$GL(n,\mathbb{R})$ 上の Whittaker 関数の明示公式について

佐々木 万喜夫

平成 22 年 3 月 16 日

概 要

本修士論文は n 次実一般線形群 $GL(n,\mathbb{R})$ 上の Whittaker 関数の明示公式に関する論文 [4] の総合報告である．この論文ではクラス 1 Whittaker 関数と基本 Whittaker 関数と呼ばれる 2 種類の重要な Whittaker 関数の帰納的な明示公式を与えている．

この論文以前の結果というのは $GL(n,\mathbb{R})$ 上の Whittaker 関数を $GL(n-2,\mathbb{R})$ 上のもので表すという少し不自然な形であった (クラス 1 の場合を Stade[8, THEOREM 3.1.(a)]; 基本の場合を Ishii[3, THEOREM 3] がそれぞれ示してある)．この論文ではそれを $GL(n-1,\mathbb{R})$ 上のものでより自然に表せることを示している．ここでは実数体 $\mathbb{R}$ を考えているが p 進体 $\mathbb{Q}_p$ では既に成り立つことが知られていた (Shintani[5])．また $\mathbb{R}$ と複素数体 $\mathbb{C}$ の間の自然な関係も知られている (Stade[7, Proposition 2.1])．

まずクラス 1 Whittaker 関数を求めたい理由として次のことが挙げられる．$SL(2,\mathbb{Z})$ の古典的保型形式 f がその周期性から Fourier 展開

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k(f) q^k \qquad (z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0,\ q = e^{2\pi i z})$$

をもつことはよく知られている．これと同様に $GL(n,\mathbb{R})$ 上の保型形式 φ も重複度 1 定理から Fourier-Whittaker 展開

$$\varphi(z) = \sum_{k} a_k(\varphi) W_{n,a}(k,\ z)$$

をもつ (J.Shalika, 1974; I.I.Piatetski-Shapiro, 1975)．ここで現れた $W_{n,a}$ がクラス 1 Whittaker 関数である．したがってクラス 1 Whittaker 関数は $GL(n,\mathbb{R})$ 上の保型形式の理論の中で重要な役割をもっているといえる．また基本 Whittaker 関数は Whittaker 関数のなす空間の基底になっている．

$GL(n,\mathbb{R})$ 上の Whittaker 関数は 1967 年に Jacquet により導入された．Jacquet はより一般に簡約群上で定義したのだが, なぜこのような関数を Whittaker 関数と呼ぶのかというと $n=2$ のときの Whittaker 関数が本質的に古典的な Whittaker 関数に一致し, 一般化とみなせたからである．古典的な Whittaker 関数とは Whittaker 自身が定義した微分方程式

$$W''(z) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{z^2}\right) W(z) = 0$$

の解 $W_{k,\nu}(z)$ のことである．ここで $\nu,\ z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{R}$ とする．この方程式は超幾何合流型とよばれ, 無限遠点 $z = \infty$ に不確定特異点をもつ．これと同様に $GL(n,\mathbb{R})$ 上のクラス 1 Whittaker 関数の満たす微分方程式も不確定特異点をもつ．一般に不確定特異点での挙動を調べることは難しい問題であるが, この場合は主定理を用いればその挙動を知ることができる．

謝辞

本修士論文を書くに至るまで多忙ななか親切に御指導下さった雪江明彦先生に深く感謝致します. また同じセミナーで共に学んできた田嶋和明先輩, 奈良忠央先輩, 五十嵐健太君, 小島聡史君, 田中修平君, 山田洋輔君, 靳暁飛君, 吉田宏大君にも感謝します.

目 次

1　$GL(n,\mathbb{R})$ 上のクラス 1 Whittaker 関数

n を 2 以上の整数とする．ここでは $GL(n,\mathbb{R})$ 上のクラス 1 Whittaker 関数の帰納的な明示公式について解説する．主定理は $GL(n,\mathbb{R})$ 上のクラス 1 Whittaker 関数を $GL(n-1,\mathbb{R})$ 上のもので表すことである．

1.1　岩澤分解

$GL(n,\mathbb{R})$ 上の Whittaker 関数を定義するためにここでは $GL(n,\mathbb{R})$ の岩澤分解について述べる．$GL(n,\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群である直交群 $O(n,\mathbb{R})$ を K で表す．

定義 1.1 (一般化された上半平面 $\mathcal{H}^n$)**.** $GL(n,\mathbb{R})$ 上で一般化された上半平面を

$$\mathcal{H}^n = GL(n,\mathbb{R})/(K\mathbb{R}_{>0})$$

で定義する．

注 1.2. これは Siegel の意味 (複素対称行列で各成分の虚部が正のもの) ではない．

$GL(n,\mathbb{R})$ の部分群 X_n を対角成分がすべて 1 の上三角行列全体とし，Y_n を対角成分の最後が 1 でそれ以外はすべて正の対角行列全体とする．後の議論を簡単にするため $x \in X_n,\ y \in Y_n$ をそれぞれ

$$x = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ & 1 & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & x_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1y_2\cdots y_{n-1} & & & & \\ & y_2y_3\cdots y_{n-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & y_{n-1} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

の形 ($x_{ij} \in \mathbb{R},\ y_i > 0;\ i = 1,2,\ldots,n-1,\ j = 2,3,\ldots,n$) で表すことにする．

次に示す岩澤分解により $\mathcal{H}^n$ は X_nY_n に同型であり，$z \in \mathcal{H}^n$ は xy の形で一意に表される．

命題 1.3 (岩澤分解)**.** 一般線形群は

$$GL(n,\mathbb{R}) = X_nY_nK\mathbb{R}_{>0}$$

と分解され，$g \in GL(n,\mathbb{R})$ は $xykr$ の形で一意に表される ($k \in K,\ r \in \mathbb{R}$)．

証明. $g \in GL(n,\mathbb{R})$ とし $h = g^{-1} = (h_{ij})$ とおく．まず実対称行列 ${}^th\cdot h = (a_{ij})$ を X_n の元により対角化することを考える．${}^th\cdot h$ の $(1,1)$-成分は $a_{11} = h_{11}^2+h_{21}^2+\cdots+h_{n1}^2 \geq 0$ である．もし $a_{11} = 0$ とすると h の 1 列目の成分がすべて 0 になるから h の正則性に反する．よって $a_{11} > 0$ である．そこで

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in X_n$$

を ${}^t h \cdot h$ に作用させれば次のように 1 行と 1 列の成分が (1,1)-成分以外は 0 になる.

$${}^t x_1({}^t h \cdot h)x_1 = {}^t(hx_1) \cdot (hx_1) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{23} & \ddots & & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & b_{2n} & b_{3n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

ここで hx_1 も正則であるから先ほどと同様な理由で $b_{22} > 0$ である. そこで

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & -\frac{b_{23}}{b_{22}} & \cdots & -\frac{b_{2n}}{b_{22}} \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in X_n$$

を ${}^t x_1({}^t h \cdot h)x_1$ に作用させれば 1 行と 1 列の成分が不変のまま 2 行と 2 列の成分が (2,2)-成分以外は 0 になる. 以下同様にして $x_3, x_4, \cdots, x_{n-1} \in X_n$ がとれる. $x = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \in X_n$ とおけば ${}^t h \cdot h$ は x により対角化され, その対角行列の成分はすべて正である.

$${}^t x({}^t h \cdot h)x = d.$$

ここで d は各成分が正の対角行列 $d = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ である.

次に $a = \mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_n})$ とおけば ${}^t a \cdot a = a^2 = d$ であるから

$${}^t(hxa^{-1}) \cdot (hxa^{-1}) = I$$

を得る (ここで I は n 次単位行列). したがって $hxa^{-1} \in K$ となる. これを l とおけば $h = lax^{-1}$ である. $h = g^{-1}$ とおいたので $g = xa^{-1}l^{-1}$ となる. したがって $r = 1/\sqrt{d_n} \in \mathbb{R}_{>0},\ y = r^{-1}a^{-1} \in Y_n,\ k = l^{-1} \in K$ とおけば $g = xykr$ となる.

最後に分解の一意性を示す. 明らかにもし $xy = x'y'(x,\ x' \in X_n,\ y,\ y' \in Y_n)$ ならばこの対角成分をみれば $y = y'$ であるから $x = x'$ である. そこで $zkr = z'k'r'(z,\ z' \in X_nY_n,\ k,\ k' \in K,\ r,\ r' \in \mathbb{R}_{>0})$ と仮定する. 少し変形して $(r/r')I = (z^{-1}z')(k'k^{-1}) = z''k'' \in X_nY_nK$ とおくと $z''k'' \cdot {}^t(z''k'') = z'' \cdot {}^t z'' = (r/r')^2 I$ となるからこの対角成分の最後の成分を比較することにより $(r/r')^2 = 1$, 今は $r,\ r' > 0$ なので $r = r'$ となる. よって $z'' = (k'')^{-1} \in X_nY_n \cap K = \{I\}$ である. したがって $z = z',\ k = k'$ を得る. □

1.2　クラス 1 Whittaker 関数の定義

ここではクラス 1 Whittaker 関数を Jacquet 積分と呼ばれるもので具体的に定義する. $m = (m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ とする.

定義 1.4 (X_n の指標 Θ_m)**.** X_n の指標 $\Theta_m : X_n \to \mathbb{C}^\times$ を次で定義する.

$$\Theta_m(x) = e^{2\pi i(m_1 x_{12} + m_2 x_{23} + \cdots + m_{n-1} x_{n-1,n})} \qquad (x \in X_n).$$

X_n の指標はすべてこの形である.

$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n,\ a_1 + \cdots + a_n = 0$ とし, D を $\mathcal{H}^n$ 上の $GL(n, \mathbb{R})$ 不変な微分作用素のなすある代数とする.

定義 1.5 ($GL(n, \mathbb{R})$ 上の Whittaker 関数)**.** 滑らかな関数 $f_a : \mathcal{H}^n \to \mathbb{C}$ が指標 Θ_m でタイプ a の $GL(n, \mathbb{R})$ 上の Whittaker 関数であるとは D の固有関数であって

$$f_a(x'z; m) = \Theta_m(x') f_a(z; m) \qquad (x' \in X_n,\ z \in \mathcal{H}^n) \tag{1.6}$$

を満たすことである. さらに各 $y_j \to \infty$ のとき急減少なものをクラス 1 と呼ぶ.

次にクラス 1 Whittaker 関数を Jacquet 積分により具体的に構成する.
$y = \mathrm{diag}(y_1 y_2 \cdots y_{n-1},\ y_2 y_3 \cdots y_{n-1}, \ldots,\ y_{n-1},\ 1) \in Y_n$ に対し

$$y^{\rho_n} = \prod_{j=1}^{n-1} y_j^{\frac{j(n-j)}{2}}$$

とおく. これは X_n のウエイトの和の半分である.

定義 1.7 (べき関数 H_a)**.** べき関数 $H_a : \mathcal{H}^n \to \mathbb{C}$ を次で定義する.

$$H_a(z) = H_a(y) = y^{\rho_n} \prod_{j=1}^{n-1} (y_j y_{j+1} \cdots y_{n-1})^{2a_j} \qquad (z = xy \in \mathcal{H}^n).$$

この積は y の (j, j)-成分の $2a_j$ 乗である. べき関数は D の固有関数となっている.

例 1.8. $n = 2, 3, 4$ のときの y^{ρ_n} と $H_a(y)$.

n	y^{ρ_n}	$H_a(y)$
2	$y_1^{\frac{1}{2}}$	$y_1^{2a_1+\frac{1}{2}}$
3	$y_1 y_2$	$y_1^{2a_1+1} y_2^{2a_1+2a_2+1}$
4	$y_1^{\frac{3}{2}} y_2^2 y_3^{\frac{3}{2}}$	$y_1^{2a_1+\frac{3}{2}} y_2^{2(a_1+a_2+1)} y_3^{2a_1+2a_2+2a_3+\frac{3}{2}}$

w を $GL(n, \mathbb{R})$ の Weyl 群 (n 次対称群に同型) の最長の元とする;

$$w = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in K.$$

定義 1.9 (Jacquet の Whittaker 関数 $W_{n,a}(z;m)$)**.** Jacquet の Whittaker 関数 $W_{n,a}$: $\mathcal{H}^n \to \mathbb{C}$ を次で定義する.

$$W_{n,a}(z;m) = \int_{u\in X_n} H_a(wuz)\overline{\Theta_m(u)}du \qquad (z \in \mathcal{H}^n).$$

注 1.10. べき関数 H_a は右からの K の作用で普遍な $GL(n,\mathbb{R})$ 上の関数とみなせるから, 定義中の H_a の変数 wuz は $w(uz)w$ としてもよい. ここで w の左右からの作用は行列の成分を 180 度回転する. まずはこの下三角行列 $w(uz)w$ を岩澤分解したときの対角成分を求めることになる.

