $$p \cdot a = \underbrace{a + \cdots + a}_{p} = A(V(a^{[p]})) \qquad (a \in W_m[A]).$$

が成り立つ.

上の命題を使って次の定理が成り立つことが分かる.

定理 6.7. A を標数 p (> 0) である単位元をもつ可換環とする時、長さ m の Witt ring $W_m[A]$ は標数 p^m の可換環となる.

証明. $W_m[A]$ は単位元 $1=(1,0,\cdots,0)$ を持つ可換環であるから、1 の位数が p^m であることを示せばよい. 命題 6.6 (2) より

$$p\cdot 1 = A(V(1^{[p]})) = (0,1,0,\cdots,0).$$

なので p 倍を繰り返すと

$$\begin{aligned} p^2\cdot 1 &= (0,0,1,\cdots,0), \\ &\vdots \\ p^{m-1}\cdot 1 &= (0,0,\cdots,0,1) \neq 0, \\ p^m\cdot 1 &= (0,0,\cdots,0,0) = 0. \end{aligned}$$

となり 1 の位数が p^m であることが分かった. □

この定理から直ちに次のことが成り立つことが分かる.

系 6.8.

$$W_m[\mathbb{F}_p] = \mathbb{Z}/p^m.$$

証明. $W_m[\mathbb{F}_p]$ は集合として、体 $\mathbb{F}_p$ 上 $\mathbb{F}_p$ に成分をもつ m 項のベクトル空間 ${\mathbb{F}_p}^m$ と一致するから、その位数は p^m となる. 一方で $1=(1,0,\cdots,0)\in W_m[\mathbb{F}_p]$ より $\{k\cdot 1|\ 1\leq k\leq p^m\}\subseteq W_m[\mathbb{F}_p]$ であり、定理 6.7 から $\left|\{k\cdot 1|1\leq k\leq p^m\}\right| = p^m$. 従って、

$$\begin{aligned} W_m[\mathbb{F}_p] &= \{k\cdot 1|1\leq k\leq p^m\}, \\ &\simeq \mathbb{Z}/p^m. \end{aligned}$$

となることがわかる. □

また次の定理も証明は省略するが後に使うことになる.

定理 6.9. A を単位元を持つ標数 p の可換環とする. この時、

$$a=(a_1,a_2,\cdots,a_m)(\in W_m[A]) \text{ が単元} \Longleftrightarrow a_1\in A \text{ が単元}.$$

が成り立つ.

6.3 標数 $p\ (>0)$ をもつ可換体 F の Witt ring

ここでは特に標数 p の可換体 F の Witt ring の性質について述べることにする. なお特に断りがない限り、M を F 上有限次 Galois 拡大. $G=Gal(M/F)$ を表すものとする.

ここでの要点は、$W_m[M]$ は G-module となっているので Galois Cohomology を考えることができ、さらに Hilbert 90 と同様な定理が成り立つことである．それでは早速見ていくことにしよう．

まず、自然な埋め込みによって、$W_m[F]$ は $W_m[M]$ の部分環となっている． また $\sigma \in Gal(M/F)$ を任意に取る．この時

$$W_m[M] \longrightarrow W_m[M] \qquad a = (a_1, a_2, \cdots, a_m) \longmapsto a^\sigma = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \cdots, \sigma(a_m))$$

は 命題 6.4 により、σ は $W_m[M]$ の自己同型を引き起こすことが分かる．$W_m[M]$ の自己同型群の部分群とみなせる Galois 群 G をそのまま G で表す．また $a \in W_m[M]$ に対して、

$$a^\sigma = a \quad (\forall \sigma \in G) \Longleftrightarrow a \in W_m[F]$$

が成り立つことは、各成分を考えれば明らかである．従って G の任意の元は $W_m[M]$ の $W_m[F]$ 上自己同型写像を誘導する．つづいて体論のようにトレース写像が定義されることをみてみよう．

定義 6.10 (トレース写像)**.** M/F を標数 $p\ (>0)$ の体 F の有限次 Galois 拡大とする．この時、次のようにトレース写像 $Tr_{M/F}$ を定義する．

$$Tr_{M/F} : W_m[M] \longrightarrow W_m[F] \qquad a \longmapsto Tr_{M/F}(a) := \sum_{\sigma \in G} a^\sigma$$

この map が well-defined であることは、任意の $\tau \in G$ に対して、

$$(Tr_{M/F}(a))^\tau = \sum_{\sigma \in G} a^{\tau\sigma} = \sum_{\sigma \in G} a^\sigma = Tr_{M/F}(a)$$

が成り立つので、$Tr_{M/F}(a) \in W_m[F]$ と実際わかる．またトレース写像が Witt ring の加法群について準同型写像になっており、

$$Tr_{M/F}(a+b) = Tr_{M/F}(a) + Tr_{M/F}(b) \qquad (\forall a, b \in W_m[M])$$

が成り立ち、実際体のトレースと同様のことが成り立つ．特に Witt ring の加法の定義から、$Tr_{M/F}(a) = (b_1, b_2, \cdots, b_m)\ \ (a = (a_1, a_2, \cdots, a_m) \in W_m[M])$ の第一成分は、

$$b_1 = Tr_{M/F}(a_1) = \sum_{\sigma \in G} a^\sigma$$

となる．ここで左辺のトレース写像は、体におけるトレース写像であることに注意.

Witt ring のトレース写像の第一成分が体のトレース写像であることから、体のトレース写像の性質より次のことが成り立つ.

補題 6.11. F を標数 $p\ (>0)$ の体. M/F を有限次 Galois 拡大とする. このとき、$W_m[M]$ の元 a で、$Tr_{M/F}(a)$ が $W_m[F]$ の単元となるものが存在する.

証明. M/F は有限次 Galois 拡大であるから、$a_1 \in M$ で $Tr_{M/F}(a_1) \neq 0$ (このトレース写像は体のトレースである. 以下 Witt ring のトレースと体のトレースの違いに注意) となるものが存在する. ([FJ1, §2.12 定理 2.61 の系] 参照). $a_2, \cdots, a_m \in M$ を適当にとって $a = (a_1, a_2, \cdots, a_m) \in W_m[M]$ とすれば、$Tr_{M/F}(a) \in W_m[F]$ かつ $Tr_{M/F}(a_1) \neq 0$. M は体だから、定理 6.9 より $Tr_{M/F}(a_1)$ は単元ゆえ、$Tr_{M/F}(a)\ (\in W_m[F])$ は $W_m[F]$ の単元となる. □

上の補題から Witt ring において Hibert 90 と同様な定理が成り立つことがわかる.

定理 6.12. F を標数 $p\ (>0)$ の体 M を F 上有限次 Galois 拡大. $G = Gal(M/F)$ とおく. このとき

$$H^1(G, W_m[M]) = 0$$

が成り立つ. すなわち、

$$G \longrightarrow W_m[M] \qquad \sigma \longmapsto \alpha_\sigma$$

を $\alpha_{\sigma\tau} = \alpha_\tau^\sigma + \alpha_\sigma$ をみたす写像とすれば、ある $\beta (\in W_m[M])$ が存在して、$\alpha_\sigma = \beta^\sigma - \beta$ が成り立つ.

証明. 補題 6.11 により $\eta\ (\in W_m[M])$ で $Tr_{M/F}(\eta)$ が $W_m[F]$ の単元となるものが存在する. いま、

$$\gamma = Tr_{M/F}(\eta)^{-1}(\sum_{\tau \in G} \alpha_\tau \eta^\tau)\ (\in W_m[M])$$

とおけば、任意の $\sigma \in G$ について

$$\begin{aligned}
\gamma^\sigma - \gamma &= Tr_{M/F}(\eta)^{-1}(\sum_{\tau \in G} \alpha_\tau^\sigma \eta^{\sigma\tau} - \sum_{\tau \in G} \alpha_\tau \eta^\tau), \\
&= Tr_{M/F}(\eta)^{-1}(\sum_{\tau \in G} \alpha_{\sigma\tau} \eta^{\sigma\tau} - \alpha_\sigma \sum_{\tau \in G} \eta^{\sigma\tau} - \sum_{\tau \in G} \alpha_\tau \eta^\tau), \\
&= -\alpha_\sigma\ .
\end{aligned}$$

よって、$\beta = -\gamma$ とおけば、

$$\alpha_\sigma = \beta^\sigma - \beta \qquad (\forall \sigma \in G)$$

が成り立つ. $\square$

6.4 指標群との関係

記号は前同様 F を標数 $p\ (>0)$ の体. M を F の有限次 Galois 拡大. $G=Gal(M/F)$ とする. ここでは、G の指標群と Witt ring との関係について述べる. ここで述べる定理を使うことによって、reciprocity map によって与えられる Galois 群の元を具体的に計算することができる.

定義 6.13 (Artin-schreier-map)**.**

$$\mathcal{P}: W_m[M] \longrightarrow W_m[M] \qquad a \longmapsto a^{[p]}-a \quad (\forall \in W_m[M])$$

ここで $[p]$ は Witt ring の Frobenius 写像である. この写像 $\mathcal{P}$ は $W_m[M]$ の加法群についての自己準同型写像であり、その kernel は

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\ \mathcal{P} &= \{\alpha=(a_1,\cdots,a_m)|\ a_i^p=a_i \quad (1\le i\le m)\},\\ &= \{\alpha=(a_1,\cdots,a_m)|\ a_i\in\mathbb{F}_p \quad (1\le i\le m)\},\\ &= W_m[\mathbb{F}_p]\simeq \mathbb{Z}/p^m,\end{aligned}$$

となる. よって Ker $\mathcal{P}$ は 系 6.8 により位数 p^m の巡回群であることが分かる.

ここで新しい記号を導入する.

$$\mathcal{P}^{-1}(W_m[F]\ ;M) := \{a\in W_m[M]|\ \mathcal{P}(a)\in W_m[F]\}$$

は加法群 $W_m[M]$ の部分群であり、$W_m[F]\subseteq \mathcal{P}^{-1}(W_m[F];M)$ となっている. それではこのセクションで重要な定理を述べることにしよう.

定理 6.14. *F を標数 $p\ (>0)$ の体 M を F 上有限次 Galois 拡大. $G=Gal(M/F)$ とする. このとき*

$$\phi: \mathcal{P}^{-1}(W_m[F]\ ;M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, W_m[\mathbb{F}_p]) \qquad \alpha\longmapsto \chi_\alpha\ (\chi_\alpha(\sigma)=\alpha^\sigma-\alpha\ (\forall\in G))$$

は全射準同型写像であり、その kernel は $\mathrm{Ker}\phi=W_m[\mathbb{F}_p]$ である.

証明. $a\ (\in \mathcal{P}^{-1}(W_m[F]\ ;M))$ を一つ固定する. 任意の $\sigma\in G$ について、

$$\chi_a(\sigma)=a^\sigma-a \quad (\in W_m[M])$$

と定義する時

$$\begin{aligned}\chi_a(\sigma)^{[p]} &= (a^\sigma - a)^{[p]} = (a^\sigma)^{[p]} - a^{[p]},\\ &= (a^{[p]})^\sigma - a^{[p]}.\end{aligned}$$

ここで、$\mathcal{P}(a) = \gamma\ (\in W_m[F])$ ならば $\gamma^\sigma = \gamma$ であるから

$$\begin{aligned}\chi_a(\sigma)^{[p]} &= (a+\gamma)^\sigma - (a+\gamma),\\ &= a^\sigma - a = \chi_a(\sigma),\end{aligned}$$

が成り立つ．よってすべての $\sigma \in G$ について、上式が成り立つので $\chi_a(\sigma) \in W_m[\mathbb{F}_p]$ である．また、$\chi_a(\sigma)$ は G から $W_m[\mathbb{F}_p]$ への単射であることもわかる．つづいて、$\chi_a \in \mathrm{Hom}(G, W_m[\mathbb{F}_p])$ を示す．実際 $\sigma, \tau \in G$ について計算すると

$$\begin{aligned}\chi_a(\sigma\tau) &= a^{\sigma\tau} - a = a^{\sigma\tau} - a^\sigma + a^\sigma - a,\\ &= (a^\tau - a)^\sigma + (a^\sigma - a),\\ &= \chi_a(\tau)^\sigma + \chi_a(\sigma),\\ &= \chi_a(\sigma) + \chi_a(\tau),\end{aligned}$$

となるから、$\chi_a \in \mathrm{Hom}(G, W_m[\mathbb{F}_p])$ なことが分かる．

また $\alpha, \beta \in \mathcal{P}^{-1}(W_m[F]\ ; M)$ について、$\alpha + \beta \in \mathcal{P}^{-1}(W_m[F]\ ; M)$ であり、$\chi_{\alpha+\beta} = \chi_\alpha + \chi_\beta$ となることは定義より直ちに分かる．したがって、

$$\phi : \mathcal{P}^{-1}(W_m[F]\ ; M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, W_m[\mathbb{F}_p]) \qquad \alpha \longmapsto \chi_\alpha$$

は well-defined である．Kerϕ を計算すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\phi &= \{\alpha \in \mathcal{P}^{-1}(W_m[F]\ ; M))|\ \chi_\alpha(\sigma) = 0\ (\forall\sigma \in G)\},\\ &= \{\alpha \in \mathcal{P}^{-1}(W_m[F]\ ; M))|\ \alpha^\sigma = \sigma\ (\forall\sigma \in G)\},\\ &= W_m[F].\end{aligned}$$

次に ϕ は全射であることを示す．実際、任意の $\chi \in \mathrm{Hom}(G, W_m[\mathbb{F}_p])$ に対し、

$$\chi(\sigma\tau) = \chi(\sigma) + \chi(\tau) = \chi(\sigma)^\tau + \chi(\tau) \qquad (\forall\sigma, \tau \in G)$$

が成り立つから、定理 6.12 より

$$\chi(\sigma) = \beta^\sigma - \beta \qquad (\forall\sigma \in G)$$

となる $\beta \in W_m[M]$ が存在する．ここで $\chi(\sigma) \in W_m[\mathbb{F}_p] \Longleftrightarrow \chi(\sigma)^{[p]} = \chi(\sigma)$ であるから

$$(\beta^\sigma - \beta)^{[p]} = (\beta^\sigma - \beta).$$

よって、すべての $\sigma \in G$ について

$$\mathcal{P}(\beta)^\sigma = (\beta^{[p]} - \beta)^\sigma = (\beta^{[p]} - \beta) = \mathcal{P}(\beta)$$

が成り立ち、したがって $\mathcal{P}(\beta) \in W_m[F]$ である. それゆえ $\beta \in \mathcal{P}^{-1}(W_m[F]\,;M)$, $\chi(\sigma) = \beta^\sigma - \beta = \chi_\beta(\sigma)$ $(\forall \sigma \in G)$ であるから $\chi = \chi_\beta = \phi(\beta)$. すなわち ϕ は全射である. 以上により定理は示された. □

以下 F は標数 p (> 0) の体. M/F を指数 p^e $(e \in \mathbb{N})$ の有限次 Abel 拡大とし、前同様その Galois 群を G で表す. また $m \geq e$ とする. この時、$W_m[\mathbb{F}_p]$ は位数 p^m の巡回群であり、G は指数 p^e の有限 Abel 群. 従って、有限 Abel 群における指標群の定理から ([FJ1, §3.16 定理 3.78] 参照)

$$\mathrm{Hom}(G, W_m[\mathbb{F}_p]) \simeq G.$$

ただし上の同型は canonical ではないことに注意. よって 定理 6.14 により次のことがなりたつことがわかる.

系 6.15. F を標数 p (> 0) の体. M/F を指数 p^e $(e \in \mathbb{N})$ の有限次 Abel 拡大で、拡大次数は p^f $(f \geq 1)$ とし $m \geq e$ であるとする. この時、加法群の同型として次が成り立つ.

$$\mathcal{P}^{-1}(W_m[F]\,;M)/W_m[F] \simeq G.$$

つづいて、これまで得られた定理および系を別の表現を使ってあらわすことにする. 記号は上のとおりとする.

$$\mathfrak{Q}(W_m[M]) = W_m[F] \cap \mathcal{P}(W_m[M])$$

とおく. $\mathfrak{Q}(W_m[M])$ は加法群 $W_m[F]$ の部分群であり、$\mathcal{P}(W_m[M])$ は $W_m[F]$ の部分群である. $\alpha \in \mathcal{P}^{-1}(W_m[F]\,;M) \Longleftrightarrow \mathcal{P}(\alpha) \in \mathfrak{Q}(W_m[M])$ であるから、全射準同型

$$\psi : \mathcal{P}^{-1}(W_m[F]\,;M) \longrightarrow \mathfrak{Q}(W_m[M])/\mathcal{P}(W_m[F]) \qquad \alpha \longmapsto \mathcal{P}(\alpha) \bmod \mathcal{P}(W_m[F])$$

が導かれる. このとき、

$$\begin{aligned}
\alpha \in \mathrm{Ker}\ \psi &\Longleftrightarrow \text{ある}\beta \in W_m[F] \text{ が存在して } \mathcal{P}(\alpha) = \mathcal{P}(\beta), \\
&\Longleftrightarrow \text{ある}\beta \in W_m[F] \text{ が存在して } \mathcal{P}(\alpha - \beta) = 0, \\
&\Longleftrightarrow \alpha\text{に対して}\alpha - \beta \in W_m[\mathbb{F}_p] \text{ となる}\beta \in W_m[F] \text{ が存在する}, \\
&\Longleftrightarrow \alpha \in W_m[F],
\end{aligned}$$

という同値関係によって Ker $\psi = W_m[F]$ である．したがって ψ により加法群としての同型

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}(W_m[M])/\mathcal{P}(W_m[F]) &\simeq \mathcal{P}^{-1}(W_m[F]\,;M)/W_m[F],\\ &\simeq \mathrm{Hom}(G, W_m[\mathbb{F}_p]),\\ &= G^\vee \simeq G,\end{aligned}$$

が導かれる．なお $G^\vee$ は G の指標群である．従って $\mathfrak{Q}(W_m[M])/\mathcal{P}(W_m[F])$ は Galois 群 G と同型となる. すなわち次のことが示されたことになる.

定理 6.16. F を標数 p (>0) の体. M/F を指数 p^e の有限次 Abel 拡大. 拡大次数は p^f とし $m \geq e$ であるとする．このとき次の同型が成り立つ.

$$\mathfrak{Q}(W_m[M])/\mathcal{P}(W_m[F]) \simeq G.$$

6.5 Galois Cohomology

F を標数 p (>0) の体. M/F を F 上有限次 Abel 拡大. $G = Gal(M/F)$ とするとき、$W_m[M]$ は G-module であったので、Galois Cohomology を考えることができた．F^{sep} で F の分離閉包を表し、$G_F := Gal(F^{sep}/F)$ とおく．また G_F には Krull topology が入っているものとする．G_F の任意の開部分群 H はある F 上の有限次拡大体 L を用いて $H = Gal(F^{sep}/L)$ と表せ、さらに $W_m[F^{sep}]^H = W_m[L]$ より

$$W_m[F^{sep}] = \bigcup_{H:G\ \text{の開部分群}} W_m[F^{sep}]^H$$

が成り立つ．ゆえに $W_m[F^{sep}]$ は位相的 G_F-module であることがわかる．ただし右辺の各 $W_m[F^{sep}]^H$ には discrete 位相が入っていることを注意しておこう．従って F 上有限次拡大の時のように Galois Cohomology を考えてよく、有限次の時と同様に 定理 6.12, 定理 6.14 が成り立つ．詳しくは [Se1, Chapter §3],[Se2, §2] など参照のこと.

それでは G_F-module $W_m[F^{sep}]$ に関係する Galois Cohomology を見ていくことにする．まず次のような G_F-module の完全列を考える.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\mathcal{P} \longrightarrow W_m[F^{sep}] \xrightarrow{\mathcal{P}} W_m[F^{sep}] \longrightarrow 0$$

ここで $\mathcal{P}$ は Artin-schreier map である．また右の完全性は $\mathcal{P}$ の定義と F^{sep} から明らかである．Artin schreier map の kernel は 系 6.8 より Ker$\mathcal{P} \simeq W_m[\mathbb{F}_p] \simeq \mathbb{Z}/p^m$ であった

から、この完全列は

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^m \longrightarrow W_m[F^{sep}] \xrightarrow{\mathcal{P}} W_m[F^{sep}] \longrightarrow 0$$

と書き直せる．なお $\mathbb{Z}/p^m$ には G_F が自明に作用しているものとする．この完全列から Long-exact-sequence を考えることによって、

$$H^0(F, W_m[F^{sep}]) \xrightarrow{\mathcal{P}} H^0(F, W_m[F^{sep}]) \xrightarrow{\delta} H^1(F, \mathbb{Z}/p^m) \longrightarrow H^1(F, W_m[F^{sep}])$$

という完全列を得る．なお δ は連結準同型である．各 Galois Cohomology を見てみると、$H^0(F, W_m[F^{sep}]) = W_m[F]$, $H^1(F, \mathbb{Z}/p^m) = \mathrm{Hom}_{cont}(G_F, \mathbb{Z}/p^m)$ であり、また $H^1(F, W_m[F^{sep}])$ は 定理 6.12 から 0 であることがわかるので、この完全列から

$$W_m[F]/\mathcal{P}(W_m[F]) \simeq \mathrm{Hom}_{cont}(G_F, \mathbb{Z}/p^m)$$

を得る．この同型は discrete な位相群としての同型である．上の同型から Pontrjagin 双対性より、

$$Gal(F^{ab}_{p^m}/F) \cong (W_m[F]/\mathcal{P}W_m[F])^\vee$$

は位相群として同型なことが分かる．ただし $F^{ab}_{p^m}$ は F 上最大 p^m 次 Abel 拡大である．ところで、$F^{ab}_{(p)} = \cup_{m\geq 1} F^{ab}_{p^m}$ とおくと、$\{Gal(F^{ab}_{p^m}/F)\}_{m\in\mathbb{N}}$ は $k \geq l$ $(\in \mathbb{N})$ のとき $Gal(F^{ab}_{p^k}/F) \longrightarrow Gal(F^{ab}_{p^l}/F)$ という自然な全射によって射影系をなし、その射影極限は $\lim_{\leftarrow} Gal(F^{ab}_{p^m}/F) = Gal(F^{ab}_{(p)}/F)$ となる．一方 $\{W_m[F]/\mathcal{P}(W_m[F]), V\}$ (V は Witt ring の shift map) は $V : W_m[F]/\mathcal{P}(W_m[F]) \longrightarrow W_{m+1}[F]/\mathcal{P}(W_{m+1}[F])$ により帰納系をなす．その帰納極限を $\bar{W}[F] := lim_{\rightarrow}(W_m[F]/\mathcal{P}W_m[F])$ と表すことにする．この $Gal(F^{ab}_{(p)}/F)$ と $\bar{W}[F]$ という対象を結びつけるために次の定理を用いる．

定理 6.17 (S.Kaplan)**.** $\{G_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を局所 compact 群の射影系．$\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をその指標群からなる (つまり $G_n^\vee = H_n$) 帰納系とする．このとき以下の同型が成り立つ．

$$(\lim_{\leftarrow} G_n)^\vee \simeq \lim_{\rightarrow} H_n.$$
$$(\lim_{\rightarrow} H_n)^\vee \simeq \lim_{\leftarrow} G_n.$$

この定理の証明は [KAP1] 参照．この定理により、上の同型から

$$Gal(F^{ab}_{(p)}/F) \simeq \bar{W}[F]^\vee$$

が成り立つことが分かる．

7 Artin-schreier-Witt pairing について

最初にまず留数の定義からはじめることにする.