$W_{n,a}$ はクラス 1Whittaker 関数である. 実際 H_a が D の固有関数であるから $W_{n,a}$ もそうである. 条件 (1.6) は $v = ux'$ とおいて (このヤコビアンは 1 であるから)

$$\begin{aligned} W_{n,a}(x'z;m) &= \int_{u\in X_n} H_a(wux'z)\overline{\Theta_m(u)}du = \int_{u\in X_n} H_a(wvz)\overline{\Theta_m(v(x')^{-1})}dv \\ &= \Theta_m(x')W_{n,a}(z;m) \end{aligned}$$

となる. クラス 1 であるための収束性の条件は Wallach らにより示されているが, 後で述べる明示公式 (定理 1.35) で確かめるまで残しておく.

また重複度 1 定理によりクラス 1Whittaker 関数はスカラー倍を除いて一意であることが知られている. よってクラス 1 Whittaker 関数は Jacquet のものを考えればよい.

条件 (1.6) によりクラス 1 Whittaker 関数は

$$W_{n,a}(z;m) = \Theta_m(x)W_{n,a}(y;m) \qquad (z = xy \in \mathcal{H}^n)$$

であるから本質的には $z = y \in Y_n$ のときを考えればよい. さらに次の命題により $m = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ のときに帰着される.

命題 1.11. $y \in Y_n$, $m_1m_2\cdots m_{n-1} \neq 0$ とする. このとき次が成り立つ.

$$W_{n,a}(y;m) = \frac{H_a(M)}{(M^{\rho_n})^2} \cdot W_{n,a}(My;1,1,\ldots,1).$$

ただし $M = \mathrm{diag}(|m_1m_2\cdots m_{n-1}|,\ |m_2m_3\cdots m_{n-1}|, \ldots,\ |m_{n-1}|,\ 1) \in Y_n$ とする.

証明. $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{n-1}) = (m_1/|m_1|,\ m_2/|m_2|, \ldots,\ m_{n-1}/|m_{n-1}|)$ とおく. まず

$$W_{n,a}(My;\epsilon) = \frac{(M^{\rho_n})^2}{H_a(M)} \cdot W_{n,a}(y;m)$$

となることを示す. 左辺は

$$\begin{aligned} W_{n,a}(My;\epsilon) &= \int_{x\in X_n} H_a(wxMy)\overline{\Theta_\epsilon(x)}dx \\ &= \int_{x\in X_n} H_a(wxMy)e^{-2\pi i(\epsilon_1x_{1,2}+\cdots+\epsilon_{n-1}x_{n-1,n})}dx. \end{aligned} \tag{1.12}$$

ここで $xM = Mu$ となる変数変換を考えると $1 \le i < j \le n$ に対して

$$x_{ij} = |m_i m_{i+1} \cdots m_{j-1}| u_{ij}$$

となるからこのヤコビアンは次のようになる.

$$\frac{dx}{du} = \prod_{i<j} |m_i m_{i+1} \cdots m_{j-1}| = \prod_{j=1}^{n-1} |m_j|^{j(n-j)} = (M^{\rho_n})^2.$$

つまりこれは X_n のウエイトになる. したがって (1.12) は次のようになる.

$$\begin{aligned}
W_{n,a}(My;\epsilon) &= (M^{\rho_n})^2 \int_{u \in X_n} H_a(wMuy) e^{-2\pi i(\epsilon_1 |m_1| u_{1,2} + \cdots + \epsilon_{n-1} |m_{n-1}| u_{n-1,n})} du \\
&= (M^{\rho_n})^2 \int_{u \in X_n} H_a(wMw \cdot wuy) e^{-2\pi i(m_1 u_{1,2} + \cdots + m_{n-1} u_{n-1,n})} du \\
&= (M^{\rho_n})^2 \int_{u \in X_n} H_a(wMw) \cdot H_a(wuy) e^{-2\pi i(m_1 u_{1,2} + \cdots + m_{n-1} u_{n-1,n})} du \\
&= \frac{(M^{\rho_n})^2}{H_a(M)} \cdot W_{n,a}(y;m).
\end{aligned}$$

よって残るは

$$W_{n,a}(My;\epsilon) = W_{n,a}(My;1,1,\ldots,1) \tag{1.13}$$

を示せばよい. $k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対し $\epsilon_k = \pm 1$ であるが, これを 1 にすることを考える. k 番目のみ -1 で他はすべて 1 の対角行列を $\delta_k = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, 1, \ldots, 1)$ とおく. 変数変換 $v = \delta_k x$ を考える. $1 \le i < j \le n$ に対して

$$v_{ij} = \begin{cases} -x_{ij} & (i = k), \\ x_{ij} & (i \ne k) \end{cases}$$

であるから, このヤコビアンは $(-1)^{n-k}$ である. また $w\delta_k w = \delta_{n-k+1}$, $H_a(\delta_{n-k+1} z) = H_a(z)$ に注意すれば (1.12) より

$$\begin{aligned}
W_{n,a}(My;\epsilon) &= \int_{x \in X_n} H_a(w\delta_k \cdot \delta_k xMy) e^{-2\pi i(\epsilon_1 x_{1,2} + \cdots - x_{k,k+1} \cdots + \epsilon_{n-1} x_{n-1,n})} dx \\
&= |(-1)^{n-k}| \int_{v \in X_n} H_a(w\delta_k \cdot vMy) e^{-2\pi i(\epsilon_1 v_{1,2} + \cdots + v_{k,k+1} \cdots + \epsilon_{n-1} v_{n-1,n})} dv \\
&= \int_{v \in X_n} H_a(\delta_{n-k+1} wvMy) e^{-2\pi i(\epsilon_1 v_{1,2} + \cdots + v_{k,k+1} \cdots + \epsilon_{n-1} v_{n-1,n})} dv \\
&= W_{n,a}(My; \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{k-1}, 1, \epsilon_{k+1}, \ldots, \epsilon_{n-1})
\end{aligned}$$

となる. これを各 k に関して繰り返せば (1.13) が得られる. $\square$

この命題により

$$\Theta(x) = \Theta_{(1,1,\ldots,1)}(x) = e^{-2\pi i(x_{12}+x_{23}+\cdots+x_{n-1,n})} \qquad (x \in X_n)$$

とおけばクラス 1 Whittaker 関数は本質的に

$$W_{n,a}(y) = W_{n,a}(y;1,1,\ldots,1) = \int_{x\in X_n} H_a(wxy)\overline{\Theta(x)}dx \qquad (y \in Y_n)$$

という場合について考えればよいことが分かる.
　また明示公式を得るために次の Mellin 変換を考える.

定義 1.14 (多重 Mellin 変換 $T_{n,a}$)**.** $s = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}, \mathrm{Re}(s_j) \gg 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ とする. このとき $W_{n,a}$ の Mellin 変換 $T_{n,a}$ を次で定義する.

$$T_{n,a}(s) = 2^{n-1}\int_{y\in Y_n} \frac{W_{n,a}(y)}{y^{\rho_n}} \prod_{j=1}^{n-1} (\pi y_j)^{2s_j} d^\times y.$$

この定義は正規化していることに注意しておく.

　この Mellin 変換については次の反転公式が知られている.

命題 1.15 (Mellin 反転公式)**.** $y \in Y_n$ とする. このとき次が成り立つ.

$$W_{n,a}(y) = \frac{y^{\rho_n}}{(2\pi i)^{n-1}} \int_s T_{n,a}(s) \prod_{j=1}^{n-1} (\pi y_j)^{-2s_j} ds.$$

ここで $\int_s$ は $\mathrm{Re}(s_j) \gg 0 (j = 1, 2, \ldots, n-1)$ である $(n-1)$ 本の垂線とする.

　この命題により $W_{n,a}$ を直接求める代わりに $T_{n,a}$ を計算しても良いことが分かる.

1.3　$GL(2,\mathbb{R})$ 上のクラス 1 Whittaker 関数

ここでは古典的によく知られている $GL(2,\mathbb{R})$ 上のクラス 1 Whittaker 関数

$$W_{2,a}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} H_a(w(xy)w)e^{-2\pi i x_1}dx_1$$

について考える. 記号を少し復習しておくと $a=(a_1,-a_1)\in\mathbb{C}^2,\ x=\left(\begin{smallmatrix}1 & x_1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\in X_2,\ y=\left(\begin{smallmatrix}y_1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\in Y_2,\ w=\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ であった $(x_1\in\mathbb{R},\ y_1>0)$.

べき関数 H_a は岩澤分解の対角成分で定義されていたので, まずは変数 $w(xy)w=\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ x_1 & y_1\end{smallmatrix}\right)$ の具体的な岩澤分解を求める. 岩澤分解 (命題 1.3) により

$$w(xy)w = x'y'kr$$

$(x'\in X_2,\ y'\in Y_2,\ k\in K,\ r\in\mathbb{R}_{>0})$ とおける. y' を求めたい. $x'y'k=\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ x_1 & y_1\end{smallmatrix}\right)r^{-1}$, $k\in K=O_2(\mathbb{R})$ より

$$x'y'k\cdot {}^t(x'y'k) = x'y'\cdot {}^t(x'y'),$$
$$\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ x_1 & y_1\end{smallmatrix}\right)r^{-1}\cdot\left(\begin{smallmatrix}1 & x_1\\ 0 & y_1\end{smallmatrix}\right)r^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}y_1' & x_1'\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}y_1' & 0\\ x_1' & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & x_1\\ x_1 & x_1^2+y_1^2\end{pmatrix}r^{-2} = \begin{pmatrix}(x_1')^2+(y_1')^2 & x_1'\\ x_1' & 1\end{pmatrix}$$

となるから, これを解いて $r=\sqrt{x_1^2+y_1^2},\ x_1'=x_1/r^2,\ y_1'=y_1/r^2$ を得る. 例 1.8 よりべき関数は $H_a(y_1)=y^{2a_1+\frac{1}{2}}$ であったから, 簡単のため $\nu_1=2a_1+\frac{1}{2}$ とおけば

$$H_a(w(xy)w)=H_a(y')=\left(\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\right)^{\nu_1}$$

である. よって $x_1\to y_1x_1$ と変数変換すれば

$$W_{2,a}(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\right)^{\nu_1}e^{-2\pi i x_1}dx_1 = y_1^{1-\nu_1}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+x_1^2\right)^{-\nu_1}e^{-2\pi i x_1 y_1}dx_1 \tag{1.16}$$

が得られる. この最後の積分は関数 $(1+x_1^2)^{-\nu_1}$ の Fourier 変換である.

次にこれが本質的に K-Bessel 関数になることを示す.

定義 1.17 (ガンマ関数 Γ と K-Bessel 関数 K_ν)**.** ガンマ関数 Γ と K-Bessel 関数 K_ν をそれぞれ次のように定義する. $s,\ \nu\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s)>0$ に対して

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}t^s e^{-t}d^\times t, \qquad K_\nu(s)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}t^\nu e^{-\frac{s}{2}(t+t^{-1})}d^\times t.$$

命題 1.18. *$\nu_1=2a_1+\frac{1}{2},\ \mathrm{Re}(\nu_1)>0$ とすれば次が成り立つ.*

$$W_{2,a}(y)=\frac{2\pi^{\nu_1}\sqrt{y_1}}{\Gamma(\nu_1)}\cdot K_{2a_1}(2\pi y_1).$$

証明. (1.16) に $y_1^{\nu_1-1}\Gamma(\nu_1)$ を掛ければ

$$\begin{aligned}
W_{2,a}(y)\cdot y_1^{\nu_1-1}\Gamma(\nu_1) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{1+x_1^2}\right)^{\nu_1} e^{-2\pi i y_1 x_1 - t} d^{\times}t dx_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} t^{\nu_1} e^{-2\pi i y_1 x_1-(1+x_1^2)t} d^{\times}t dx_1 \\
&= \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(tx_1^2+2\pi i y_1 x_1)} dx_1 \cdot t^{\nu_1} e^{-t} d^{\times}t \\
&= \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{t}x_1+\pi i y_1\sqrt{t^{-1}})^2-(\pi y_1)^2 t^{-1}} dx_1 \cdot t^{\nu_1} e^{-t} d^{\times}t \\
&= \int_0^{\infty}\int_{-\infty+\pi i y_1\sqrt{t^{-1}}}^{\infty+\pi i y_1\sqrt{t^{-1}}} e^{-u_1^2}\frac{du_1}{\sqrt{t}} \cdot t^{\nu_1} e^{-t-(\pi y_1)^2 t^{-1}} d^{\times}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u_1^2} du_1 \cdot \int_0^{\infty} t^{\nu_1-\frac{1}{2}} e^{-\pi y_1[(\pi y_1)^{-1}t+(\pi y_1)t^{-1}]} d^{\times}t
\end{aligned}$$

となる. ここで 2 つ目の等号は $t \to (1+x_1^2)t$, 5 つ目の等号は $u_1 = \sqrt{t}x_1 + \pi i y_1\sqrt{t^{-1}}$ とそれぞれ変数変換した. 最後の u_1 の積分は被積分関数 $e^{-u_1^2}$ が正則なので虚部をずらせ, これは Gauss 関数 $e^{-u_1^2}$ の積分であるから積分値は $\sqrt{\pi}$ である. 次に $t \to (\pi y_1)t$ と変数変換し, $\nu_1 = 2a_1 + \frac{1}{2}$ を代入すれば

$$\begin{aligned}
W_{2,a}(y) &= \frac{\sqrt{\pi}y_1^{1-\nu_1}}{\Gamma(\nu_1)}\int_0^{\infty}(\pi y_1 t)^{\nu_1-\frac{1}{2}} e^{-\pi y_1(t+t^{-1})} d^{\times}t = \frac{\pi^{\nu_1}\sqrt{y_1}}{\Gamma(\nu_1)}\int_0^{\infty} t^{2a_1} e^{-\frac{2\pi y_1}{2}(t+t^{-1})} d^{\times}t \\
&= \frac{2\pi^{\nu_1}\sqrt{y_1}}{\Gamma(\nu_1)}\cdot K_{2a_1}(2\pi y_1)
\end{aligned}$$

となり, 主張が成り立つ. □

この命題により不確定特異点 $y_1 = +\infty$ での様子が次のように分かる. まずガンマ関数と K-Bessel 関数については次の漸近的公式が知られている.