定義 7.1 (留数)**.** F を n 次元局所体. $t_1, \cdots, t_n$ を F の局所パラメータ系. Ω_F^n は $\Omega_F^n := \bigwedge_{k=1}^n \Omega_F^1$ である. ただし Ω_F^1 は F の微分加群である. 局所体の微分加群については [FK1, Appendix to Section 2] 参照のこと. このとき $\alpha = \sum_{i_1,\cdots,i_n} a_{i_1,\cdots,i_n} t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n} \in F$ に対して

$$\omega = \alpha dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \qquad (\omega \in \Omega_F^n)$$

の留数を

$$\mathrm{res}_F(\omega) := a_{-1,\cdots,-1}$$

と定義する. なお留数は局所パラメータ系の取り方によらず値が定まることが知られている. ([L1] 参照) なお留数の定義から、ω, ω' $(\in \Omega_F^n)$ に対して

$$\mathrm{res}_F(\omega + \omega') = \mathrm{res}_F(\omega) + \mathrm{res}_F(\omega').$$

が成り立つことがわかる.

Kummer paring の時と同様に、つぎのような map を考える.

$$(\ ,\ ]_F : K_n^{top}(F) \times W_m[F] \xrightarrow{\phi_F} W_m[\mathbb{F}_q] \xrightarrow{Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}} W_m[\mathbb{F}_p] \cong \mathbb{Z}/p^m$$

W_m は長さ m の Witt ring. トレース $Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}$ は Witt ring におけるトレース. さらに ϕ_F は、任意の $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} (\in K_n^{top}(F))$ と $(\beta_1, \cdots, \beta_m) (\in W_m[F])$ に対して

$$\phi_F(\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}, (\beta_1, \cdots, \beta_m)) = \gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_m) \in W_m[\mathbb{F}_q].$$

という写像である. ただしここの γ は、$\gamma^{(j)}$ (j-th ghost component) が、

$$\gamma^{(j)} = \mathrm{res}_F(\beta^{(j)} d\alpha_1/\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_n/\alpha_n)$$

となる元である. 上の定義から $(\ ,\ ]_F = Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p} \circ \phi_F$ である. この section の核心である Artin-schreier-Witt pairing についての定理を述べる前に、この pairing $(\ ,\ ]_F$ の性質についてから始めることにしよう.

補題 7.2 (pairing の性質)**.** 任意の $\alpha = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ $(\in K_n^{top}(F))$ と、任意の $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_m)$ $(\in W_m[F])$ について次の関係が成り立つ. ここで V は Witt ring の shift map , A は back map , $[p]$ は Frobenius map である.

(1) $$V(\alpha, \beta]_F = (\alpha, V\beta]_F.$$

(2) $$(\alpha, (0, \beta)]_F = (0, (\alpha, \beta]_F).$$

(3) $$A(\alpha, \beta]_F = (\alpha, A\beta]_F.$$

(4) $$(\alpha, \beta^{[p]}]_F = {(\alpha, \beta]_F}^{[p]} = (\alpha, \beta]_F.$$

証明. 最初に (1) について示そう. $(\ ,\ ]_F$ の定義から

$$\phi_F(\alpha, (\beta_1, \cdots, \beta_m)) = \gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_m) \ \in (W_m[\mathbb{F}_q])$$

とおくと、

$$\begin{aligned}(\alpha, (\beta_1, \cdots, \beta_m)]_F &= Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m), \\ &= \sum_{\sigma \in Gal(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)} (\gamma_1, \cdots, \gamma_m)^\sigma.\end{aligned}$$

Witt ring の shift map V は Witt ring の加法について準同型なので、

$$\begin{aligned}V(\alpha, (\beta_1, \cdots, \beta_m)]_F &= V(\quad Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)), \\ &= V(\sum_{\sigma \in Gal(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)} (\gamma_1, \cdots, \gamma_m)^\sigma), \\ &= \sum_{\sigma \in Gal(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)} (0, \gamma_1, \cdots, \gamma_m)^\sigma, \\ &= Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(0, \gamma_1, \cdots, \gamma_m),\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって、$\phi_F(\alpha, V\beta) = \phi_F(\alpha, (0, \beta_1, \cdots, \beta_m)) = (0, \gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ が成り立つことを示せばよい. $\gamma' = \phi_F(\alpha, (0, \beta_1, \cdots, \beta_m))$ とおく. ϕ_F の定義から、具体的に γ' の ghost component を計算すると、

$$\begin{aligned}{\gamma'}^{(1)} = 0, \quad {\gamma'}^{(i)} &= \mathrm{res}_F(W_i(0, \beta_1, \cdots, \beta_{i-1})\ d\alpha_1/\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_n/\alpha_n) \\ &= \mathrm{res}_F(\sum_{j=1}^{i} p^j \beta_j^{p^{i-j-1}} d\alpha_1/\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_n/\alpha_n), \\ &= \mathrm{res}_F(p \sum_{j=1}^{i-1} p^{j-1} \beta_j^{p^{i-j-1}} d\alpha_1/\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_n/\alpha_n), \\ &= \mathrm{res}_F(p W_{i-1}(\beta_1, \cdots, \beta_{i-1}) d\alpha_1/\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_n/\alpha_n), \\ &= \mathrm{res}_F(p\ \beta^{(i-1)} d\alpha_1/\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_n/\alpha_n) \qquad (2 \le i \le m),\end{aligned}$$

となる. ただしここで W_i は Witt ring を定義する多項式である.

一方 $\omega = (0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{m-1})$ は各 i $(1 \le i \le m)$ について ghost component を計算すると、

$$\begin{aligned}
\omega^{(1)} = 0, \quad \omega^{(i)} &= W_i(0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{i-1}), \\
&= \sum_{j=1}^{i} p^j \gamma_j^{p^{i-j-1}}, \\
&= p \sum_{j=1}^{i} p^{j-1} \gamma_j^{p^{i-j-1}}, \\
&= p W_i(\gamma_1, \cdots, \gamma_{i-1}), \\
&= p\gamma^{(i-1)} = \mathrm{res}_F(p\beta^{(i-1)} d\alpha_1/\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_n/\alpha_n).
\end{aligned}$$

となるから、以上より、任意の i $(1 \le i \le m)$ に対して ${\gamma'}^{(i)} = \omega^{(i)}$ が成り立つことがわかる. よって $\gamma' = \omega$ なので、$V(\alpha, \beta]_F = (\alpha, V\beta]_F$ が成り立つ.

(2) については (1) を使えば直ちに分かるので省略する.

(3) は (1) の時と同様に、

$$(\alpha, (\beta_1, \cdots, \beta_m)]_F = Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m) \qquad ((\gamma_1, \cdots, \gamma_m) \in W_m[\mathbb{F}_q])$$

とおく. Witt ring の back map A は Witt ring の加法について準同型なので、左辺を計算すれば

$$\begin{aligned}
A((\alpha, (\beta_1, \cdots, \beta_m)]_F) &= A(Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)), \\
&= A(\sum_{\sigma \in Gal(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)} (\gamma_1, \cdots, \gamma_m)^\sigma), \\
&= \sum_{\sigma \in Gal(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)} (\gamma_1, \cdots, \gamma_{m-1})^\sigma, \\
&= (\alpha, (\beta_1, \cdots, \beta_{m-1})]_F, \\
&= (\alpha, A((\beta_1, \cdots, \beta_m))]_F,
\end{aligned}$$

が成り立つ. よって (3) が示された.

同様に (4) も、

$$\begin{aligned}
(\alpha, \beta]_F &= Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\gamma = Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m) \qquad (\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_m) \in W_m[\mathbb{F}_q]), \\
(\alpha, \beta^{[p]}]_F &= Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\delta = Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\delta_1, \cdots, \delta_m) \qquad (\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_m) \in W_m[\mathbb{F}_q]),
\end{aligned}$$

とおく. Witt ring の Frobenius map $[p]$ の定義より、$\beta^{[p]} = (\beta_1^p, \cdots, \beta_m^p)$ なので、ϕ_F の定義より δ の $1 \leq i \leq m$ について各 ghost component を計算すると、

$$\begin{aligned}\delta^{(i)} &= \mathrm{res}_F(W_i(\beta_1^p, \cdots, \beta_i^p)\ d\alpha_1/\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_n/\alpha_n),\\ &= \mathrm{res}_F((\beta^{(i)})^p d\alpha_1/\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_n/\alpha_n),\\ &= (\gamma^{(i)})^p,\end{aligned}$$

が成り立つ. 一方で Frobenius map $[p]$ は Witt ring の加法について準同型なので、

$$\begin{aligned}{(\alpha,\beta]_F}^{[p]} &= (Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m))^{[p]},\\ &= Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)^{[p]},\\ &= Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\gamma_1^p, \cdots, \gamma_m^p),\end{aligned}$$

が成り立つ. そこで $\gamma' = (\gamma_1^p, \cdots, \gamma_m^p)$ とおけば、各 ghost component は

$$\begin{aligned}{\gamma'}^{(i)} &= W_i(\gamma_1^p, \cdots, \gamma_i^p),\\ &= W_i(\gamma_1, \cdots, \gamma_i)^p,\\ &= (\gamma^{(i)})^p,\end{aligned}$$

となるので、すべての $1 \leq i \leq m$ について $\delta^{(i)} = {\gamma'}^{(i)}$ が成り立つから $\delta = \gamma'$ である. すなわち $(\alpha, \beta^{[p]}]_F = {(\alpha,\beta]_F}^{[p]}$ が成り立つ. つづいて、

$$(\alpha,\beta]_F = (\omega_1, \cdots, \omega_m) \qquad ((\omega_1, \cdots, \omega_m) \in W_m[\mathbb{F}_p])$$

と置き直すと、

$$\begin{aligned}{(\alpha,\beta]_F}^{[p]} &= (\omega_1, \cdots, \omega_m)^{[p]},\\ &= (\omega_1^p, \cdots, \omega_m^p),\\ &= (\omega_1, \cdots, \omega_m) = (\alpha,\beta]_F,\end{aligned}$$

が成り立つ. 以上より (4) が示された. □

注意 7.3. 後に示すが、pairing $(\ ,\ ]_F$ は双線形であるから、この (4) の結果より Artin-schreier-map $\mathcal{P}$ について任意の $\alpha = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ $(\in K_n^{top}(F))$ と、任意の $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_m)$ $(\in W_m[F])$ について $(\alpha, \mathcal{P}(\beta)]_F = 0$ が成り立つことがわかる.

定理 7.4 (Artin-schreier-Witt pairing)**.**

$$(\ , \ ]_F : K_n^{top}(F)/p^m \times W_m[F]/\mathcal{P}W_m[F] \longrightarrow \mathbb{Z}/p^m$$

は非退化かつ双線形である. ただし $\mathcal{P}$ は $\mathcal{P}(a) = a^{[p]} - a$ $(a \in W_m[F])$ を満たす Witt ring における Artin-schreier map である.

証明. まずは双線形性について示す. 最初に $K_n^{top}(F)/p^m$ 側の線形性をみる.

$$\begin{aligned}
(\{\alpha_1\alpha_1', \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}, (\beta_1, \cdots, \beta_m)]_F &= Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\gamma = Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m), \\
(\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}, (\beta_1, \cdots, \beta_m)]_F &= Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\delta = Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\delta_1, \cdots, \delta_m), \\
(\{\alpha_1', \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}, (\beta_1, \cdots, \beta_m)]_F &= Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\epsilon = Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m),
\end{aligned}$$

とおく. $(\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_m), \ \delta = (\delta_1, \cdots, \delta_m), \ \epsilon = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m) \ \in W_m[\mathbb{F}_q])$. 微分加群の演算規則より

$$d(\alpha\alpha')/(\alpha\alpha') = d\alpha/\alpha + d\alpha'/\alpha'$$

が成り立つので、$(\ , \ ]_F$ の定義から γ の各 ghost component $\gamma^{(i)}$ は、

$$\begin{aligned}
\gamma^{(i)} &= \mathrm{res}_F(\beta^{(i)} d(\alpha_1\alpha')/(\alpha_1\alpha') \wedge \cdots \wedge d\alpha_n/\alpha_n), \\
&= \mathrm{res}_F(\beta^{(i)} d\alpha_1/\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_n/\alpha_n + \beta^{(i)} d\alpha_1'/\alpha_1' \wedge \cdots \wedge d\alpha_n/\alpha_n), \\
&= \mathrm{res}_F(\beta^{(i)} d\alpha_1/\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_n/\alpha_n) + \mathrm{res}_F(\beta^{(i)} d\alpha_1'/\alpha_1' \wedge \cdots \wedge d\alpha_n/\alpha_n), \\
&= \delta^{(i)} + \epsilon^{(i)},
\end{aligned}$$

を満たす. これより、Witt ring の加法の定義から

$$\gamma^{(i)} = \delta^{(i)} + \epsilon^{(i)}$$

が成り立ち、これはすべての i $(1 \leq i \leq m)$ で成り立つので

$$\begin{aligned}
&(\{\alpha_1\alpha_1', \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}, (\beta_1, \cdots, \beta_m)]_F = \\
&\qquad (\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}, (\beta_1, \cdots, \beta_m)]_F + (\{\alpha_1', \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}, (\beta_1, \cdots, \beta_m)]_F.
\end{aligned}$$

となる. よって、$K_n^{top}(F)/p^m$ 側の線形性が示された.

つづいて $W_m[F]/\mathcal{P}W_m[F]$ 側の線形性を示す. 先ほどのように、

$$\begin{aligned}
(\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}, (\beta_1, \cdots, \beta_m) + (\beta_1', \cdots, \beta_m')]_F &= Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\gamma = Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m), \\
(\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}, (\beta_1, \cdots, \beta_m)]_F &= Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\delta = Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\delta_1, \cdots, \delta_m), \\
(\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}, (\beta_1', \cdots, \beta_m')]_F &= Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\epsilon = Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m),
\end{aligned}$$

とおく. $(\ ,\ ]_F$ の定義より γ の各 ghost component $\gamma^{(i)}$ は、

$$\begin{aligned}\gamma^{(i)} &= \mathrm{res}_F((\beta^{(i)}+\beta'^{(i)})d\alpha_1/\alpha_1\wedge\cdots\wedge d\alpha_n/\alpha_n),\\ &= \mathrm{res}_F((\beta^{(i)}d\alpha_1/\alpha_1\wedge\cdots\wedge d\alpha_n/\alpha_n)+\mathrm{res}_F((\beta'^{(i)}d\alpha_1/\alpha_1\wedge\cdots\wedge d\alpha_n/\alpha_n),\\ &= \delta^{(i)}+\epsilon^{(i)},\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}&(\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\},(\beta_1,\cdots,\beta_m)+(\beta'_1,\cdots,\beta'_m)]_F=\\ &\qquad(\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\},(\beta_1,\cdots,\beta_m)]_F+(\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\},(\beta'_1,\cdots,\beta'_m)]_F\end{aligned}$$

が成り立つ. 以上から双線形であることが示された.

次に非退化性について示そう. $m\ (\in\mathbb{N})$ についての数学的帰納法により示す. 最初に $m-1$ 以下の時に非退化性が成り立てば、m のときも成り立つことを示す. $k=1,2,\cdots,m-1\ (m>1)$ のとき、定理が成り立つと仮定する. この時 $k=m$ の非退化性を調べる. 始めに $W_m[F]/\mathcal{P}W_m[F]$ 側の非退化性を示す. 任意の $\alpha(\in K_n^{top}(F)/p^m)$ に対して $(\alpha,\beta]_F=0$ をみたす β について、補題 7.2 (3) により

$$A(\alpha,\beta]_F=(\alpha,A\beta]_F=0$$

が成り立つ. またこの β について具体的に $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ と表すと、帰納法の仮定より

$$A\ \beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{m-1})\in\mathcal{P}W_{m-1}[F]$$

が成り立つ. 定義 6.5 により $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{m-1},0)+V^{m-1}\beta_m$ が成り立つので、

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta]_F &= (\alpha,(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{m-1},0)+V^{m-1}\beta_m]_F,\\ &= (\alpha,V^{m-1}\beta_m]_F,\\ &= (0,\cdots,0,(\alpha,\beta_m]_F)=0.\end{aligned}$$

したがって $(\alpha,\beta_m]_F=0$ となることが分かり、帰納法の仮定より $\beta_m\in\mathcal{P}(F)$ である.

$$\begin{aligned}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{m-1}) &= (\gamma_1^p,\gamma_2^p,\cdots,\gamma_{m-1}^p)-(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{m-1}),\\ \beta_m &= \gamma_m^p-\gamma_m,\end{aligned}$$

と具体的に表す時、

$$\begin{aligned}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{m-1},0) &= (\gamma_1^p,\gamma_2^p,\cdots,\gamma_{m-1}^p,0)-(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{m-1},0),\\ (0,0,\cdots,0,\beta_m) &= (0,0,\cdots,0,\gamma_m^p)-(0,0,\cdots,0,\gamma_m),\end{aligned}$$

が実際成り立つ．いずれの場合も同様に計算すればよいので、ここでは前者の場合について示そう．$B_1 = (\beta_1, \cdots, \beta_{m-1})$, $B_2 = (\beta_1, \cdots, \beta_{m-1}, 0)$ とおけば、各 ghost component について、$B_1^{(i)} = B_2^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m-1)$ が成り立ち、 また $i = m$ については、

$$\begin{aligned} B_2^{(m)} = W_m(\beta_1, \cdots, \beta_{m-1}, 0) &= W_{m-1}(\beta_1^p, \cdots, \beta_{m-1}^p), \\ &= W_{m-1}(\beta_1, \cdots, \beta_{m-1})^p = B_1^{(m-1)p}. \end{aligned}$$

が成り立つ．また $C = (\gamma_1^p, \gamma_2^p, \cdots, \gamma_{m-1}^p, 0) - (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{m-1}, 0)$, とおけば、先ほどと同様に各 ghost component について計算すると、$C^{(i)} = B_1^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m-1)$ が成り立ち、 また $i = m$ については、

$$\begin{aligned} C^{(m)} &= W_m(\gamma_1^p, \cdots, \gamma_{m-1}^p, 0) - W_m(\gamma_1, \cdots, \gamma_{m-1}, 0), \\ &= W_{m-1}(\gamma_1^p, \cdots, \gamma_{m-1}^p)^p - W_{m-1}(\gamma_1^p, \cdots, \gamma_{m-1}^p), \\ &= \{W_{m-1}(\gamma_1^p, \cdots, \gamma_{m-1}^p) - W_{m-1}(\gamma_1, \cdots, \gamma_{m-1})\}^p, \\ &= (B_1^{(m-1)})^p = B_2^{(m)}, \end{aligned}$$

が成り立つ．よって各 ghost component について一致するので $B_2 = C$ が成り立つ．したがって $\mathcal{P}$ が $W_m[F]$ の自己準同型写像であることから、任意の α に対して $(\alpha, \beta]_F = 0$ をみたす β について、

$$\begin{aligned} \beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) &= (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{m-1}, 0) + V^{m-1}\beta_m, \\ &= (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{m-1}, 0) + (0, 0, \cdots, 0, \beta_m), \\ &= (\gamma_1^p, \gamma_2^p, \cdots, \gamma_{m-1}^p, 0) - (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{m-1}, 0), \\ &\qquad + (0, 0, \cdots, 0, \gamma_m^p) - (0, 0, \cdots, 0, \gamma_m) \in \mathcal{P}W_m[F], \end{aligned}$$

が成り立つ．以上から $\beta \in \mathcal{P}W_m[F]$ となることが分かった．

逆に $\beta \in \mathcal{P}W_m[F]$ の時は注意 7.3 より、任意の $\alpha \in K_n^{top}(F)$ に対して $(\alpha, \beta]_F = 0$ が成り立つ．以上で $W_m[F]/\mathcal{P}W_m[F]$ 側の非退化性が分かった．

つづいて $K_n^{top}(F)/p^m$ の非退化性をみる．α を $(\alpha, \beta]_F = 0$ $(\forall \beta \in W_m[F]/\mathcal{P}W_m[F])$ をみたす $K_n^{top}(F)/p^m$ の元とする．このとき $(\alpha, \beta]_F = 0$ なので、もちろん p 倍しても 0 だから

$$(\alpha, \beta]_F = p(\alpha, \beta]_F = (p\alpha, \beta]_F = 0$$

が成り立つ．一方で、命題 6.6(2) および補題 7.2 により具体的に $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$

と表せば、

$$\begin{aligned}
p(\alpha,\beta]_F &= A\circ V\circ[p]((\alpha,\beta]_F),\\
&= (\alpha,(0,\beta_1^p,\beta_2^p,\cdots,\beta_{m-1}^p)]_F,\\
&= (0,(\alpha,(\beta_1^p,\beta_2^p,\cdots,\beta_{m-1}^p)]_F),\\
&= (0,(\alpha,(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{m-1})]_F),
\end{aligned}$$

が成り立つので、

$$(p\alpha,\beta]_F = (p\alpha,(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)]_F = (0,(\alpha,(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{m-1})]_F)$$

がわかり、さらに帰納法の仮定から $\alpha\in p^{m-1}K_n^{top}(F)$ がわかる. そこで $\alpha=p^{m-1}\alpha'$ とすれば、上の関係式より

$$\begin{aligned}
0=(\alpha,\beta]_F &= (p^{m-1}\alpha',(\beta_1,\cdots,\beta_m)]_F,\\
&= (0,(p^{m-2}\alpha',(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{m-1})]_F),\\
&= \qquad\qquad \vdots\\
&= (0,\cdots,0,(\alpha',\beta_1]_F),
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って帰納法の仮定から、$\alpha'\in pK_n^{top}(F)$ がわかり、$\alpha\in p^mK_n^{top}(F)$ となる.

逆に、$\alpha\in p^mK_n^{top}(F)$ のとき、具体的に $\alpha=\{p^m\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ と表す時、$(\ ,\ ]_F$ の線形性から、任意の β $(\in W_m[F])$ に対して

$$(\alpha,\beta]_F = p^m(\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\},\beta]_F$$

が成り立つ. $W_m[\mathbb{F}_p]$ の位数は p^m であったから、$(\alpha,\beta]_F=0$ が成り立ち、$K_n^{top}(F)/p^m$ の非退化性が言える. 従って $m=1$ のとき、つまり Artin-schreier pairing の時の非退化性の問題へと帰着されることがわかった. 改めて statement の形で言い直すと、

定理 7.5 (Artin-schreier pairing)**.**

$$(\ ,\ ]_F : K_n^{top}(F)/p\times F/\mathcal{P}(F)\longrightarrow \mathbb{Z}/p$$

は双線形かつ非退化な pairing である. なお pairing の具体的な形は、任意の $\alpha=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ $(\in K_n^{top}(F))$, β $(\in F)$ に対して次のように与えられる.

$$(\alpha,\beta]_F = Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\mathrm{res}_F(\beta\ d\alpha_1/\alpha_1\wedge\cdots\wedge d\alpha_n/\alpha_n).$$

非退化性を調べる前に、$\alpha \in K_n^{top}(F)$ は定理 3.17, 命題 3.20 により、

(1) $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$.