命題 1.19. $s = \sigma + i\tau,\ \nu \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R}$ とする. このとき次が成り立つ.

$$|\Gamma(s)| \approx \sqrt{\frac{2\pi}{|s|}}\left|\frac{s}{e}\right|^{\sigma} e^{-|\tau||\arg(s)|} \qquad (|s| \gg 0,\ |\arg(s)| < \pi), \tag{1.20}$$

$$K_\nu(t) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2t}}e^{-t} \qquad (t \gg 0,\ \nu \text{ に関して一様ではない}). \tag{1.21}$$

以降 $\nu_1 = 2a_1 + \frac{1}{2},\ \mathrm{Re}(\nu_1) > 0$ のときを考える. (1.21) を命題 1.18 に用いれば

$$W_{2,a}(y) \approx \frac{2\pi^{2a_1+\frac{1}{2}}\sqrt{y_1}}{\Gamma(2a_1+\frac{1}{2})}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{4\pi y_1}}e^{-2\pi y_1} = \frac{\pi^{2a_1+\frac{1}{2}}}{\Gamma(2a_1+\frac{1}{2})}e^{-2\pi y_1} \qquad (y_1 \gg 0)$$

となるから, a_1 を固定し $y_1 \to +\infty$ とすれば $W_{2,a}(y)$ は指数オーダーで 0 になる. しかし注意すべきは a_1 での漸近的な挙動である. $W_{2,a}(y)$ の分母にガンマ関数がある

ため Stirling の公式 (1.20) により $|\operatorname{Im}(a_1)| \to +\infty$ のときその部分は発散してしまう. このような理由で a_1 の虚部には十分な注意が必要である. このままでは a_1 に関する $W_{2,a}$ の漸近的な挙動が分からないので次の Mellin 変換 (定義 1.14) を考える.

$$T_{2,a}(s) = 2\sqrt{\pi}\int_0^\infty W_{2,a}(y)(\pi y_1)^{2s-\frac{1}{2}}d^\times y_1 \qquad (s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}(s) \gg 0).$$

命題 1.22. $\nu_1 = 2a_1 + \frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(\nu_1) > 0$ とすれば次が成り立つ.

$$T_{2,a}(s) = \pi^{\nu_1}\frac{\Gamma(s+a_1)\Gamma(s-a_1)}{\Gamma(\nu_1)}.$$

証明. 先ほどと同様に $T_{2,a}(s)$ に $\pi^{-\nu_1}\Gamma(\nu_1)$ を掛ければ, 命題 1.18 より

$$\begin{aligned}
T_{2,a}(s)\cdot\pi^{-\nu_1}\Gamma(\nu_1) &= 4\int_0^\infty \sqrt{\pi y_1}K_{2a_1}(2\pi y_1)\cdot(\pi y_1)^{2s-\frac{1}{2}}d^\times y_1 \\
&= 2\int_0^\infty\int_0^\infty t^{2a_1}e^{-\pi y(t+t^{-1})}d^\times t\cdot(\pi y_1)^{2s}d^\times y_1 \\
&= 2\int_0^\infty\int_0^\infty (\pi y_1)^{2s}t^{2a_1}e^{-(\pi y_1 t+\pi y_1 t^{-1})}d^\times t d^\times y_1 \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty (t_1 t_2)^s\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{a_1}e^{-(t_1+t_2)}d^\times t_1 d^\times t_2 \\
&= \int_0^\infty t_1^{s+a_1}e^{-t_1}d^\times t_1\cdot\int_0^\infty t_2^{s-a_1}e^{-t_2}d^\times t_2 \\
&= \Gamma(s+a_1)\Gamma(s-a_1)
\end{aligned}$$

となる. ここで 4 つ目の等号では $t_1 = \pi y_1 t,\ t_2 = \pi y_1 t^{-1}$ と変数変換した. このとき

$$(\pi y_1)^2 = t_1 t_2,\ t^2 = \frac{t_1}{t_2};\quad d^\times t d^\times y_1 = \frac{d^\times t_1 d^\times t_2}{2}$$

である. ゆえに上の式の両辺を $\pi^{-2a_1}\Gamma(\nu_1)$ で割れば主張が得られる. □

この命題に Mellin 反転公式 (命題 1.15)

$$W_{2,a}(y) = \frac{\sqrt{y_1}}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}T_{2,a}(s)(\pi y_1)^{-2s}ds \qquad (\sigma \gg 0) \tag{1.23}$$

を用いれば次が得られる.

系 1.24. $\nu_1 = 2a_1 + \frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(\nu_1) > 0$ とすれば次が成り立つ.

$$W_{2,a}(y) = \frac{\pi^{\nu_1}\sqrt{y_1}}{2\pi i\Gamma(\nu_1)}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s+a_1)\Gamma(s-a_1)(\pi y_1)^{-2s}ds.$$

最後にStirlingの公式を用いてクラス1 Whittaker関数 $W_{2,a}$ の a に関する漸近的な挙動を調べる．Stirlingの公式 (1.20) に現れる偏角 arg は扱いにくいのでまずはこれを近似していく．$s=\sigma+i\tau(\sigma\gg 0)$ に対しその虚部 τ には依存しないある正の定数 c,c' が存在して

$$ce^{-\frac{\pi}{2}|\tau|}\le e^{-|\tau||\arg(s)|}\le c'e^{-\frac{\pi}{2}|\tau|} \tag{1.25}$$

となることを示す．

まずは $|\tau|\gg 0$ のときを考える．$\theta=|\arg(s)|$ とおけば $\tan\theta=|\tau|/\sigma$ である．このとき θ は $\pi/2$ に近づく．$x=\pi/2-\theta,\ y=y(x)=\tan x$ とおけば $x=0$ の近傍で $\tan x$ は実解析的で $y(0)=0,\ y'(0)=1/\cos^2 0=1\neq 0$ であり

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-\frac{1}{6}x^3+\cdots}{1-\frac{1}{2}x^2+\cdots}=x+\frac{1}{3}x^3+\cdots$$

と展開できる．ゆえに陰関数定理により $y=0$ の近傍で実解析的な関数 $x=x(y)=y+(y$ の2次以上の項$)$ が存在する．よってある正の定数 c が存在して $|x-y|\le c/|y|^2$ となる．これは $x=\pi/2-\theta$ より $y=\tan x=1/\tan\theta=\sigma/|\tau|$ であるから

$$\left|\theta-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sigma}{|\tau|}\right)\right|\le\frac{c'}{|\tau|^2},$$
$$\frac{\pi}{2}-\frac{\sigma}{|\tau|}-\frac{c'}{|\tau|^2}\le\theta=|\arg(s)|\le\frac{\pi}{2}-\frac{\sigma}{|\tau|}+\frac{c'}{|\tau|^2}$$

となる．ここで s の実部 σ は固定しているので定数とみなし, $c'=\sigma^2c$ とした．したがって $|\tau|$ が十分大きいときは

$$c_1e^{-\frac{\pi}{2}|\tau|}=e^{-\frac{\pi}{2}|\tau|+\sigma-\frac{c'}{|\tau|}}\le e^{-|\tau||\arg(s)|}\le e^{-\frac{\pi}{2}|\tau|+\sigma+\frac{c'}{|\tau|}}=c_2e^{-\frac{\pi}{2}|\tau|}$$

となるような正の定数 c_1,c_2 が存在するから (1.25) が成り立つ．

一方 $|\tau|$ が十分大きくはないとき τ は有界閉区間上を動き関数 $e^{-|\tau||\arg(s)|}$, $e^{-\frac{\pi}{2}|\tau|}$ はそれぞれ τ に関して連続であるからある正の定数 c_3,c_4,c_5,c_6 が存在して

$$c_3\le e^{-|\tau||\arg(s)|}\le c_4,\qquad c_5\le e^{-\frac{\pi}{2}|\tau|}\le c_6$$

と抑えられる．よってこのときも (1.25) は次のように成り立つ．

$$\frac{c_3}{c_6}e^{-\frac{\pi}{2}|\tau|}\le e^{-|\tau||\arg(s)|}\le\frac{c_4}{c_5}e^{-\frac{\pi}{2}|\tau|}.$$

$a_1=u+iv$ とおく．命題1.22にStirlingの公式 (1.20) を適用すれば $|v|\gg 0$ のときMellin変換 $|T_{2,a}(s)|$ は漸近的に次のようになる．

(1.26)
$$\sqrt{2}\pi^{2u+1}\frac{|s+a_1|^{\sigma+u-\frac{1}{2}}e^{-(\sigma+u+(\tau+v)\arg(s+a_1))}\cdot|s-a_1|^{\sigma-u-\frac{1}{2}}e^{-(\sigma-u+(\tau-v)\arg(s-a_1))}}{|2a_1+\frac{1}{2}|^{2u}e^{-(2u+\frac{1}{2}+2v\arg(2a_1+\frac{1}{2}))}}.$$

さらにこの式の指数部分に (1.25) を適用すればある正の定数 C が存在して

$$
\begin{aligned}
(1.27)\qquad & \exp\left(2|v|\left|\arg\left(2a_1+\frac{1}{2}\right)\right|-|\tau+v||\arg(s+a_1)|-|\tau-v||\arg(s-a_1)|\right)\\
&\le C\exp\left(\frac{\pi}{2}(2|v|-|\tau+v|-|\tau-v|)\right)\\
&= C\exp\left(\frac{\pi}{2}(2|v|-(|\tau|+|v|)-||\tau|-|v||)\right)\\
&= \begin{cases} C & (|\tau|\le|v|),\\ Ce^{\pi(|v|-|\tau|)} & (|\tau|>|v|) \end{cases}
\end{aligned}
$$

と上から抑えられる.

$|\tau|\le|v|$ のときは (1.26) と (1.27) より

$$
\begin{aligned}
|T_{2,a}(\sigma+i\tau)| &\le C\sqrt{2}\pi^{2u+1}\frac{|s+a_1|^{\sigma+u-\frac{1}{2}}\cdot|s-a_1|^{\sigma-u-\frac{1}{2}}}{|2a_1+\frac{1}{2}|^{2u}}e^{2(u-\sigma)+\frac{1}{2}}\\
&\le C'(|s|+|a_1|)^{2\sigma-1}|2a_1|^{-2u}\le C'|2a_1|^{2(\sigma-u)-1}
\end{aligned}
$$

となる. ここで C' は s, a_1 の実部 $\sigma,\ u$ には依存するが虚部 $\tau,\ v$ には依存しない定数である. よってこの区間での積分は次のように評価できる.

$$
\int_{-|v|}^{|v|}|T_{2,a}(\sigma+i\tau)|d\tau\le C'|2a_1|^{2(\sigma-u)}.
$$

$|\tau|>|v|$ のときも同様にして

$$
|T_{2,a}(\sigma+i\tau)|\le C'(|s|+|a_1|)^{2\sigma-1}|2a_1|^{-2u}e^{\pi(|v|-|\tau|)}
$$

となるから積分をとることにより e の指数にある v の項は消える. 実際

$$
\int_{|v|}^{+\infty}e^{\frac{\pi}{2}(|v|-\tau)}d\tau=\int_{-\infty}^{-|v|}e^{\frac{\pi}{2}(|v|+\tau)}d\tau=\frac{2}{\pi}
$$

となるからである. よってこのときも上と同じオーダーで評価できる.

ゆえに Mellin 反転公式 (1.23) により

$$
(1.28)\qquad |W_{2,a}(y)|\le\frac{\sqrt{y_1}}{2\pi}(\pi y_1)^{-2\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}|T_{2,a}(\sigma+i\tau)|d\tau\le C''y_1^{-2\sigma+\frac{1}{2}}|a_1|^{2(\sigma-u)}
$$

と上から評価できる. ここで C'' も C' と同様な定数である. これにより $W_{2,a}$ には漸近的にみて a_1 の虚部に関する指数部分が現れないことが分かった. したがって $n=2$ のときのクラス 1 Whittaker 関数 $W_{2,a}$ は a_1 の虚部に関して漸近的に多項式増大である.