(2) $\{\theta, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\}$ $\theta \in \mathbb{F}_q$ $(1 \leq m \leq n)$.

(3) $\{1 + at_n^{i_n} \cdots t_1^{i_1}, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\}$ $(a \in \mathbb{F}_q,\ \ i_j \in \mathbb{Z}\ \ (1 \leq j \leq n))$.
ただし m は $p \nmid i_m$ かつ $p | i_k$ $(1 \leq k \leq m-1)$ を満たす m $(1 \leq m \leq n)$ である.
また ˆ はその要素を除くという意味で用いている.

から生成されていて、$\beta \in F$ は 系 2.9 より $bt_n^{j_n} \cdots t_1^{j_1}$ $(b \in \mathbb{F}_q\ \ j_l \in \mathbb{Z}\ \ (1 \leq l \leq n))$ によって生成されていることを思い出す. 双線形性はすでに示されているので、非退化性は各生成元の間で調べれば十分である. 従って $\beta = bt_n^{j_n} \cdots t_1^{j_1}$ として初めから考えてよい. では早速 $K_n^{top}(F)/p$ 側の非退化性を見てみよう. 任意の $\beta = bt_n^{j_n} \cdots t_1^{j_1}$ に対して $(\alpha, \beta]_F = 0$ となる α は

Case1. α が (1) の元で生成されている時.

$$\alpha = s\{t_1, t_2, \cdots, t_n\} \quad (s \in \mathbb{Z})$$

と表せる. $(j_1, j_{,2}, \cdots, j_n) = (0, 0, \cdots, 0)$ ならば、

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta]_F &= s\ Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\mathrm{res}_F(b\ dt_1/t_1 \wedge \cdots \wedge dt_n/t_n)), \\ &= s\ Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(b) = 0\end{aligned}$$

b は任意なので、$p|s$ となることが必要である. また $(j_1, j_{,2}, \cdots, j_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$ ならば、$\mathrm{res}_F(b\ dt_1/t_1 \wedge \cdots \wedge dt_n/t_n) = 0$ が成り立つので、$(\alpha, \beta]_F = 0$ が成り立つ. 以上の議論から α は p 倍元であればよいことが分かる.

Case2. α が (2) の元で生成されている時. この時は ${\mathbb{F}_q}^{\times}$ が p-divisable ゆえ、ある θ' $(\in \mathbb{F}_q)$ が存在して $\theta = \theta'^p$ と表せるので、

$$(\{\theta, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\}, \beta]_F = p\ (\{\theta', t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\}, \beta]_F = 0$$

が任意の β で成り立つ. 従ってこの場合任意の β について $(\alpha, \beta]_F = 0$ が成り立つ.

Case3. α が (3) の元で生成されている時. $\alpha = s\ \{1 + at_n^{i_n} \cdots t_1^{i_1}, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\}$ $(s \in \mathbb{Z})$ と表せば、

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta]_F = s\ Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\mathrm{res}_F(\beta\ d(1 + at_n^{i_n} \cdots t_1^{i_1})/(1 + at_n^{i_n} \cdots t_1^{i_1}) \\ dt_1/t_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dt}_m/t_m \wedge dt_n/t_n)\ (1 \leq m \leq n).\end{aligned}$$

まず右辺の留数の計算において、分母に現れる $(1+at_n^{i_n}\cdots t_1^{i_1})$ は単数なので無視してよい. また、

$$d(1+at_n^{i_n}\cdots t_1^{i_1}) = a\ d(t_n^{i_n}\cdots t_1^{i_1})$$

$$\begin{aligned} d(t_n^{i_n}\cdots t_1^{i_1})/(t_n^{i_n}\cdots t_1^{i_1}) &= dt_n{}^{i_n}/t_n + \cdots + dt_1{}^{i_1}/t_1, \\ &= i_n dt_n/t_n + \cdots + i_1 dt_1/t_1, \end{aligned}$$

が成り立つ. $dt_i \wedge dt_i = 0 \quad (1 \le i \le n)$ に注意して計算すると

$$\begin{aligned} (\alpha,\beta]_F &= s\ Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\mathrm{res}_F(a\beta i_m t_n^{i_n}\cdots t_1^{i_1} dt_1/t_1 \wedge \cdots \wedge dt_n/t_n), \\ &= si_m\ Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\mathrm{res}_F(\beta a t_n^{i_n}\cdots t_1^{i_1} dt_1/t_1 \wedge \cdots \wedge dt_n/t_n), \end{aligned}$$

となる. 具体的に $\beta = bt_n^{j_n}\cdots t_1^{j_1}$ として計算すれば、

$$(\alpha,\beta]_F = si_m\ Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\mathrm{res}_F(abt_n^{i_n+j_n}\cdots t_1^{i_1+j_1} dt_1/t_1 \wedge \cdots \wedge dt_n/t_n).$$

となる. $(i_1,\cdots,i_n)$ と $(j_1,\cdots,j_n)$ の場合分けをしてさらに右辺を計算する. $(i_1,\cdots,i_n) \neq (-j_1,\cdots,-j_n)$ のとき、定義から右辺の留数の値は 0. 従ってこのとき右辺は 0 となる. 一方 $(i_1,\cdots,i_n) = (-j_1,\cdots,-j_n)$ のとき、

$$(\alpha,\beta]_F = si_m\ Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(ab)$$

となる. 右辺が任意の β で 0 となる、すなわち任意の b で 0 となるためには $p|si_m$ が成り立つか、任意の b で $Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(ab) = 0$ が成り立つことである. 前者の場合は $p \nmid i_m$ より $p|s$ となり、α は p 倍元であるであることが必要. 一方後者の場合は体論 ([FJ1, §2.12 系 1] 参照) より、任意の b で $Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(ab) = 0$ ならば $a = 0$ なので、このとき $\alpha = 0$ となる.

以上 **Case1, Case2, Case3** より、

$$(\alpha,\beta]_F = 0 \qquad (\forall\beta \in F)$$

が成り立つためには、$\alpha \in pK_n^{top}(F)$ となることが必要なことがわかった. 逆に $\alpha\ (\in K_n^{top}(F))$ が p 倍元のとき、線形性から任意の $\beta\ (\in F)$ に対して、$(\alpha,\beta]_F = 0\ (\forall\beta \in F)$ が成り立つことはすぐわかるので、$\alpha \in pK_n^{top}(F)$ という条件は十分条件でもあることが分かる. よって $K_n^{top}(F)/p$ 側の非退化性がわかった.

同様にして $F/\mathcal{P}(F)$ 側の非退化性を調べる. 任意の $\alpha\ (\in K_n^{top}(F))$ に対して $(\alpha,\beta]_F = 0$ をみたす、$\beta = bt_n^{j_n}\cdots t_1^{j_1}\ (\in F)$ を求める.

Case1. α が (1) の元の場合、 すなわち $\alpha = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ の場合を考える.

$$(\alpha,\beta]_F = Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\mathrm{res}_F(b\ t_n^{j_n}\cdots t_1^{j_1}\ dt_1/t_1 \wedge \cdots \wedge dt_n/t_n) = 0$$

となるのは、$(j_1,\cdots,j_n)\neq(0,\cdots,0)$ の時、右辺は留数の定義より 0 となることがわかる．また $(j_1,\cdots,j_n)=(0,\cdots,0)$ の時は

$$(\alpha,\beta]_F = Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(b\ dt_1/t_1\wedge\cdots\wedge dt_n/t_n) = Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(b)=0$$

となる．$Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(b)=0$ を満たす b は Hilbert90 より、$b=\lambda^\tau-\lambda\quad(\lambda\in\mathbb{F}_q,\ \tau\in Gal(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p))$ と表せる．ここで τ は Frobenius 写像であり $\lambda^\tau=\lambda^p$ が成り立つので $b=\lambda^p-\lambda\ \in\mathcal{P}(F)$ となることが分かる．

Case2．α が (2) の元の場合．$K_n^{top}(F)/p$ 側の非退化性の **Case2** の時同様に、${\mathbb{F}_q}^\times$ は p-divisable なので (2) の元はすべて p 倍元として表せる．したがって任意の β について、$(\alpha,\beta]_F=0$ が成り立つ．

Case3．α が (3) の元の場合．$K_n^{top}(F)/p$ 側の非退化性の **Case3** の時同様に、$\alpha=\{1+at_n^{i_n}\cdots t_1^{i_1},t_1,\cdots,\hat{t}_m,\cdots,t_n\}$, $\beta=bt_n^{j_n}\cdots t_1^{j_1}$ $(a,b\in\mathbb{F}_q)$ とおく．再び $K_n^{top}(F)/p$ 側の非退化性の **Case3** の時同様に計算すると、

$$(\alpha,\beta]_F = i_m\ Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\mathrm{res}_F(abt_n^{i_n+j_n}\cdots t_1^{i_1+j_1}dt_1/t_1\wedge\cdots\wedge dt_n/t_n).$$

となる．$(i_1,\cdots,i_n)\neq(-j_1,\cdots,-j_n)$ のとき、定義から留数の値は 0. 従ってこのとき右辺は 0 となる．一方 $(i_1,\cdots,i_n)=(-j_1,\cdots,-j_n)$ のとき、右辺の留数は ab となるから、任意の a に対して

$$(\alpha,\beta]_F = i_m\ Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(ab)=0$$

が成り立つためには、また $K_n^{top}(F)/p$ 側の非退化性の **Case3** の時と同様の議論によって、$b=0$ となる．

以上 **Case1**, **Case2**, **Case3** より、

$$(\alpha,\beta]_F=0\qquad(\forall\alpha\in K_n^{top}(F))$$

となるためには、$\beta\in\mathcal{P}(F)$ となることが必要なことが分かった．逆に $\beta\in\mathcal{P}(F)$ の時、補題 7.2 より $(\alpha,\beta]_F=0$ $(\forall\alpha\in W_m[F])$ が成り立つのでこれは十分条件でもある．以上から $F/\mathcal{P}(F)$ 側の非退化性も分かった． □

この定理より命題 4.3 から

$$K_n^{top}(F)/p^m \xrightarrow{\sim} (W_m[F]/\mathcal{P}W_m[F])^\vee$$

を得る．一方、Pontrjagin 双対性から、

$$Gal(F_{p^m}^{ab}/F)\cong(W_m[F]/\mathcal{P}W_m[F])^\vee$$

という同型が成り立つので、上とこの関係を合わせて

$$\psi_F^{p^m} : K_n^{top}(F)/p^m \longrightarrow (W_m[F]/\mathcal{P}W_m[F])^\vee \cong Gal(F_{p^m}^{ab}/F) \qquad a \longmapsto \psi_F^{p^m}(a) \longmapsto \sigma_a.$$

を得る．ただし 定理 6.14 により σ_a の元は任意の $W_m[F]$ の元 b に対して、

$$(a,b]_F = \sigma_a(x) - x$$

と特徴付けられる．なおここで x は、$x^{[p]} - x = b$ を満たす $W_m[F^{sep}]$ の元である．以上のことを statement にまとめると次の定理が得られる．

定理 7.6. 記号は上のとおりとする．このとき

$$\psi_F^{p^m} : K_n^{top}(F)/p^m \cong Gal(F_{p^m}^{ab}/F) \qquad a \longmapsto \sigma_a.$$

という同型が得られる．ただし σ_a は任意の $W_m[F]$ の元 b に対して、

$$(a,b]_F = \sigma_a(x) - x$$

と特徴付けられる．なおここで x は、$x^{[p]} - x = b$ を満たす $W_m[F^{sep}]$ の元である．

さらに F 上 p^m 次最大 Abel 拡大について次の図式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
K_n^{top}(F)/p^m \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & (W_m[F]/\mathcal{P}W_m[F])^\vee \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\lim_\rightarrow"] & Gal(F_{p^m}^{ab}/F) \arrow[d, "\lim_\leftarrow"] \\
K_n^{top}(F)/\bigcap_{1\le m} p^m \arrow[r, "\sim"] & \bar{W}[F]^\vee \arrow[r, "\sim"] & Gal(F_{(p)}^{ab}/F)
\end{tikzcd}$$

２段目の図式右側の同型は定理 6.17 による．また $\bar{W}[F] := \lim_\rightarrow(W_m[F]/\mathcal{P}W_m[F])$ である．系 3.21 より $\bigcap_{1\le m} p^m = \mathrm{Tor}K_n^{top}(F)$ であるから最終的に

$$\psi_F^{(p)} : K_n^{top}(F)/\mathrm{Tor}K_n^{top}(F) \cong Gal(F_{(p)}^{ab}/F)$$

という同型が得られる．

8 高次元局所類体論の証明

8.1 主定理の証明

まず $Gal(F(\sqrt[q-1]{\theta})/F)$ で写像が compatible なことを見てみる．valuation map v_F の性質から $\{t_1, \cdots, t_n\}$ から生成されない $K_n^{top}(F)$ の元 α に対して命題 3.13 より $v_F(\alpha) = 0$ であったので、$\alpha = \{t_1, \cdots, t_n\}$ で写像が compatible なことを確認すればよい.

$$\begin{gathered}\psi_F^v : K_n^{top}(F) \longrightarrow Gal(\mathbb{F}_q^{ab}F/F) \longrightarrow Gal(F(\sqrt[q-1]{\theta})/F) \\ \{t_1, \cdots, t_n\} \longmapsto Fr \longmapsto Fr|_{F(\sqrt[q-1]{\theta})} = Fr_1.\end{gathered}$$

$F(\sqrt[q-1]{\theta})/F$ は F 上 $q-1$ 次巡回拡大. Fr_1 は $Gal(F(\sqrt[q-1]{\theta})/F)$ の generator ゆえ, $Fr_1(\sqrt[q-1]{\theta}) = \zeta_{q-1}\sqrt[q-1]{\theta}$ (ただし ζ_{q-1} は 1 の原始 $q-1$ 乗根) となる.
一方、Kummer pairing の方で考えると、

$$\psi_F^{q-1} : K_n^{top}(F) \longrightarrow Gal(F(\sqrt[q-1]{\theta})/F) \qquad \alpha = \{t_1, \cdots, t_n\} \longmapsto \sigma_\alpha.$$

σ_α の特徴づけより、$\beta = \theta$ を取って

$$(\alpha, \theta)_F = t_F(\{t_1, \cdots, t_n, \theta\}) = \sigma_\alpha(\sqrt[q-1]{\theta})/\sqrt[q-1]{\theta}.$$

が成り立つ. 左辺の元の位数は $q-1$ なので、

$$\sigma_\alpha(\sqrt[q-1]{\theta}) = \zeta_{q-1}\sqrt[q-1]{\theta}.$$

互いに同じ作用を与えることがわかるので compatible である.

つづいて $Gal(\mathbb{F}_{q(p)}^{ab}F/F)$ で写像が compatible なことをみる. $Gal(\mathbb{F}_{q(p)}^{ab}F/F) = \lim_{\leftarrow} Gal(\mathbb{F}_{q^n}F/F)$ なので、最初に p 次拡大の場合、つまり $Gal(\mathbb{F}_{q^p}F/F)$ で compatible なことをみる. まずは ψ_F^v の側から考える. $Gal(F(\sqrt[q-1]{\theta})/F)$ の時と同様に $\alpha = \{t_1, \cdots, t_n\}$ について調べればよい.

$$\begin{gathered}\psi_F^v : K_n^{top}(F) \longrightarrow Gal(\mathbb{F}_q^{ab}F/F) \longrightarrow Gal(\mathbb{F}_{q^p}F/F) \\ \{t_1, \cdots, t_n\} \longmapsto Fr \longmapsto Fr|_{Gal(\mathbb{F}_{q^p}F/F)} = Fr_2.\end{gathered}$$

と Fr_2 を定義する. 有限体の理論より $\mathbb{F}_{q^p}F$ は F に $\mathbb{F}_q$ 上多項式 $x^{q^p} - x$ の根を添加した拡大体であるから 1 の原始 $q^p - 1$ 乗根を ζ_{q^p-1} とおくと、 $F(\zeta_{q^p-1})$ となる.$\mathbb{F}_{q^p}F/F$

は p 次巡回拡大で、$Gal(\mathbb{F}_{q^p}F/F)$ の generator は Fr_2 である. 具体的な Fr_2 の作用は、$Fr_2(\zeta_{q^p-1}) = {\zeta_{q^p-1}}^q$ で与えられる.

一方 θ を $\mathbb{F}_q^\times$ の generator とするとき、Artin-schreier map から得られる

$$\psi_F^p : K_n^{top}(F)/p \longrightarrow Gal(F_p^{ab}/F) \qquad \alpha = \{t_1, \cdots, t_n\} \longmapsto \sigma_\alpha$$

は $x^p - x = \theta$ の根 a に対してするとき、$\sigma_\alpha(a) - a = (\alpha, \theta]_F$ を満たすものである. ところで標数 p の体について次のことが成り立つことが知られている. ([FJ1, §3.6] 参照)

定理 8.1. F を標数 p の体とする. このとき F に $a \neq a'^p - a'$ となる F 係数方程式 $x^p - x = a$ の根 α を添加した体 $F(\alpha)$ は F 上 p 次巡回拡大であり、$Gal(F(\alpha)/F)$ の generator を τ とすれば $\tau(\alpha) = \alpha + b$ である. ただし b は $\mathbb{F}_p^\times$ の元である. 逆に任意の F 上 p 次巡回拡大は F に上の方程式の根を添加した拡大体と同型になる.

したがって、$F(a)/F$ は p 次巡回拡大であり、σ_α は $Gal(F(a)/F)$ の generator である. それでは具体的に σ_α の作用を計算しよう. まず $(\alpha, \theta]_F$ の値は

$$\begin{aligned}(\alpha, \theta]_F &= \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\theta dt_1/t_1 \wedge \cdots \wedge dt_n/t_n), \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\theta).\end{aligned}$$

となる. $q = p^m$ とおけば、$\theta^q = 1$ より

$$(\theta^p - 1)(\theta^{p^{m-1}} + \theta^{p^{m-2}} + \cdots + \theta^p + 1) = 0$$

が成り立つ. $\theta^p - 1 \neq 0$ であるから、θ の最小多項式は

$$(\theta^{p^{m-1}} + \theta^{p^{m-2}} + \cdots + \theta^p + 1) = 0$$

である. したがってトレースの値は $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\theta) = -1$ となることが分かる. よって $\sigma_\alpha(a) = a - 1$ である. つづいて a が位数 $q-1$ であり、a に σ_α を作用させた時と、Fr_2 を作用させた時が一致することをみる. a を p 冪倍させていくと、$a^p - a = \theta$ が成り立つ

ので帰納的に計算され

$$
\begin{aligned}
a^p &= a+\theta. \\
a^{p^2} &= a^p+\theta^p = a+\theta+\theta^p. \\
a^{p^3} &= a^p+\theta^p+\theta^{p^2} = a+\theta+\theta^p+\theta^{p^2}. \\
\vdots \quad & \qquad\qquad \vdots \\
a^q = a^{p^m} &= a^p+\theta^p+\cdots+\theta^{p^{m-1}} = a+\theta+\theta^p+\cdots+\theta^{p^{m-1}}, \\
&= a+\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\theta) = a-1.
\end{aligned}
$$

となることがわかる. よって a を q 冪倍させていくことにより、

$$
\begin{aligned}
a^q &= a-1 \neq a. \\
a^{q^2} &= a^q-1 = a-2 \neq a. \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
a^{q^p} &= a-p = a.
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 以上から、a は $a^{q^p-1}=1$ を満たすので位数は q^p-1. かつ

$$Fr_2(a) = a^q = a-1 = \sigma_\alpha(a)$$

が成り立つことが分かるので、$F(a)=F(\zeta_{q^p-1})$ となることがわかる. 以上の議論から p 次拡大の時も写像 ψ_F^v と ψ_F^p が compatible なことが分かった. 任意の p 冪次拡大についても同様に具体的に計算していけば示すことができるので省略する.

以上から、セクション 4 の議論より $K_n^{top}(F)$ から $Gal(F^{ab}/F)$ へ写像を作ることができることがわかった. その写像を ψ_F と表すことにする. ψ_F を相互写像と呼ぶ. 相互写像は、定理 5.3、定理 7.6、valuation map の性質から、単射・準同型・image は dense であることがわかる. 以上まとめると、

定理 8.2 (高次元局所類体論の主定理)**.** F を n 次元局所体. $K_n^{top}(F)$ を n 次位相的 Milnor K-group. ψ_F を相互写像とする時

$$\psi_F : K_n^{top}(F) \longrightarrow Gal(F^{ab}/F)$$

は単射・準同型・image は dense である.

8.2 Norm 群と相互写像の関係

これから、相互写像と有限次 Abel 拡大の K 群の Norm 群との関係について見ていくことにする. 省略している部分などは [F2] 参照のこと.

定理 8.3. F を n 次元局所体. L を F 上有限次 Abel 拡大とするとき、次の列は完全列である.

$$K_n^{top}(L) \xrightarrow{N_{L/F}} K_n^{top}(F) \xrightarrow{\psi_F} Gal(L/F) \longrightarrow 0$$

すなわち相互写像によって引き起こされる対応

$$K_n^{top}(F)/N_{L/F}K_n^{top}(L) \xrightarrow{\psi_F} Gal(L/F)$$

は同型写像である.

証明. Galois 群の構造を考えることにより、L が purely unramified の時、Kummer 拡大の時、Artin-Schreier-Witt 拡大 (p 冪次巡回拡大) の時、定理が成り立つことを示せばよい. $[L:F]=l$ とおく.