1.4 Barnes の第一補題

ここでは主定理の証明において重要になる Barnes の第一補題を示す．その前に少しガンマ関数の基本的な性質を復習しておく．

定義 1.29 (Pockhammer の記号)**.** $\alpha \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．Pockhammer の記号を

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$$

で定義する. これは上昇階乗の一般化である.

補題 1.30 (Euler の反射公式)**.** $s \in \mathbb{C}$ に対して次が成り立つ.

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}. \tag{1.31}$$

証明. まず $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ のときはガンマ関数の定義により次のように計算できる.

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty u^s e^{-u} \cdot v^{1-s} e^{-v} d^\times v d^\times u = \int_0^\infty \int_0^\infty u \left(\frac{v}{u}\right)^{1-s} e^{-(u+v)} d^\times v d^\times u \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty u v^{1-s} e^{-u(1+v)} d^\times v d^\times u = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{u}{1+v} v^{1-s} e^{-u} d^\times u d^\times v \\
&= \int_0^\infty u e^{-u} d^\times u \cdot \int_0^\infty \frac{v^{-s}}{1+v} dv = \int_0^\infty \frac{v^{-s}}{1+v} dv.
\end{aligned}$$

ここで 3 つ目の等号では $v \to uv$, 4 つ目の等号では $u \to u/(1+v)$ とそれぞれ変数変換し, 最後の等号は $\Gamma(1) = 1$ より従う.

次にこの積分 $\int_0^\infty$ を Hankel 積分路 $H_{\varepsilon,R}$ を用いて表すことを考える．v^{-s} の $\mathbb{R}_{>0}$ 上の分枝を実軸の上側 $v = ve^0$ と下側 $ve^{2\pi i}$ にとることにより, $0 < \varepsilon \ll 1 \ll R$ に対し Hankel 積分路 $H_{\varepsilon,R}$ を

$$\int_{H_{\varepsilon,R}} = \int_\varepsilon^R + \int_{C_R} + \int_{Re^{2\pi i}}^{\varepsilon e^{2\pi i}} + \int_{-C_\varepsilon}$$

で定義する．ここで $\mathbb{C}$ 上の原点 O を中心とする半径 r の円を C_r で表す (これに正の向き (反時計回り) をつけ, 負の向きを $-C_r$ で表すことにする)．仮定より $0 < 1 - \mathrm{Re}(s) < 1$ であるから, $r \neq 1$ のとき C_r 上の積分は

$$\left| \int_{C_r} \frac{v^{-s}}{1+v} dv \right| \leq 2\pi r \frac{r^{-s}}{|1-r|} = 2\pi \frac{r^{1-s}}{|1-r|} \to 0 \qquad (r \to 0 \text{ または } +\infty)$$

となるから, $\varepsilon \to 0$ かつ $R \to +\infty$ のとき $\int_{C_R} + \int_{-C_\varepsilon} \to 0$ である．また

$$\int_{Re^{2\pi i}}^{\varepsilon e^{2\pi i}} \frac{v^{-s}}{1+v} dv = -e^{-2\pi i s} \int_\varepsilon^R \frac{v^{-s}}{1+v} dv$$

であるから $H_{\varepsilon,R}$ 上の積分は次のようになる.

$$\begin{aligned}\int_{H_{\varepsilon,R}} \frac{v^{-s}}{1+v}dv &= (1-e^{-2\pi is})\int_{\varepsilon}^{R} + \int_{C_R} + \int_{-C_\varepsilon} \frac{v^{-s}}{1+v}dv \\ &\to (1-e^{-2\pi is})\int_0^\infty \frac{v^{-s}}{1+v}dv \qquad (\varepsilon\to 0,\ R\to+\infty).\end{aligned}$$

つまり次のように表せる.

$$\int_0^\infty \frac{v^{-s}}{1+v}dv = \frac{1}{1-e^{-2\pi is}} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \int_{H_{\varepsilon,R}} \frac{v^{-s}}{1+v}dv.$$

被積分関数 $v^{-s}/(1+v)$ の極は原点 $v=0$ を除けば 1 位の極 $v=-1=e^{\pi i}$ だけであり, これが積分路の内部にくるように $H_{\varepsilon,R}$ をとっているから留数定理により

$$\int_{H_{\varepsilon,R}} \frac{v^{-s}}{1+v}dv = 2\pi ie^{-\pi is}$$

となる. したがって

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty \frac{v^{-s}}{1+v}dv = \frac{2\pi ie^{-\pi is}}{1-e^{-2\pi is}} = \pi\frac{2i}{e^{\pi is}-e^{-\pi is}} = \frac{\pi}{\sin\pi s}$$

を得る. これが $s\in\mathbb{C}$ に拡張できるのはガンマ関数の関数等式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ による. 実際 $s\in\mathbb{C},\ 0<\mathrm{Re}(s)<1,\ n\in\mathbb{Z}$ に対し, 主張を $s\to s+n$ で置き換えると

$$\Gamma(s+n)\Gamma(1-(s+n)) = \frac{(s)_n}{(1-s-n)_n}\Gamma(s)\Gamma(1-s) = (-1)^n\frac{\pi}{\sin\pi s} = \frac{\pi}{\sin\pi(s+n)}$$

となる. $s\in\mathbb{Z}$ のときは両辺ともに ∞ をとり, $s\notin\mathbb{Z},\ \mathrm{Re}(s)\in\mathbb{Z}$ のときはガンマ関数の連続性より従う. □

次に Barnes の第一補題の証明のカギになる Gauss の超幾何定理について述べる.

定義 1.32 (Gauss の超幾何関数 F とベータ関数 B)**.** Gauss の超幾何関数 $F={}_2F_1$ とベータ関数 B をそれぞれ次で定義する. $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z\in\mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}F\left(\begin{matrix}\alpha,\ \beta\\ \gamma\end{matrix};z\right) &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\cdot\frac{z^n}{n!},\\ B(\alpha,\beta) &= \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \qquad (\mathrm{Re}(\alpha),\ \mathrm{Re}(\beta)>0).\end{aligned}$$

補題 1.33 (Gauss の超幾何定理)**.** $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\beta)>0$ に対し

$$F\left(\begin{matrix}\alpha,\ \beta\\ \gamma\end{matrix};z\right) = \frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)}\int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\beta-1}(1-xz)^{-\alpha}dx$$

が成り立つ. とくに $z=1$ のときは Gauss の超幾何定理と呼ばれ次のようになる.

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n\cdot n!} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \qquad (\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\alpha+\beta)).$$

証明. ベータ関数が次のようにガンマ関数で表せることはよく知られている.

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

これを踏まえれば左辺に $B(\beta,\gamma-\beta)$ をかけて次のように計算できる.

$$\begin{aligned}
&F\left(\begin{matrix}\alpha,\ \beta\\ \gamma\end{matrix};z\right)\cdot B(\beta,\gamma-\beta)\\
=&\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n)}\cdot(\alpha)_n\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+n)}\cdot(\alpha)_n\frac{z^n}{n!}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}B(\beta+n,\gamma-\beta)\cdot(\alpha)_n\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 x^{\beta+n-1}(1-x)^{\gamma-\beta-1}dx\right)(\alpha)_n\frac{z^n}{n!}\\
=&\int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\beta-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha)_n\frac{(xz)^n}{n!}\right)dx=\int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\beta-1}(1-xz)^{-\alpha}dx.
\end{aligned}$$

ここで最後の等号は $(1-xz)^{-\alpha}$ の Taylor 展開

$$(1-xz)^{-\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-n+1)\frac{(-xz)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha)_n\frac{(xz)^n}{n!}$$

により従う. $z=1$ のときは次のように容易に確かめられる.

$$\begin{aligned}
F\left(\begin{matrix}\alpha,\ \beta\\ \gamma\end{matrix};1\right)&=\frac{B(\beta,\gamma-\alpha-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)}=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\\
&=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}.
\end{aligned}$$

□

命題 1.34 (Barnes の第一補題)**.** $\sigma\in\mathbb{R},\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in\mathbb{C}$ を $\alpha-\beta,\ \gamma-\delta\notin\mathbb{Z},\ \mathrm{Re}(\alpha),\ \mathrm{Re}(\beta),\ \mathrm{Re}(\gamma),\ \mathrm{Re}(\delta)>\sigma$ ととる. このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)ds\\
=&\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}.
\end{aligned}$$

証明. $\sigma=0$ としても一般性を失わない. 主張の左辺を I とおく. 積分路を広げ, $R>0$ に対して

$$\int_{D_R}=\int_{-i\infty}^{i\infty}+\int_{i\infty}^{iR}+\int_{C_R}+\int_{-iR}^{-i\infty}$$

という閉経路での積分を考える．ここで C_R は iR を始点, $-iR$ を終点とし原点 O を中心とする半径 R の右半円とする．

まず左辺の被積分関数を評価する．Euler の反射公式 (補題 1.30) により $|s| \gg 0$, $|\theta| = |\arg s| \leq \pi/2$ のとき

$$\begin{aligned}&\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)\\=&\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(1-\gamma+s)\Gamma(1-\delta+s)}\cdot\frac{\pi^2}{\sin\pi(\gamma-s)\sin\pi(\delta-s)}\end{aligned}$$

となり, この右辺のガンマ因子は Stiring の公式 (1.20) により

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(1-\gamma+s)\Gamma(1-\delta+s)}\right| &\approx \frac{2\pi|s|^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta+2s)-1}e^{-\mathrm{Re}(\alpha+\beta+2s)-\theta\,\mathrm{Im}(\alpha+\beta+2s)}}{2\pi|s|^{\mathrm{Re}(-\gamma-\delta+2s)+1}e^{-\mathrm{Re}(-\gamma-\delta+2s)-\theta\,\mathrm{Im}(-\gamma-\delta+2s)-2}}\\&\leq |s|^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)-2}\cdot e^{-\mathrm{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+\frac{\pi}{2}|\,\mathrm{Im}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)|+2}\end{aligned}$$

となるから I は収束し, $\mathrm{Re}(\alpha+\beta+\delta+\gamma)<1$ のとき $R\to\infty$ とすれば $\int_{i\infty}^{iR}+\int_{C_R}+\int_{-iR}^{-i\infty}\to 0$ となるから $\int_{D_R}\to 2\pi iI$ である．

以降 $\mathrm{Re}(\alpha+\beta+\delta+\gamma)<1$ とする．留数定理により $\int_{D_R}$ は閉曲線 D_R の内部 (右半円 C_R と虚軸で囲まれた領域) にある被積分関数 $\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)$ のすべての極での留数の総和の $-2\pi i$ 倍である．ガンマ関数 $\Gamma(s)$ のすべての極は非正の整数 $s=-n(n=0,1,2,\ldots)$ にあり, 1 位の極でその留数は $(-1)^n/n!$ である．仮定の定数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ のとり方から $\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)$ の極 $-(\alpha+n),\ -(\beta+n)$ はすべて左半平面 $\mathrm{Re}<0$ にあるので無視でき, 右半平面 $\mathrm{Re}>0$ にあるのはすべて $\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)$ の極 $\gamma+n,\ \delta+n$ であり, すべて相異なる．さらに先ほどと同様に反射公式 (補題 1.30) を用いれば, 次のように計算できる．

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{D_R}\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)ds\\&=\sum_{n=0}^{\infty}[\Gamma(\alpha+\gamma+n)\Gamma(\beta+\gamma+n)\Gamma(\delta-\gamma-n)\\&\qquad+\Gamma(\alpha+\delta+n)\Gamma(\beta+\delta+n)\Gamma(\gamma-\delta-n)]\frac{(-1)^n}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\Gamma(\alpha+\gamma+n)\Gamma(\beta+\gamma+n)}{\Gamma(1-\delta+\gamma+n)}\cdot\frac{\pi}{\sin(\delta-\gamma-n)\pi}\right.\\&\qquad\left.+\frac{\Gamma(\alpha+\delta+n)\Gamma(\beta+\delta+n)}{\Gamma(1-\gamma+\delta+n)}\cdot\frac{\pi}{\sin(\gamma-\delta-n)\pi}\right]\frac{(-1)^n}{n!}\\&=\frac{\pi}{\sin(\gamma-\delta)\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\Gamma(\alpha+\delta+n)\Gamma(\beta+\delta+n)}{\Gamma(1-\gamma+\delta+n)}-\frac{\Gamma(\alpha+\gamma+n)\Gamma(\beta+\gamma+n)}{\Gamma(1-\delta+\gamma+n)}\right]\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{\sin(\gamma-\delta)\pi}\left[\frac{\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(1-\gamma+\delta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\delta)_n(\beta+\delta)_n}{(1-\gamma+\delta)_n}\cdot\frac{1}{n!}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(1-\delta+\gamma)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\gamma)_n(\beta+\gamma)_n}{(1-\delta+\gamma)_n}\cdot\frac{1}{n!}\right]\\
&= \frac{\pi}{\sin(\gamma-\delta)\pi}\left[\frac{\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(1-\gamma+\delta)}F\left(\begin{matrix}\alpha+\delta,\ \beta+\delta\\ 1-\gamma+\delta\end{matrix};1\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(1-\delta+\gamma)}F\left(\begin{matrix}\alpha+\gamma,\ \beta+\gamma\\ 1-\delta+\gamma\end{matrix};1\right)\right]\\
&= \frac{\pi}{\sin(\gamma-\delta)\pi}\left[\frac{\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(1-\gamma+\delta)}\cdot\frac{\Gamma(1-\gamma+\delta)\Gamma(1-(\alpha+\beta+\gamma+\delta))}{\Gamma(1-(\alpha+\gamma))\Gamma(1-(\beta+\gamma))}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(1-\delta+\gamma)}\cdot\frac{\Gamma(1-\delta+\gamma)\Gamma(1-(\alpha+\beta+\gamma+\delta))}{\Gamma(1-(\alpha+\delta))\Gamma(1-(\beta+\delta))}\right]\\
&= \frac{\pi\Gamma(1-(\alpha+\beta+\gamma+\delta))}{\sin(\gamma-\delta)\pi}\\
&\quad\times\left[\frac{\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(1-(\alpha+\gamma))\Gamma(1-(\beta+\gamma))}-\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(1-(\alpha+\delta))\Gamma(1-(\beta+\delta))}\right]\\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}\\
&\quad\times\frac{\sin(\alpha+\gamma)\pi\sin(\beta+\gamma)\pi-\sin(\alpha+\delta)\pi\sin(\beta+\delta)\pi}{\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\pi\sin(\gamma-\delta)\pi}.
\end{aligned}
$$

上の最後の等号でも反射公式 (補題 1.30) を用い, 下から 3 番目の等号は Gauss の超幾何定理 (補題 1.33) による ($\mathrm{Re}(\alpha+\beta+\delta+\gamma)<1$ により定理の条件を満たす). したがって最後の式の sin 因子の分母と分子が一致することを言えばよい. 実際, 三角関数の加法定理により次のようにうまくいく.

$$
\begin{aligned}
&\ 2\sin(\alpha+\gamma)\pi\sin(\beta+\gamma)\pi-2\sin(\alpha+\delta)\pi\sin(\beta+\delta)\pi\\
=&\cos(\alpha-\beta)\pi-\cos(\alpha+\gamma)\pi\cos(\beta+\gamma)\pi+\sin(\alpha+\gamma)\pi\sin(\beta+\gamma)\pi\\
&+\cos(\alpha+\beta+2\delta)\pi-\cos(\alpha+\delta)\pi\cos(\beta+\delta)\pi-\sin(\alpha+\delta)\pi\sin(\beta+\delta)\pi\\
=&\cos(\alpha-\beta)\pi-\cos(\alpha+\beta+2\gamma)\pi+\cos(\alpha+\beta+2\delta)\pi-\cos(\alpha-\beta)\pi\\
=&\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta-(\gamma-\delta))\pi-\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta+(\gamma-\delta))\pi\\
=&2\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\pi\sin(\gamma-\delta)\pi.
\end{aligned}
$$

これで $0<\mathrm{Re}(\alpha+\beta+\delta+\gamma)<1$ のときが示せた. これが $\mathrm{Re}(\alpha+\beta+\delta+\gamma)\geq 1$ に拡張できるのは各 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ に関して主張の関数が解析関数であるからである. □

1.5 クラス 1 Whittaker 関数の帰納的な明示公式

$3 \le n \in \mathbb{Z},\ a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n,\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0,\ y \in Y_n$ とする. ここでは主定理の一つであるクラス 1 Whittaker 関数

$$W_{n,a}(y) = W_{n,a}(y_1,\ y_2, \ldots,\ y_{n-1}) = \int_{x \in X_n} H_a(wxy)\overline{\Theta(x)}dx$$

の帰納的な明示公式について述べる. t として $|\operatorname{Im}(a_t)| \ge |\operatorname{Im}(a_j)|(j = 1, 2, \ldots, n)$ となる整数を 1 つ固定する. $\nu_a = \frac{n-1}{2} + na_t$ とおき

$$\Gamma_a = \prod_{j \ne t} \Gamma\left(\frac{1}{2} + a_t - a_j\right)$$

とおく. $GL(n, \mathbb{R})$ でのタイプ a に対する $GL(n-1, \mathbb{R})$ でのタイプを

$$b = (b_1, \ldots, b_{n-1}) = \left(a_1 + \frac{a_t}{n-1}, \ldots,\ a_{t-1} + \frac{a_t}{n-1},\ a_{t+1} + \frac{a_t}{n-1}, \ldots,\ a_n + \frac{a_t}{n-1}\right)$$

で定める. このとき a の性質から $b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} = 0$ を満たす. 以降では簡単のため $t = 1$ として考えることにする.

定理 1.35 (Ishii-Stade[4], 主定理 1)**.** $3 \le n \in \mathbb{Z},\ y \in Y_n$ とする. このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned} W_{n,a}(y) =& \frac{\pi^{\nu_a}}{\Gamma_a} \prod_{j=1}^{n-1} y_j^{\frac{n-j}{2} + 2\frac{n-j}{n-1}a_1} \int_{u \in \mathbb{R}_{>0}^{n-1}} e^{-\pi \sum_{j=1}^{n-1}(y_j^2 u_j + u_j^{-1})} \prod_{j=1}^{n-1} u_j^{\frac{n-2j}{4} + \frac{n}{n-1}a_1} \\ & \times W_{n-1,b}\left(y_2\sqrt{\frac{u_2}{u_1}},\ y_3\sqrt{\frac{u_3}{u_2}}, \ldots,\ y_{n-1}\sqrt{\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}}\right) d^\times u. \end{aligned}$$

この明示公式により Jacquet の Whittaker 関数がクラス 1 の条件を満たすことも確認できる. 実際 $W_{n,a}(y)$ の不確定特異点 $y_j = +\infty(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ での挙動が $n = 2$ のとき (命題 1.19 の後の考察) と同様に指数オーダーで 0 になることが分かる. 一方 a に関する漸近的な挙動はこのままだと分からないが, Mellin 変換を考えるとこれも $n = 2$ のとき (命題 1.22 の後の考察) と同様に多項式的に振舞うことが分かる. これについては最後に述べることにして, まずはこの主定理 1 を証明していく. 主定理 1 は Mellin 反転公式 (命題 1.15) により本質的には次の Mellin 変換の場合を示せばよい.

定理 1.36 (Ishii-Stade[4], Theorem 12)**.** $3 \le n \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{C}^{n-1}$ とし $z_0 = z_{n-1} = 0$ とおく. このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned} & T_{n,a}(s) \\ =& \frac{\pi^{\nu_a}}{(2\pi i)^{n-2}\Gamma_a} \int_z \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma\left(s_j + z_{j-1} + \frac{n-j}{n-1}a_1\right) \Gamma\left(s_j + z_j - \frac{j}{n-1}a_1\right) T_{n-1,b}(-z)\, dz. \end{aligned}$$

ここで $\int_z$ は $\operatorname{Re}(z_j) \gg 0(j = 1, 2, \ldots, n-2)$ である $(n-2)$ 本の垂線とする.

これを帰納法で示していくのだが $n=3$ のとき ($z_1=z$ として)

(1.37)
$$T_{3,a}(s)=\frac{\pi^{\nu_a}\Gamma\left(s_1+a_1\right)\Gamma\left(s_2-a_1\right)}{2\pi i\Gamma_a}\int_z\Gamma\left(s_1+z-\frac{a_1}{2}\right)\Gamma\left(s_2+z+\frac{a_1}{2}\right)T_{2,b}\left(-z\right)dz$$

これはBumpにより1984年に示されている (cf.[1]). そこで n が4以上のときを考える. まず $GL(n-2,\mathbb{R})$ 上のクラス1 Whittaker関数との関係について述べる. $GL(n-2,\mathbb{R})$ のタイプを先と同様に

$$c=(c_1,c_2,\dots,c_{n-2})=\left(b_2+\frac{b_1}{n-2},\ b_3+\frac{b_1}{n-2},\dots,\ b_{n-1}+\frac{b_1}{n-2}\right)\in\mathbb{C}^{n-2}$$

で定める. このときも $c_1+c_2+\cdots+c_{n-2}=0$ である. 簡単のため次のようにガンマ因子をおくと後の議論が見やすくなる. $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{C}$ に対し

$$C(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}.$$

命題 1.38 (Stade[8], THEOREM 3.1.(a))**.** $4\le n\in\mathbb{Z},\ s\in\mathbb{C}^{n-1}$ とし $t_0=0,\ t_{n-2}=-(a_1+a_2)$ とおく. このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned}T_{n,a}(s)=&\frac{\pi^{\nu_a+\nu_b}\Gamma(s_1+a_1)\Gamma(s_{n-1}-a_1)}{(2\pi i)^{n-3}\Gamma_a\Gamma_b}\\&\cdot\int_t T_{n-2,c}(\hat{t}\,)\prod_{j=1}^{n-2}C(s_j+t_{j-1}+a_2,\ s_j+t_j,\ s_j+s_{j+1}+t_{j-1}+t_j+a_1+a_2)dt\end{aligned}$$

ここで $\hat{t}=(-t_j-\frac{j(a_1+a_2)}{n-2})_{1\le j\le n-3}$ であり $\int_t$ は $\mathrm{Re}(t_j)\gg 0(j=1,2,\dots,n-2)$ である $(n-3)$ 本の垂線とする.

この命題にBarnesの第一補題 (命題1.34)

$$C(\alpha+\gamma,\ \alpha+\delta,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta)=\frac{1}{2\pi i}\int_z\Gamma(\alpha+z)\Gamma(\beta+z)\Gamma(\gamma-z)\Gamma(\delta-z)dz$$

を用いれば定理1.36が次のように得られる.

定理1.36の証明. 帰納法を仮定する. まず命題1.38をBarnesの第一補題 (命題1.34) が使える形に書き直す. 命題1.38の C の変数をそれぞれ $j=1,2,\dots,n-2$ に対して

(1.39)
$$\alpha_j=s_j,\ \beta_j=s_{j+1}+a_1,\ \gamma_j=t_{j-1}+a_2,\ \delta_j=t_j$$

を用いて次のように表わし, 補題を適用する.

$$\begin{aligned}&T_{n,a}(s)\cdot\frac{(2\pi i)^{n-3}\Gamma_a\Gamma_b}{\pi^{\nu_a+\nu_b}\Gamma(s_1+a_1)\Gamma(s_{n-1}-a_1)}\\&=\int_t\prod_{j=1}^{n-2}C(\alpha_j+\gamma_j,\ \alpha_j+\delta_j,\ \alpha_j+\beta_j+\gamma_j+\delta_j)\cdot T_{n-2,c}\left(\hat{t}\,\right)dt\\&=\int_t\prod_{j=1}^{n-2}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{z_j}\Gamma(\alpha_j+z_j)\Gamma(\beta_j+z_j)\Gamma(\gamma_j-z_j)\Gamma(\delta_j-z_j)dz_j\right)T_{n-2,c}\left(\hat{t}\,\right)dt.\end{aligned}$$

ここで積分の順序を変更し $\alpha_j,\ \beta_j,\ \gamma_j,\ \delta_j$ をもどせば次のようになる. $t_0=0,\ t_{n-2}=-(a_1+a_2)$ に注意して

$$
\begin{aligned}
&T_{n,a}(s)\cdot\frac{(2\pi i)^{n-2}\Gamma_a}{\pi^{\nu_a}\Gamma(s_1+a_1)\Gamma(s_{n-1}-a_1)}\\
&=\int_z\prod_{j=1}^{n-2}\Gamma(\alpha_j+z_j)\Gamma(\beta_j+z_j)\left[\frac{\pi^{\nu_b}}{(2\pi i)^{n-3}\Gamma_b}\int_t\prod_{j=1}^{n-2}\Gamma(\delta_j-z_j)\Gamma(\gamma_j-z_j)T_{n-2,c}\left(\hat{t}\right)dt\right]dz\\
&=\int_z\prod_{j=1}^{n-2}\Gamma(s_j+z_j)\Gamma(s_{j+1}+a_1+z_j)\\
&\cdot\left[\frac{\pi^{\nu_b}\Gamma(a_2-z_1)\Gamma(-z_{n-2}-a_1-a_2)}{(2\pi i)^{n-3}\Gamma_b}\int_t\prod_{j=1}^{n-3}\Gamma(t_j-z_j)\Gamma(t_j+a_2-z_{j+1})T_{n-2,c}\left(\hat{t}\right)dt\right]dz
\end{aligned}
$$