Case . L/F が purely unramified 拡大の時、$L=F(\zeta_{q^l-1})$ である. $j_{F/L}(K_n^{top}(F)) \subseteq K_n^{top}(L)$ であるから、$N_{L/F}K_n^{top}(L) \supseteq lK_n^{top}(F)$ がわかる. $K_n^{top}(L)$ の生成元は、定理 3.17 より

(1) $\{t_1, \cdots, t_n\}.$

(2) $\{\theta, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\} \qquad \theta \in \mathbb{F}_{q^l}^\times \ (1 \le m \le n).$

(3) $\{1+\theta t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n}, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\}. \qquad i_j \in \mathbb{Z} \ (1 \le j \le n)$

である. なおここで $t_1, \cdots, t_n$ は F の局所パラメータ系である. 一方 $K_n^{top}(F)$ の生成元は、定理 3.17 より

(1) $\{t_1, \cdots, t_n\}.$

(2) $\{\theta, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\} \qquad \theta \in \mathbb{F}_q^\times \ (1 \le m \le n).$

(3) $\{1+\theta t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n}, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\} \qquad \theta \in \mathbb{F}_q^\times \ (1 \le m \le n).$

である. それぞれの $K_n^{top}(L)$ の生成元の Norm を取れば、(1) について、

$$N_{L/F}(\{t_1, \cdots, t_n\}) = l\{t_1, \cdots, t_n\}$$

が成り立つ．(2) について

$$N_{L/F}(\{\theta, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\} = \{N_{L/F}(\theta), t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\}$$

となり、体の Norm 写像は全射なので、$K_n^{top}(F)$ の (2) の生成元は、$K_n^{top}(L)$ の Norm 群から生成されることがわかる．最後に (3) について

$$N_{L/F}(\{1+\theta t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n}, t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\}) = \{N_{L/F}(1+\theta t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n}), t_1, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\}$$

$$N_{L/F}(1+\theta t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n}) = 1 + Tr_{L/F}(\theta) t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n} + \cdots$$

となり、有限体の拡大体の trace 写像は全射なので、$K_n^{top}(F)$ の (3) の生成元は、$K_n^{top}(L)$ の Norm 群から生成されることがわかる．以上の計算から、$K_N^{top}(F)/N_{L/F}K_n^{top}(L)$ の代表元として、

$$k\{t_1, \cdots, t_n\} \qquad (1 \leq k \leq l)$$

が取れる．L/F が purely unramified の時

$$\psi_F^v : K_n^{top}(F) \longrightarrow Gal(L/F) \qquad \{t_1, \cdots, t_n\} \longmapsto Fr$$

であったから、

$$\psi_F : K_N^{top}(F)/N_{L/F}K_n^{top}(L) \longrightarrow Gal(L/F)$$

は同型写像となる．ゆえに purely unramified のとき定理が成り立つことが示された．

Case ．つづいて L/F が purely unramified でない Kummer 拡大の時を考える、つまり $l|q-1(\neq p)$ となる時である．したがって $l = q-1$ のとき成り立つことがいえればよい．このとき L は完備離散付値体の理論から、F の local parameter を用いて $L = F(\sqrt[q-1]{t_i})$ となる．Norm 群を計算すると、$N_{L/F}K_n^{top}(L) \supseteq (q-1)K_n^{top}(F)$ が成り立つ．一方 F の主単数群 $\mathcal{V}_F$ は $(q-1)$-divisable なので、$\mathcal{V}K_n^{top}(F) \subseteq (q-1)K_n^{top}(F) \subseteq N_{L/F}K_n^{top}(L)$ が成り立つ．従って、$K_n^{top}(F)$ の生成元のうち、(3) の元は Norm 部分群に含まれていることがわかった．purely unramified の時と同様に、他の (1), (2) の生成元が Norm 群から生成されるかどうか実際計算してみると、

$$N_{L/F}(\{t_1, \cdots, \sqrt[q-1]{t_i}, \cdots, t_n\}) = \{t_1, \cdots, t_i, \cdots, t_n\}$$

が成り立つので、$K_n^{top}(F)$ の (1) の生成元は Norm 群から生成されていることがわかる．また $m \neq i$ の時は、

$$N_{L/F}(\{\theta, t_1, \cdots, \sqrt[q-1]{t_i}, \cdots, \hat{t}_m, \cdots, t_n\}) = \{\theta, t_1, \cdots, t_i, \cdots, t_m, \cdots, t_n\}$$

が成り立ち、$m=i$ の時は、

$$N_{L/F}(\{\theta,t_i,\cdots,\hat{t}_i,\cdots,t_n\})=l\{t_1,\cdots,\hat{t}_i,\cdots,t_n\}$$

が成り立つ．従って、$K_n^{top}(F)/N_{L/F}K_n^{top}(L)$ の代表元として、

$$k\{\theta,t_1,\cdots,\hat{t}_i,\cdots,t_n\}\qquad(1\le k\le q-1)$$

が取れることがわかる．L/F が Kummer 拡大の時の相互写像を考えて、

$$\psi_F^{q-1}:K_n^{top}(F)/N_{L/F}K_n^{top}(L)\longrightarrow Gal(L/F)\qquad\alpha=\{\theta,t_1,\cdots,\hat{t}_i,\cdots,t_n\}\longmapsto\sigma_\alpha$$

σ_α の作用は、写像の特徴づけより

$$\sigma_\alpha(\sqrt[l]{t_i})/\sqrt[l]{t_i}=(\alpha,t_i)_F=\zeta_{q-1}$$

が成り立つので、上の写像は同型写像である．ゆえに Kummer 拡大のとき定理が成り立つことが示された．

Case ．L/F が Artin-Schreier-Witt 拡大のとき、まず最初に L/F は p 次巡回拡大のとき、すなわち Artin-Schreier 拡大のときに成り立てば、p 冪次巡回拡大の時も定理が成り立つことを示そう．$l=p^m$ $(m>0)$ とする．m についての帰納法で示す．m 未満のとき定理が成り立つと仮定する．このとき中間体 M として、$[L:M]=l,[M:F]=l^{m-1}$ となる L/M,M/F が巡回拡大となるものをとる．

$$\begin{tikzcd}
K_n^{top}(L) \arrow[r, "N_{L/M}"] \arrow[d, "id"] & K_n^{top}(M) \arrow[r, "\psi_M"] \arrow[d, "N_{M/F}"] & Gal(L/M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
K_n^{top}(L) \arrow[r, "N_{L/F}"] \arrow[d, "N_{L/M}"] & K_n^{top}(F) \arrow[r, "\psi_F"] \arrow[d, "id"] & Gal(L/F) \arrow[d] & \\
K_n^{top}(M) \arrow[r, "N_{M/F}"] & K_n^{top}(F) \arrow[r, "\psi_F"] & Gal(M/F) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

このとき帰納法の仮定より、次の可換図式の上段の $Gal(L/M)$ と下段 $Gal(M/F)$ の項は完全である．従って中段の $Gal(L/F)$ の項も完全となる．ゆえに p 次巡回拡大 L/F について定理が成り立つことを言えればよい．この場合も、purely unramified や Kummer の時のように Norm 群を計算してやればよいので、証明は省略する． $\square$

8.3 存在定理

つづいて類体論で重要な定理の一つ存在定理を示すために必要な補題を示そう.

補題 8.4. F を n 次元局所体とする.$\mathcal{N}$ を $K_n^{top}(F)$ の素数位数の部分群とするとき、ある F 上有限次 Abel 拡大 L が存在して、 $\mathcal{N}_L \subseteq \mathcal{N}$ が成り立つ. ここで $\mathcal{N}_L$ は $\mathcal{N}_L := N_{L/F}K_n^{top}(L)$ である.

証明. $[K_n^{top}(F) : \mathcal{N}] = l$ とする. このとき $lK_n^{top}(F) \subseteq \mathcal{N}$ が成り立つ. l の値によって場合を分けて考える.

Case . $l|q-1$ のとき、$L = F(\sqrt[q-1]{F^\times})$ とおく. 定理 5.3 より、Kummer pairing から引き起こされる同型写像から

$$K_n^{top}(F)/q-1 \simeq Gal(L/F)$$

であり、また先ほどの定理 8.3 より、

$$(q-1)K_n^{top}(F) = N_{L/F}K_n^{top}(L) = \mathcal{N}_L$$

が成り立つ. 従って、

$$\mathcal{N}_L = (q-1)K_n^{top}(F) \subseteq lK_n^{top}(F) \subseteq \mathcal{N}$$

が成り立つので、この場合は補題が成り立つ.

Case . $l \nmid p(q-1)$ のとき、$M = F(\zeta_l)$ とする. $[M : F] = m$ とすれば、$m|l-1$ である. このとき M には 1 の原始 q^m-1 乗根 が含まれているので、$l|q^m-1$ が成り立つことを注意しておく. $L = M(\sqrt[q^m-1]{M^\times})$ とすれば、M について Kummer pairing を考えることにより、

$$K_n^{top}(M)/q^m-1 \simeq Gal(L/M)$$

という同型を得る. L/M は有限次拡大なので、定理 8.3 より

$$N_{L/M}K_n^{top}(L) = (q^m-1)K_n^{top}(M)$$

が成り立つことがわかる. この両辺に $N_{M/F}$ をとれば Norm の連鎖律より、

$$N_{L/F}K_n^{top}(L) \subseteq (q^m-1)K_n^{top}(F) \subseteq lK_n^{top}(F) \subseteq \mathcal{N}$$

が成り立つ. 従ってこの場合も補題が成り立つ.

Case 　. $l=p$ のとき、$pK_n^{top}(F)\subseteq\mathcal{N}$ より、Artin-Schreier pairing

$$(\ ,\ ]_F : K_n^{top}(F)/p\times F/\mathcal{P}(F)\longrightarrow\mathbb{Z}/p$$

における $\mathcal{N}$ の annihilater x $(\in F/\mathcal{P}(F))$ を見つけることができると仮定する. このとき、Artin-Schreier pairing から引き起こされる同型写像から、任意の $\alpha\in\mathcal{N}$ に対して、

$$\psi_F^p : K_n^{top}(F)/p\longrightarrow Gal(F_p^{ab}/F)\qquad \alpha\longmapsto\sigma_\alpha$$

σ_α の特徴づけから、

$$\sigma_\alpha(\gamma)-\gamma=(\alpha,x]_F=0$$

(ただし γ は $\gamma^p-\gamma=x$ を満たす) となるから、$\sigma_\alpha=id\in Gal(F(\gamma)/F)$ である. $M=F(\gamma)$ とすれば、定理 8.1 より M/F は p 次巡回拡大ゆえ、定理 8.3 より

$$\psi_F : K_n^{top}(F)/N_{M/F}K_n^{top}(M)\simeq Gal(M/F)$$

である. 任意の $\alpha\in\mathcal{N}$ に対して、上の同型写像で $\sigma_\alpha=id\in Gal(M/F)$ であったから、$\mathcal{N}\subseteq N_{M/F}K_n^{top}(M)$ となることがわかる. 群の指数をみると、

$$p=[K_n^{top}(F):N_{M/F}K_n^{top}(M)]\leq[K_n^{top}(F):\mathcal{N}]=p$$

が成り立つので、$N_{M/F}K_n^{top}(M)=\mathcal{N}$ となり、この場合も補題が成り立つ. 以上の議論から $\mathcal{N}$ の annihilater が存在することを示せばよいがここでは省略する. ([F2, Proposition 4.2] 参照) □

補題 8.5. $\mathcal{N}$ を $K_n^{top}(F)$ の有限指数部分群とする. このとき ある F 上有限次 Abel 拡大 L が存在して、$\mathcal{N}_L\subseteq\mathcal{N}$ が成り立つ.

証明. $[K_n^{top}(F):\mathcal{N}]=m$ とする. m がある素数冪の場合に補題が成り立つことを示せばよい. なぜなら $m=lk$ $((l,k)=1)$ の時、$K_n^{top}(F)/\mathcal{N}$ の元の中で位数が l の $\alpha\mathcal{N}$ をとると、α と $\mathcal{N}$ で生成される部分群を M とすれば、$m=lk=[K_n^{top}(F):M][M:\mathcal{N}]$ となるが、$[M:\mathcal{N}]=l$ より $[K_n^{top}(F):M]=k$ となり M も有限指数部分群となるからである. l を素数とし、$m=l^N$ とおく. $N=1$ の時は補題 8.4 である. それでは、補題が成り立つことを N についての帰納法で示そう. N 未満の時に補題が成り立つ仮定する. 先ほどの議論を使えば、$\mathcal{N}$ を含む指数 l^{N-1} の部分群 $\mathcal{N}_1$ が存在する. 帰納法の仮定より F 上有限次拡大 L_1 で $\mathcal{N}_{L_1}\subseteq\mathcal{N}_1$ となるものが存在する. $N_{L_1/F}^{-1}(\mathcal{N})$ は $K_n^{top}(L_1)$ の部分群であり、$\mathcal{N}\subseteq N_{L_1/F}K_n^{top}(L_1)\subseteq\mathcal{N}_1$ となるから $[K_n^{top}(L_1):N_{L_1/F}^{-1}(\mathcal{N})]=l$ or 1 である. よって帰納法の仮定から、L_1 上有限次 Abel 拡大 L で、$N_{L/L_1}K_n^{top}(L)\subseteq N_{L_1/F}^{-1}(\mathcal{N})$ を満たすものが存在する. 両辺に $N_{L_1/F}$ をとって、$N_{L/F}K_n^{top}(L)\subseteq\mathcal{N}$ となる. □

定理 8.6 (存在定理)**.** $Ab(F)$ をすべての F 上有限次 Abel 拡大体からなる集合. $N(F)$ をすべての $K_n^{top}(F)$ の有限指数部分群からなる集合とする. このとき、

$$Ab(F) \longrightarrow N(F) \qquad L \longmapsto \mathcal{N}_L = N_{L/F}K_n^{top}(L)$$

という写像は全単射である. さらに次のことも成り立つ.