となる. まず先にこの括弧 $[\cdot]$ 内の t での積分が $T_{n-1,b}(-z)$ となることをみていく. 対称性をもつように $t_j\to t_j-\frac{j(a_1+a_2)}{n-2}(j=1,2,\dots,n-3),\ z_j\to z_j-\frac{j}{n-1}a_1(j=1,2,\dots,n-2)$ と変数変換すれば次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\pi^{\nu_b}\Gamma(a_2-z_1)\Gamma(-z_{n-2}-a_1-a_2)}{(2\pi i)^{n-3}\Gamma_b}\int_t\prod_{j=1}^{n-3}\Gamma(t_j-z_j)\Gamma(t_j+a_2-z_{j+1})T_{n-2,c}\left(\hat{t}\right)dt\\
=&\frac{\pi^{\nu_b}\Gamma\left(-z_1+(a_2+\frac{a_1}{n-1})\right)\Gamma\left(-z_{n-2}-(a_2+\frac{a_1}{n-1})\right)}{(2\pi i)^{n-3}\Gamma_b}\\
&\times\int_t\prod_{j=1}^{n-3}\Gamma\left(t_j-z_j-\frac{j(a_2+\frac{a_1}{n-1})}{n-2}\right)\Gamma\left(t_j-z_{j+1}+\frac{(n-2-j)(a_2+\frac{a_1}{n-1})}{n-2}\right)\\
&\times T_{n-2,c}\left(-t\right)dt\\
=&\frac{\pi^{\nu_b}\Gamma\left(-z_1+b_1\right)\Gamma\left(-z_{n-2}-b_1\right)}{(2\pi i)^{n-3}\Gamma_b}\\
&\times\int_t\prod_{j=1}^{n-3}\Gamma\left(t_j-z_j-\frac{jb_1}{n-2}\right)\Gamma\left(t_j-z_{j+1}+\frac{(n-2-j)b_1}{n-2}\right)T_{n-2,c}\left(-t\right)dt\\
=&T_{n-1,b}(-z).
\end{aligned}
$$

ここで 2 つ目の等号は $b_1=a_2+\frac{a_1}{n-1}$ を代入しただけで, 最後の等号は帰納法の仮定より従う.

残りの部分は $z_j\to z_j-\frac{j}{n-1}a_1(j=1,2,\dots,n-3)$ と変数変換したことに注意すれば

$$
\begin{aligned}
T_{n,a}(s)=&\frac{\pi^{\nu_a}\Gamma(s_1+a_1)\Gamma(s_{n-1}-a_1)}{(2\pi i)^{n-2}\Gamma_a}\\
&\times\int_z\prod_{j=1}^{n-2}\Gamma\left(s_j+z_j-\frac{ja_1}{n-1}\right)\Gamma\left(s_{j+1}+z_j+\frac{(n-1-j)a_1}{n-1}\right)T_{n-1,b}(-z)dz
\end{aligned}
$$

となりこれは主張の関数に一致する. □

定理 1.35 の証明. まず Mellin 反転公式 (命題 1.15) に定理 1.36 を代入すれば次のようになる.

(1.40)

$$
\begin{aligned}
W_{n,a}(y) =& \frac{y^{\rho_n}}{(2\pi i)^{n-1}} \int_s T_{n,a}(s) \prod_{j=1}^{n-1} (\pi y_j)^{-2s_j} ds \\
=& \frac{y^{\rho_n}}{(2\pi i)^{n-1}} \int_s \frac{\pi^{\nu_a}}{(2\pi i)^{n-2}\Gamma_a} \int_z T_{n-1,b}(-z) \\
& \times \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma\left(s_j + z_{j-1} + \frac{n-j}{n-1}a_1\right) \Gamma\left(s_j + z_j - \frac{j}{n-1}a_1\right) dz \prod_{j=1}^{n-1} (\pi y_j)^{-2s_j} ds \\
=& \frac{\pi^{\nu_a} y^{\rho_n}}{(2\pi i)^{n-2}\Gamma_a} \int_z \prod_{j=1}^{n-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{s_j} \Gamma\left(s_j + z_{j-1} + \frac{n-j}{n-1}a_1\right) \Gamma\left(s_j + z_j - \frac{j}{n-1}a_1\right) \right. \\
& \left. \times (\pi y_j)^{-2s_j} ds_j \right] T_{n-1,b}(-z)\, dz.
\end{aligned}
$$

ここで $j = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $s_j + z_{j-1} + \frac{n-j}{n-1}a_1 = (t_j + \nu_j)/2,\ s_j + z_j - \frac{j}{n-1}a_1 = (t_j - \nu_j)/2$ とおけば $t_j = 2s_j + z_{j-1} + z_j + \frac{n-2j}{n-1}a_1,\ \nu_j = z_{j-1} - z_j + \frac{n}{n-1}a_1$ であるから上の式の s_j での積分は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{s_j} \Gamma\left(s_j + z_{j-1} + \frac{n-j}{n-1}a_1\right) \Gamma\left(s_j + z_j - \frac{j}{n-1}a_1\right) (\pi y_j)^{-2s_j} ds_j \\
=& \frac{1}{2\pi i} \int_{t_j} \Gamma\left(\frac{t_j + \nu_j}{2}\right) \Gamma\left(\frac{t_j - \nu_j}{2}\right) (\pi y_j)^{-t_j + z_{j-1} + z_j + \frac{n-2j}{n-1}a_1} \frac{dt_j}{2}.
\end{aligned}
$$

これに命題 1.18 と系 1.24 から得られる K-Bessel 関数の表示式

$$
K_\nu(z) = \frac{1}{8\pi i} \int_t \Gamma\left(\frac{t+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{t-\nu}{2}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{-t} dt \qquad (\nu,\ z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 0).
$$

を用いれば次のようになる.

$$
\begin{aligned}
& \frac{(\pi y_j)^{z_{j-1} + z_j + \frac{n-2j}{n-1}a_1}}{4\pi i} \int_{t_j} \Gamma\left(\frac{t_j + \nu_j}{2}\right) \Gamma\left(\frac{t_j - \nu_j}{2}\right) \left(\frac{2\pi y_j}{2}\right)^{-t_j} dt_j \\
=& 2(\pi y_j)^{z_{j-1} + z_j + \frac{n-2j}{n-1}a_1} K_{\nu_j}(2\pi y_j) = (\pi y_j)^{z_{j-1} + z_j + \frac{n-2j}{n-1}a_1} \int_0^\infty u_j^{\nu_j} e^{-\pi y_j (u_j + u_j^{-1})} d^\times u_j.
\end{aligned}
$$

上の最後の式は K-Bessel 関数の定義式 (定義 1.17) を代入した. これを (1.40) に代入し積分の順序を変更すれば次のようになる.

$$
\begin{aligned}
& W_{n,a}(y) \cdot \frac{\Gamma_a}{\pi^{\nu_a}} \\
=& \frac{y^{\rho_n}}{(2\pi i)^{n-2}} \int_z \prod_{j=1}^{n-1} \left[(\pi y_j)^{z_{j-1} + z_j + \frac{n-2j}{n-1}a_1} \int_0^\infty u_j^{\nu_j} e^{-\pi y_j (u_j + u_j^{-1})} d^\times u_j \right] T_{n-1,b}(-z)\, dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&y^{\rho_n}\prod_{j=1}^{n-1}(\pi y_j)^{\frac{n-2j}{n-1}a_1}\int_{u\in\mathbb{R}_{>0}^{n-1}}\prod_{j=1}^{n-1}e^{-\pi y_j(u_j+u_j^{-1})}\\
&\times\left[\frac{1}{(2\pi i)^{n-2}}\int_z T_{n-1,b}\left(-z\right)\prod_{j=1}^{n-1}(\pi y_j)^{z_{j-1}+z_j}u_j^{z_{j-1}-z_j+\frac{n}{n-1}a_1}dz\right]d^\times u\\
=&\prod_{j=1}^{n-1}y_j^{\frac{j(n-j)}{2}+\frac{n-2j}{n-1}a_1}\int_{u\in\mathbb{R}_{>0}^{n-1}}\prod_{j=1}^{n-1}u_j^{\frac{n}{n-1}a_1}e^{-\pi y_j(u_j+u_j^{-1})}\\
&\times\left[\frac{1}{(2\pi i)^{n-2}}\int_z T_{n-1,b}\left(-z\right)\prod_{j=1}^{n-2}\left(\pi\sqrt{y_jy_{j+1}u_{j+1}/u_j}\right)^{2z_j}dz\right]d^\times u.
\end{aligned}
$$

ここで最後の等号において $\sum_{j=1}^{n-1}\frac{n-2j}{n-1}a_1=0,\ z_0=z_{n-1}=0$ であることに注意する. この最後の式の内側の z での積分は $z\to -z$ と変数変換すれば Mellin 反転公式 (命題 1.15) の形

$$
\frac{1}{(2\pi i)^{n-2}}\int_z T_{n-1,b}(z)\prod_{j=1}^{n-2}(\pi\hat{y}_j)^{-2s_j}ds=\frac{W_{n-1,b}(\hat{y})}{\hat{y}^{\rho_{n-1}}}
$$

である. ここでは $\hat{y}_j=\sqrt{y_jy_{j+1}u_{j+1}/u_j}(j=1,2,\ldots,n-2)$ であるから

$$
\hat{y}^{\rho_{n-1}}=\prod_{j=1}^{n-2}\left(\frac{y_jy_{j+1}u_{j+1}}{u_j}\right)^{\frac{(n-1-j)j}{4}}
$$

となる. 次に $u_j\to y_ju_j(j=1,2,\ldots,n-1)$ という変数変換を考えれば $\hat{y}_j\to y_{j+1}\sqrt{u_{j+1}/u_j}$ となり

$$
\hat{y}^{\rho_{n-1}}\to\prod_{j=1}^{n-2}\left(y_{j+1}^2\frac{u_{j+1}}{u_j}\right)^{\frac{(n-1-j)j}{4}}=\prod_{j=1}^{n-1}y_j^{\frac{(n-j)(j-1)}{2}}u_j^{-\frac{n-2j}{4}}
$$

となるから

$$
\begin{aligned}
W_{n,a}(y)\cdot\frac{\Gamma_a}{\pi^{\nu_a}}=&\prod_{j=1}^{n-1}y_j^{\frac{j(n-j)}{2}+\frac{n-2j}{n-1}a_1}\int_{u\in\mathbb{R}_{>0}^{n-1}}\prod_{j=1}^{n-1}u_j^{\frac{n}{n-1}a_1}e^{-\pi y_j(u_j+u_j^{-1})}\frac{W_{n-1,b}(\hat{y})}{\hat{y}^{\rho_{n-1}}}d^\times u\\
=&\prod_{j=1}^{n-1}y_j^{\frac{j(n-j)}{2}+\frac{n-2j}{n-1}a_1}\int_{u\in\mathbb{R}_{>0}^{n-1}}\prod_{j=1}^{n-1}(y_ju_j)^{\frac{n}{n-1}a_1}e^{-\pi(y_j^2u_j+u_j^{-1})}\cdot y_j^{-\frac{(n-j)(j-1)}{2}}u_j^{\frac{n-2j}{4}}\\
&\times W_{n-1,b}\left(y_1\sqrt{\frac{u_2}{u_1}},\ y_2\sqrt{\frac{u_3}{u_2}},\ldots,\ y_{n-1}\sqrt{\frac{u_{n-1}}{u_n}}\right)d^\times u\\
=&\prod_{j=1}^{n-1}y_j^{\frac{n-j}{2}+2\frac{n-j}{n-1}a_1}\int_{u\in\mathbb{R}_{>0}^{n-1}}e^{-\pi\sum_{j=1}^{n-1}(y_j^2u_j+u_j^{-1})}\prod_{j=1}^{n-1}u_j^{\frac{n-2j}{4}+\frac{n}{n-1}a_1}\\
&\times W_{n-1,b}\left(y_1\sqrt{\frac{u_2}{u_1}},\ y_2\sqrt{\frac{u_3}{u_2}},\ldots,\ y_{n-1}\sqrt{\frac{u_{n-1}}{u_n}}\right)d^\times u
\end{aligned}
$$

を得る. □

最後にクラス1 Whittaker 関数 $W_{n,a}$ の a に関する漸近的な挙動を確かめる. $a_j = u_j + iv_j,\ s_j = \sigma_j + i\tau_j,\ z_j = f_j + ig_j(\sigma_j,\ f_j \gg 0;\ j = 1, 2, \ldots, n-1)$ とおく. 帰納法により a_j の虚部に関する指数部分が漸近的に消えることを示す. つまり a_j の実部には依存するが虚部には依存しない定数 $C,\ l_j$ が存在して Mellin 変換の積分が

$$\int_s |T_{n,a}(s)||ds| \le C \prod_{j=1}^{n-1} |a_j|^{l_j} \qquad (|v_j| \gg 0) \tag{1.41}$$

と評価できることを示す. $n=2$ のときは (1.28) で既に確かめた. n が 3 以上のときは定理 1.36 により

(1.42)
$$|T_{n,a}(s)| = C \int_z \prod_{j=1}^{n-1} \left| \frac{\Gamma\left(s_j + z_{j-1} + \frac{n-j}{n-1}a_1\right)\Gamma\left(s_j + z_j - \frac{j}{n-1}a_1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + a_1 - a_{j+1}\right)} \right| |T_{n-1,b}(-z)||dz|$$