(1) $$L_1 \subseteq L_2 \Longleftrightarrow \mathcal{N}_{L_1} \supseteq \mathcal{N}_{L_2}.$$

(2) $$\mathcal{N}_{L_1L_2} = \mathcal{N}_{L_1} \cap \mathcal{N}_{L_2}.$$

(3) $$\mathcal{N}_{L_1\cap L_2} = \mathcal{N}_{L_1} + \mathcal{N}_{L_2}.$$

証明. まず (2) について示そう.

$$\mathcal{N}_{L_1L_2} = N_{L_1L_2}K_n^{top}(L_1L_2) \subseteq N_{L_1}K_n^{top}(L_1) = \mathcal{N}_{L_1}$$

が成り立つので、$\mathcal{N}_{L_1L_2} \subseteq \mathcal{N}_{L_1} \cap \mathcal{N}_{L_2}$ が成り立つ. F 上有限次 Abel 拡大 L に対して、主定理から導かれる全射準同型写像 (kernel は $N_{L/F}K_n^{top}(L)$) を

$$(\ ,L/F) : K_n^{top}(F) \longrightarrow Gal(L/F)$$

で表せば、任意の $\alpha \in \mathcal{N}_{L_1} \cap \mathcal{N}_{L_2}$ に対して、$(\alpha, L_1L_2)|_{L_i} = id_{L_i}\ \ i = 1$ or 2 が成り立つので、$(\alpha, L_1L_2) = id_{L_1L_2}$. よって、

$$\mathcal{N}_{L_1L_2} = \mathcal{N}_{L_1} \cap \mathcal{N}_{L_2}$$

が成り立つ. 従ってこの関係から、

$$\begin{aligned} L_1 \subseteq L_2 &\Longleftrightarrow \mathcal{N}_{L_1L_2} = \mathcal{N}_{L_1} \cap \mathcal{N}_{L_2} = \mathcal{N}_{L_2} \\ &\Longleftrightarrow [L_1L_2 : F] = [L_2 : F] \\ &\Longleftrightarrow L_1 \subseteq L_2 \end{aligned}$$

が成り立つ. ゆえに (1) が示された. さらにこの関係より $L \longmapsto \mathcal{N}_L$ という対応が単射であることもわかる. つづいて上の対応が全射であることを示そう. $\mathcal{N}$ を任意の $K_n^{top}(F)$ の有限指数部分群とする. このとき補題 8.5 より、F 上有限次 Abel 拡大 L で、$\mathcal{N}_L \subseteq \mathcal{N}$ を満たすものが存在する. $(\mathcal{N}, L/F)$ は $Gal(L/F)$ の部分群であるから、Galois 理論より $(\mathcal{N}, L/F)$ の不変体 L' が存在して、 $(\mathcal{N}, L/F) = Gal(L/L')$ となる. $\mathcal{N}$ は、

$$(\ ,L'/F) : K_n^{top}(F) \longrightarrow Gal(L'/F)$$

の Kernel ゆえ $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{L'}$ となる. したがって全射であることもわかった. 最後に $L_1 \cap L_2 \subseteq L_i\ \ (i = 1, 2)$ より $\mathcal{N}_{L_1\cap L_2} \supseteq \mathcal{N}_{L_i}$ となる. よって $\mathcal{N}_{L_1\cap L_2} \supseteq \mathcal{N}_{L_1} + \mathcal{N}_{L_1}$ が

成り立つ．一方 $\mathcal{N}_{L_1} + \mathcal{N}_{L_1}$ は有限指数部分群なので、上の対応が全射であることから F 上ある Abel 拡大体 L を用いて、$\mathcal{N}_L = \mathcal{N}_{L_1} + \mathcal{N}_{L_1}$ と表せる．$\mathcal{N}_L \supseteq \mathcal{N}_{L_i}$ $(i = 1, 2)$ より $L \subseteq L_1 \cap L_2$ であるから、

$$\mathcal{N}_{L_1} + \mathcal{N}_{L_1} = \mathcal{N}_L \supseteq \mathcal{N}_{L_1 \cap L_2}$$

が成り立つ．以上から

$$\mathcal{N}_{L_1 \cap L_2} = \mathcal{N}_{L_1} + \mathcal{N}_{L_2}$$

となる． □

この存在定理は次の位相を $K_n^{top}(F)$ に導入すればよいことを示唆している．

定義 8.7 (ノルム位相)**.** $K_n^{top}(F)$ の任意の元 α に対して、

$$\{\alpha + \mathcal{N}_L\}_{L \in Ab(F)}$$

を α の基本近傍系とする位相を $K_n^{top}(F)$ に入れる．存在定理よりこの位相で $K_n^{top}(F)$ は位相群となる．この位相をノルム位相という．

ノルム位相の性質を示す命題を述べることにしよう．

命題 8.8 (ノルム位相の性質)**.** $K_n^{top}(F)$ にノルム位相が入っているものとする．このとき次のことが成り立つ．

(1) $K_n^{top}(F)$ の開部分群と有限指数閉部分群は一致する．

(2) L/F を有限次 Abel 拡大とするとき、K 群のノルム写像は連続写像.

(3) $K_n^{top}(F)$ はノルム位相で Hausdorff $\Longleftrightarrow \displaystyle\bigcap_{L \in Ab(F)} \mathcal{N}_L = \{0\}$.

証明は容易に確かめられるので省略する．なお (3) の右辺は実際成り立つので、この位相で $K_n^{top}(F)$ は Hausdorff である．今までの議論から高次元局所類体論の主定理はつぎのように表現される．

定理 8.9 (高次元局所類体論の主定理)**.** F を n 次元局所体．$K_n^{top}(F)$ をノルム位相の入った位相的 Milonor K-group とする．このとき相互写像 ψ_F は

$$\psi_F : K_n^{top}(F) \longrightarrow Gal(F^{ab}/F)$$

は単射連続な準同型写像でその image は dense となる．

証明. 連続性のみ示せばよい．Krull 位相より $Gal(F^{ab}/F)$ の開集合は、ある F 上有限次拡大体 L を用いて、$Gal(F^{ab}/L)$ と表せる．$N = \psi_F^{-1}(Gal(F^{ab}/L))$ とおくと、$N = N_{L/F}K_n^{top}(L)$ であるから、ψ_F は連続写像である． □

参考文献

[B1] Higher K-theories,edited by H. Bass, Lecture notes in mathematics 341, Springer-Verlag (1973).

[FK1] I. B. Fesenko, M. Kurihara, Invitation to higher local fields. Geometry and Topology monographs vol. 3 Geometry and Topology Publications. International Press (2000). http://www.msp.warwick.ac.uk./gt/gtmcontents3.htm/

[F1] I. B. Fesenko, Class field theory of multidimensional local fields of characteristic zero, with residue field of positive characteristic , St.Petersburg Math. J.3 (1992) 649–678

[F2] I. B. Fesenko, Mulutidimensional local class field theory , St.Petersburg Math J.3 (1992) 1103–1126

[F3] I. B. Fesenko, Abelian extensions of complete discrete valuation fields, Paris 1993/94, Cambridge Univ. Press, (1996), 47–74.

[FV1] I. B. Fesenko and S. Vostokov, Local Fields and Their Extensions, 2nd ed, Providence.R.I,Translations of mathematical monographs vol 121 (2002).

[H1] M. Hazewinkle, Local class field theory is easy, Advances in Mathematics, 18, (1975), 148–181.

[KAP1] S. Kaplan, Extensions of the Pontrjagin duality : Direct and inverse sequences, Duke Math. J, 17 (1950), 419–435.

[K1] K. Kato, A generalization of local class field theory by using K-groups I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA 26 No.2, (1979) 303–376.

[K2] K. Kato, A generalization of local class field theory by using K-groups II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA 27 (1980), 603–683.

[K3] K. Kato, A generalization of local class field theory by using K-groups , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA 29, (1982), 31–43.

[KS1] Y. Kawada, I. Satake, Class formations , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. . 7 (1956).

[Ko1] Y. Koya, A generalization of class formation by using hypercohomology, Invent. Math.101, (1990), 705–715

[L1] V. G. Lomadze, On the ramification theory of two-dimensional local fields, Math USSR Sb, 37 (1980).

[L2] V. G. Lomadze, On residues in algebraic geometry, USSR Izv, 19 (1982).

[LT1] J.Lubin and J.Tate, Formal complex multiplication in local fields, Ann. Math, 81, (1965), 380–387.

[MZ1] A. I. Madunts and I. B. Zhukov, Multidimensional complete fields: topology and other basic constructions, Trudy S.-Peterb. Mat. Obshch. (1995); English translation in Amer. Math. Soc. Transl. (Ser. 2) 165 (1995), 1–34.

[NE1] J. Neukirch, Class field theory, Springer. Berlin. (1986)

[P1] A. N. Parshin, Class field theory, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 3, (1985), 157–185.

[P2] A.N.Parshin, On the arithmetic of two-dimensional schemes. Distributions and residues, Math. USSR. Izvestija, vol 10, No.4 (1976).

[RA] W. Raskind, Abelian class field theory of arithemetic schemes , K-theory and Algebraic Geometry Connections with Quadratic Forms and Division algebras, Proceeding of Symposia in Pure Mathematics, 58.1, (1995).

[Se1] J. P. Serre, Local fields, (GTM 67), Springer-Verlag, (1980).

[Se2] J. P. Serre, Galois Cohomology, 2nd edition, (Springer Mongraphs in Mathematics), Springer-Verlag, (2002).

[V.Z1] S.V.Vostokov, I.B.Zhukov, Some approaches to the construction of abelian extensions for p-adic fields, Amer. Math. Soc. Transl. (2)vol.166 (1995).

[A.M1] 足立恒雄, 三宅克哉, 類体論講義 (日評数学選書), 日本評論社 (1998).

[BR] ブルバキ, 位相 1–6 森毅編 森毅, 清水達雄訳, 東京書籍 (1968,1969).

[FJ1] 藤崎源次郎, 体と Galois 理論 , , (岩波基礎数学), 岩波書店, (1977,1978).

[IH1] 伊原康隆, ある p 進完備な関数体についての問題, 数理解析研究所講究録, 41, (1968) 7–17.

[IS1] 伊原康隆, 斎藤毅, 昭和６３年度日本数学会春季賞加藤和也氏の業績紹介講演記録, 数学, 岩波書店, (1988), 338–343.

[I1] 岩澤健吉, 局所類体論, (数学選書) 岩波書店, (1980).

[KA1] 加藤和也, 類体論の一般化, 数学, 岩波書店, (1988), 289–311.

[KA2] 加藤和也, 代数的 K 理論ーその整数論的側面ー, 数学, 岩波書店, (1982), 97–115.

[KKS1] 加藤和也, 黒川信重, 斎藤毅, 数論２ ー類体論とはー, 岩波講座現代数学の基礎, 岩波書店, (1998).