となる. このガンマ因子に $n=2$ のときと同様に Stirling の公式 (1.20) と偏角の評価 (1.25) を適用すれば $|v_j| \gg 0$ のとき

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{n-1} \left| \frac{\Gamma\left(s_j + z_{j-1} + \frac{n-j}{n-1}a_1\right)\Gamma\left(s_j + z_j - \frac{j}{n-1}a_1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + a_1 - a_{j+1}\right)} \right| \\
\le& C \prod_{j=1}^{n-1} \frac{|s_j + z_{j-1} + \frac{n-j}{n-1}a_1|^{\sigma_j + f_{j-1} + \frac{n-j}{n-1}u_1} \cdot |s_j + z_j - \frac{j}{n-1}a_1|^{\sigma_j + f_j - \frac{j}{n-1}u_1}}{|a_1 - a_{j+1}|^{u_1 - u_{j+1}}} \\
&\times \exp\left(\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\left(|v_1 - v_{j+1}| - \left|\tau_j + g_{j-1} + \frac{n-j}{n-1}v_1\right| - \left|\tau_j + g_j - \frac{j}{n-1}v_1\right|\right)\right)
\end{aligned}$$

となる. 今 $|v_1| \ge |v_k|(k = 2, 3, \ldots, n)$ であるからこの式の指数関数 exp の変数に現れる v_j の項は三角不等式により

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-1}\left(|v_1 - v_{j+1}| - \left|\tau_j + g_{j-1} + \frac{n-j}{n-1}v_1\right| - \left|\tau_j + g_j - \frac{j}{n-1}v_1\right|\right) \\
\le& |(n-1)v_1 - (v_2 + v_3 + \cdots + v_n)| \\
&- \left|\sum_{j=1}^{n-1}\left(\tau_j + g_{j-1} + \frac{n-j}{n-1}v_1\right) - \left(\tau_j + g_j - \frac{j}{n-1}v_1\right)\right| \\
=& n|v_1| - \left|\sum_{j=1}^{n-1}\left(g_{j-1} - g_j + \frac{n}{n-1}v_1\right)\right| = 0
\end{aligned}$$

と上から評価できる. ここで a の取り方から $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0$ であることと $z_0 = z_{n-1} = 0$ とおいたので $g_0 = g_{n-1} = 0$ であることに注意する. したがって (1.42)

のガンマ因子は a_j の虚部 v_j に関して漸近的には多項式的に振舞うことが分かる. さらに帰納法の仮定より

$$\int_z |T_{n-1,b}(-z)||dz| \leq C' \prod_{j=1}^{n-2} |b_j|^{l'_j} = C \prod_{j=1}^{n-1} |a_j|^{l_j} \qquad (|v_j| \gg 0)$$

となるような定数 C, l_j が存在するから (1.41) が成り立つ.

よって Mellin 反転公式 (命題 1.15) により

$$|W_{n,a}(y)| \leq C y^{\rho_n} \prod_{j=1}^{n-1} y_j^{-2\sigma_j} \int_s |T_{n,a}(s)||ds| \leq C y^{\rho_n} \prod_{j=1}^{n-1} y_j^{-2\sigma_j} |a_j|^{l_j}$$

となるからクラス 1 Whittaker 関数 $W_{n,a}$ は a に関して漸近的には多項式的に振舞うことが分かる.

2　$GL(n,\mathbb{R})$ 上の基本 Whittaker 関数

ここでは $GL(n,\mathbb{R})$ 上の基本 Whittaker 関数の帰納的な明示公式について解説する．

2.1　基本 Whittaker 関数の定義

n を 2 以上の整数とする．ここではタイプ $a \in \mathbb{C}^n$, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ に $a_i - a_j \notin \mathbb{Z}(1 \le i \neq j \le n)$ という条件を加える．

定義 2.1 (係数 $c_{n,m}$)**.** $m = (m_1, \ldots, m_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{n-1}$ に対し基本 Whittaker 関数の係数 $c_{n,m}$ を帰納的に次で定義する．

$$(2.2)\qquad \left(\sum_{i=1}^{n-1} m_i^2 - \sum_{i=1}^{n-2} m_i m_{i+1} + \sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})m_i\right) c_{n,m}(a) = \sum_{i=1}^{n-1} c_{n,m-e_i}(a).$$

初期条件は $c_{n,0}(a) = 1$, $c_{n,m-e_i}(a) = 0 (m_i = 0)$ とする．ただし e_i は $\mathbb{R}^{n-1}$ の標準基底とし, $n = 2$ のときは左辺の二つ目の和は 0 とみなすものとする．

定義 2.3 (基本 Whittaker 関数 $M_{n,a}$)**.** タイプ a の基本 Whittaker 関数 $M_{n,a} : Y_n \to \mathbb{C}$ を次で定義する．$y = \mathrm{diag}(y_1 y_2 \cdots y_{n-1},\ y_2 y_3 \cdots y_{n-1}, \ldots,\ y_{n-1},\ 1) \in Y_n$ に対し

$$\begin{aligned} M_{n,a}(y) &= M_{n,a}(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \\ &= y^{\rho_n} \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{n-1}} \left(c_{n,m}(a) \prod_{j=1}^{n-1} (\pi y_j)^{2(m_j + a_1 + a_2 + \cdots + a_j)} \right). \end{aligned}$$

次に $n = 2$ のときの基本 Whittaker 関数が本質的に I-Bessel 関数になることを示す．

定義 2.4 (I-Bessel 関数 I_ν)**.** I-Bessel 関数 I_ν を次で定義する．

$$I_\nu(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \qquad (\nu,\ s \in \mathbb{C}).$$

命題 2.5. $a = (a_1,\ -a_1) \in \mathbb{C}^2$, $y = \mathrm{diag}(y_1,\ 1) \in Y_n$ とする．このとき次が成り立つ．

$$M_{2,a}(y) = \Gamma(2a_1 + 1)\sqrt{y_1} I_{2a_1}(2\pi y_1).$$

証明. まずは係数 $c_{2,m}$ を求める．$c_{2,m}$ は次の漸化式で決まる．

$$\left(m_1^2 + (a_1 - a_2)m_1\right) c_{2,m}(a) = c_{2,m-e_1}(a).$$

また $c_{2,0}(a) = 1$ であるから $m_1 > 0$ のとき

$$\begin{aligned} c_{2,m}(a) &= \frac{c_{2,m-e_1}(a)}{m_1\,(m_1 + 2a_1)} = \cdots = \frac{c_{2,0}(a)}{m_1!\,(m_1 + 2a_1)\,(m_1 - 1 + 2a_1)\cdots(2a_1 + 1)} \\ &= \frac{1}{m_1!(2a_1+1)_{m_1}} = \frac{\Gamma(2a_1+1)}{m_1!\Gamma(m_1 + 2a_1 + 1)} \end{aligned}$$

となる．ここで $(2a_1+1)_{m_1} = \Gamma(m_1+2a_1+1)/\Gamma(2a_1+1)$ は定義 1.29 で定義した Pockhammer の記号である．これは $m_1=0$ のときも成り立つ．

例 1.8 より $y^{\rho_2} = \sqrt{y_1}$ であるから次のようにして主張が得られる．

$$\begin{aligned} M_{2,a}(y) &= y^{\rho_2} \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} c_{2,m}(a)(\pi y_1)^{2(m_1+a_1)} = \sqrt{y_1} \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \frac{\Gamma(2a_1+1)}{m_1!\Gamma(m_1+2a_1+1)} (\pi y_1)^{2(m_1+a_1)} \\ &= \Gamma(2a_1+1)\sqrt{y_1} \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{(\pi y_1)^{2m_1+2a_1}}{m_1!\Gamma(m_1+2a_1+1)} = \Gamma(2a_1+1)\sqrt{y_1} I_{2a_1}(2\pi y_1). \end{aligned}$$

□

2.2 基本 Whittaker 関数の帰納的な明示公式

ここではもう一つの主定理である基本 Whittaker 関数の帰納的な明示公式について述べる．n を 3 以上の整数とし, $1 \leq t \leq n$ となる整数 t を一つ固定する．クラス 1 のときと同様に $GL(n,\mathbb{R})$ のタイプ a に対して $GL(n-1,\mathbb{R})$ のタイプ b を

$$b = (b_1, \ldots, b_{n-1}) = \left(a_1 + \frac{a_t}{n-1}, \ldots,\ a_{t-1} + \frac{a_t}{n-1},\ a_{t+1} + \frac{a_t}{n-1}, \ldots,\ a_n + \frac{a_t}{n-1} \right)$$

で定める．

定理 2.6 (Ishii-Stade[4], 主定理 2)**.** n を 3 以上の整数, t を $1 \leq t \leq n$ となる整数, $a \in \mathbb{C}^n, a_1 + \cdots + a_n = 0,\ a_i - a_j \notin \mathbb{Z}$, $y \in Y_n$ とする．このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned} M_{n,a}(y) =& y^{\rho_n} \prod_{j=1}^{t-1} \Gamma(a_j - a_t + 1) \prod_{j=t}^{n-1} \Gamma(a_t - a_{j+1} + 1) \\ & \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-2}} c_{n-1,k}(b) \prod_{j=1}^{n-1} (\pi y_j)^{\tilde{k}_{j-1}+\tilde{k}_j} \prod_{j=1}^{t-1} I_{-\tilde{k}_{j-1}+\tilde{k}_j-\frac{na_t}{n-1}}(2\pi y_j) \prod_{j=t}^{n-1} I_{\tilde{k}_{j-1}-\tilde{k}_j+\frac{na_t}{n-1}}(2\pi y_j). \end{aligned}$$

ここで $\tilde{k}_j = k_j + \sum_{i=1}^{j} b_i (j = 1, 2, \ldots, n-2),\ \tilde{k}_0 = \tilde{k}_{n-1} = 0$ とする．

この証明は次のように係数 $c_{n,m}$ を帰納的に表すことが本質的である．まず $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1},\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-2},\ k_0 = k_{n-1} = 0$ に対して次のようにおく．

$$\begin{aligned} P_{m,k} = P_{m,k}(a) &= \prod_{j=1}^{t-1} (m_j - k_j)!(a_j - a_t + 1)_{m_j - k_{j-1}}, \\ Q_{m,k} = Q_{m,k}(a) &= \prod_{j=t}^{n-1} (m_j - k_{j-1})!(a_t - a_{j+1} + 1)_{m_j - k_j}. \end{aligned}$$

ただし k の取りうる範囲は次のようにする.

$$k_j \le \begin{cases} m_j & (1 \le j \le t-2), \\ \min(m_{t-1},\ m_t) & (j = t-1), \\ m_{j+1} & (t \le j \le n-2). \end{cases} \tag{2.7}$$

定理 2.8 (Ishii-Stade[4], Theorem 15)**.** n を 3 以上の整数, t を $1 \le t \le n$ となる整数, $m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{n-1},\ a \in \mathbb{C}^n, a_1 + \cdots + a_n = 0,\ a_i - a_j \notin \mathbb{Z}$ とする. このとき次が成り立つ.

$$c_{n,m}(a) = \sum_k \frac{c_{n-1,k}(b)}{P_{m,k}Q_{m,k}}.$$

ここで和 $\sum_k$ は (2.7) を満たすような非負整数の組全体を動く.

証明. 主張に対する係数の条件 (2.2) は次のようになる.

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n-1} m_i^2 - \sum_{i=1}^{n-2} m_i m_{i+1} + \sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})m_i\right)\sum_k \frac{c_{n-1,k}(b)}{P_{m,k}Q_{m,k}} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_k \frac{c_{n-1,k}(b)}{P_{m-e_i,k}Q_{m-e_i,k}} \\
&= \sum_{i=1}^{t-1}\sum_k \frac{c_{n-1,k}(b)}{P_{m,k}Q_{m,k}}\frac{P_{m,k}}{P_{m-e_i,k}} + \sum_{i=t}^{n-1}\sum_k \frac{c_{n-1,k}(b)}{P_{m,k}Q_{m,k}}\frac{Q_{m,k}}{Q_{m-e_i,k}} \\
&= \sum_k \frac{c_{n-1,k}(b)}{P_{m,k}Q_{m,k}}\left(\sum_{i=1}^{t-1}\frac{P_{m,k}}{P_{m-e_i,k}} + \sum_{i=t}^{n-1}\frac{Q_{m,k}}{Q_{m-e_i,k}}\right).
\end{aligned}$$

つまり次を示せばよい.

(2.9)

$$\begin{aligned}
&\sum_k \frac{c_{n-1,k}(b)}{P_{m,k}Q_{m,k}} \\
&\times\left[\sum_{i=1}^{n-1} m_i^2 - \sum_{i=1}^{n-2} m_i m_{i+1} + \sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})m_i - \left(\sum_{i=1}^{t-1}\frac{P_{m,k}}{P_{m-e_i,k}} + \sum_{i=t}^{n-1}\frac{Q_{m,k}}{Q_{m-e_i,k}}\right)\right] = 0.
\end{aligned}$$

まず $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{n-2},\ k_0 = k_{n-1} = 0$ に対して次が成り立つことに注意する.

$$\begin{aligned}
\frac{P_{m,k}}{P_{m-e_i,k}} &= (m_i - k_i)(m_i - k_{i-1} + a_i - a_t) && (i = 1, 2, \ldots, t-1), \\
\frac{Q_{m,k}}{Q_{m-e_i,k}} &= (m_i - k_{i-1})(m_i - k_i + a_t - a_{i+1}) && (i = t, t+1, \ldots, n-1), \\
\frac{P_{m,k}}{P_{m,k+e_i}} &= (m_i - k_i)(m_{i+1} - k_i + a_{i+1} - a_t) && (i = 1, 2, \ldots, t-1), \\
\frac{Q_{m,k}}{Q_{m,k+e_i}} &= (m_{i+1} - k_i)(m_i - k_i + a_t - a_{i+1}) && (i = t, t+1, \ldots, n-2).
\end{aligned}$$

これらは i 番目の成分に注目すればそれぞれ次のようになるからである.

$$
\begin{aligned}
\frac{P_{m,k}}{P_{m-e_i,k}} &= \frac{(m_i-k_i)!(a_i-a_t+1)_{m_i-k_{i-1}}}{(m_i-k_i-1)!(a_i-a_t+1)_{m_i-k_{i-1}-1}},\\
\frac{Q_{m,k}}{Q_{m-e_i,k}} &= \frac{(m_i-k_{i-1})!(a_t-a_{i+1}+1)_{m_i-k_i}}{(m_i-k_{i-1}-1)!(a_t-a_{i+1}+1)_{m_i-k_i-1}},\\
\frac{P_{m,k}}{P_{m,k+e_i}} &= \frac{(m_i-k_i)!(a_{i+1}-a_t+1)_{m_{i+1}-k_i}}{(m_i-k_i-1)!(a_{i+1}-a_t+1)_{m_{i+1}-k_i-1}},\\
\frac{Q_{m,k}}{Q_{m,k+e_i}} &= \frac{(m_{i+1}-k_i)!(a_t-a_{i+1}+1)_{m_i-k_i}}{(m_{i+1}-k_i-1)!(a_t-a_{i+1}+1)_{m_i-k_i-1}}.
\end{aligned}
$$

これらより次のような関係が求められる.

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{t-1}\frac{P_{m,k}}{P_{m-e_i,k}}+\sum_{i=t}^{n-1}\frac{Q_{m,k}}{Q_{m-e_i,k}}\right)-\left(\sum_{i=1}^{t-1}\frac{P_{m,k}}{P_{m,k+e_i}}+\sum_{i=t}^{n-2}\frac{Q_{m,k}}{Q_{m,k+e_i}}\right)\\
&=\left(\sum_{i=1}^{t-1}(m_i-k_i)(m_i-k_{i-1}+a_i-a_t)+\sum_{i=t}^{n-1}(m_i-k_{i-1})(m_i-k_i+a_t-a_{i+1})\right)\\
&\quad-\left(\sum_{i=1}^{t-1}(m_i-k_i)(m_{i+1}-k_i+a_{i+1}-a_t)+\sum_{i=t}^{n-2}(m_{i+1}-k_i)(m_i-k_i+a_t-a_{i+1})\right)\\
&=\sum_{i=1}^{t-1}(m_i^2-k_{i-1}m_i+a_im_i-a_tm_i-k_im_i+k_{i-1}k_i-a_ik_i+a_tk_i)\\
&\quad+\sum_{i=t}^{n-1}(m_i^2-k_im_i+a_tm_i-a_{i+1}m_i-k_{i-1}m_i+k_{i-1}k_i-a_tk_{i-1}+a_{i+1}k_{i-1})\\
&\quad-\sum_{i=1}^{t-1}(m_im_{i+1}-k_im_i+a_{i+1}m_i-a_tm_i-k_im_{i+1}+k_i^2-a_{i+1}k_i+a_tk_i)\\
&\quad-\sum_{i=t}^{n-2}(m_im_{i+1}-k_im_{i+1}+a_tm_{i+1}-a_{i+1}m_{i+1}-k_im_i+k_i^2-a_tk_i+a_{i+1}k_i)\\
&=\left(\sum_{i=1}^{n-1}m_i^2-\sum_{i=1}^{n-2}m_im_{i+1}+\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})m_i\right)\\
&\quad-\left(\sum_{i=1}^{n-2}k_i^2-\sum_{i=1}^{n-3}k_ik_{i+1}+\sum_{i=1}^{n-2}(b_i-b_{i+1})k_i\right).
\end{aligned}
$$

上の最後の等号で次のことに注意しておく.

$$
b_i-b_{i+1}=\begin{cases} a_i-a_{i+1} & (1\le i\le t-2),\\ a_{t-1}-a_{t+1} & (i=t-1),\\ a_{i+1}-a_{i+2} & (t\le i\le n-2).\end{cases}
$$

よって (2.9) の括弧 [·] 内の和は次のように帰納的に表せる.

$$\begin{aligned}(2.10)\quad &\sum_{i=1}^{n-1} m_i^2 - \sum_{i=1}^{n-2} m_i m_{i+1} + \sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1}) m_i - \left(\sum_{i=1}^{t-1} \frac{P_{m,k}}{P_{m-e_i,k}} + \sum_{i=t}^{n-1} \frac{Q_{m,k}}{Q_{m-e_i,k}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} k_i^2 - \sum_{i=1}^{n-3} k_i k_{i+1} + \sum_{i=1}^{n-2}(b_i - b_{i+1}) k_i - \left(\sum_{i=1}^{t-1} \frac{P_{m,k}}{P_{m,k+e_i}} + \sum_{i=t}^{n-2} \frac{Q_{m,k}}{Q_{m,k+e_i}}\right).\end{aligned}$$

さらに $c_{n-1,k}$ は係数の条件 (2.2)

$$\left(\sum_{i=1}^{n-2} k_i^2 - \sum_{i=1}^{n-3} k_i k_{i+1} + \sum_{i=1}^{n-2}(b_i - b_{i+1}) k_i\right) c_{n-1,k}(b) = \sum_{i=1}^{n-2} c_{n-1,k-e_i}(b)$$

を満たすから (2.9) を (2.10) で書き直したときの前半の項は

$$\sum_k \frac{c_{n-1,k}(b)}{P_{m,k} Q_{m,k}} \left(\sum_{i=1}^{n-2} k_i^2 - \sum_{i=1}^{n-3} k_i k_{i+1} + \sum_{i=1}^{n-2}(b_i - b_{i+1}) k_i\right) = \sum_k \sum_{i=1}^{n-2} \frac{c_{n-1,k-e_i}(b)}{P_{m,k} Q_{m,k}}$$

となる. またその後半の項は和の順番を変えた後に $k \to k - e_i$ という変換をすれば

$$\begin{aligned}&\sum_k \frac{c_{n-1,k}(b)}{P_{m,k} Q_{m,k}} \left(\sum_{i=1}^{t-1} \frac{P_{m,k}}{P_{m,k+e_i}} + \sum_{i=t}^{n-2} \frac{Q_{m,k}}{Q_{m,k+e_i}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{t-1} \sum_k \frac{c_{n-1,k}(b)}{P_{m,k+e_i} Q_{m,k}} + \sum_{i=t}^{n-2} \sum_k \frac{c_{n-1,k}(b)}{P_{m,k} Q_{m,k+e_i}} = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_k \frac{c_{n-1,k-e_i}(b)}{P_{m,k} Q_{m,k}}\end{aligned}$$

となる. これらの項が一致するので (2.9) が成り立つ. □

定理 2.6 の証明. 基本 Whittaker 関数の定義 2.3 に定理 2.8 を代入して

$$m_j \to \begin{cases} m_j + k_j & (1 \le j \le t-1), \\ m_j + k_{j-1} & (t \le j \le n-1) \end{cases}$$

と変数変換すれば次のようになる.

$$\begin{aligned}M_{n,a}(y) =& y^{\rho_n} \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{n-1}} \left(\sum_k \frac{c_{n-1,k}(b)}{P_{m,k} Q_{m,k}} \prod_{j=1}^{n-1} (\pi y_j)^{2(m_j + a_1 + a_2 + \cdots + a_j)}\right) \\ =& y^{\rho_n} \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{n-1}} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{n-2}} c_{n-1,k}(b) \\ &\cdot \left(\prod_{j=1}^{t-1} \frac{(\pi y_j)^{2(m_j + k_j + \sum_{i=1}^{j} a_i)}}{m_j! (a_j - a_t + 1)_{m_j + k_j - k_{j-1}}}\right) \left(\prod_{j=t}^{n-1} \frac{(\pi y_j)^{2(m_j + k_{j-1} + \sum_{i=1}^{j} a_i)}}{m_j! (a_t - a_{j+1} + 1)_{m_j + k_{j-1} - k_j}}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&y^{\rho_n}\sum_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-2}} c_{n-1,k}(b)\\
&\times\left(\prod_{j=1}^{t-1}\Gamma(a_j-a_t+1)(\pi y_j)^{k_{j-1}+k_j+2\sum_{i=1}^{j-1}a_i+a_j+a_t}\right.\\
&\left.\times\sum_{m_j=0}^{\infty}\frac{(\pi y_j)^{2m_j-k_{j-1}+k_j+a_j-a_t}}{m_j!\Gamma(m_j-k_{j-1}+k_j+a_j-a_t+1)}\right)\\
&\times\left(\prod_{j=t}^{n-1}\Gamma(a_t-a_{j+1}+1)(\pi y_j)^{k_{j-1}+k_j+2\sum_{i=1}^{j}a_i+a_{j+1}-a_t}\right.\\
&\left.\times\sum_{m_j=0}^{\infty}\frac{(\pi y_j)^{2m_j+k_{j-1}-k_j+a_t-a_{j+1}}}{m_j!\Gamma(m_j+k_{j-1}-k_j+a_t-a_{j+1}+1)}\right)\\
=&y^{\rho_n}\prod_{j=1}^{t-1}\Gamma(a_j-a_t+1)\prod_{j=t}^{n-1}\Gamma(a_t-a_{j+1}+1)\\
&\times\sum_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-2}} c_{n-1,k}(b)\prod_{j=1}^{t-1}(\pi y_j)^{k_{j-1}+k_j+2\sum_{i=1}^{j-1}a_i+a_j+a_t}\prod_{j=t}^{n-1}(\pi y_j)^{k_{j-1}+k_j+2\sum_{i=1}^{j}a_i+a_{j+1}-a_t}\\
&\times\prod_{j=1}^{t-1}I_{-k_{j-1}+k_j+a_j-a_t}(2\pi y_j)\prod_{j=t}^{n-1}I_{k_{j-1}-k_j+a_t-a_{j+1}}(2\pi y_j)\\
=&\prod_{j=1}^{t-1}\Gamma(a_j-a_t+1)\prod_{j=t}^{n-1}\Gamma(a_t-a_{j+1}+1)\prod_{j=1}^{n-1}y_j^{\frac{j(n-j)}{2}+\frac{n-2j}{n-1}a_j}\\
&\times\sum_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-2}} c_{n-1,k}(b)\prod_{j=1}^{n-1}(\pi y_j)^{\tilde{k}_{j-1}+\tilde{k}_j}\prod_{j=1}^{t-1}I_{-\tilde{k}_{j-1}+\tilde{k}_j-\frac{na_t}{n-1}}(2\pi y_j)\prod_{j=t}^{n-1}I_{\tilde{k}_{j-1}-\tilde{k}_j+\frac{na_t}{n-1}}(2\pi y_j).
\end{aligned}
$$

上の等号で次のことに注意しておく.

$$
\begin{aligned}
&-\tilde{k}_{j-1}+\tilde{k}_j-\frac{na_t}{n-1}=-k_{j-1}+k_j+b_j-\frac{na_t}{n-1}\\
=&-k_{j-1}+k_j-a_t+\begin{cases} a_j & (1\leq j\leq t-1),\\ a_{j+1} & (t\leq j\leq n-1),\end{cases}\\
&\tilde{k}_{j-1}+\tilde{k}_j=k_{j-1}+k_j+2\sum_{i=1}^{j-1}b_i+b_j\\
=&k_{j-1}+k_j+2\sum_{i=1}^{j-1}a_i+\frac{2j-1}{n-1}a_t+\begin{cases} a_j & (1\leq j\leq t-1),\\ a_{t+1} & (j=t),\\ a_{j+1}-2a_t+2a_j & (t+1\leq j\leq n-1).\end{cases}
\end{aligned}
$$

□

参考文献

[1] D.Bump, Automorphic Form on $GL(3,\mathbb{R})$, Lecture Notes in Math., vol. 1083, Springer, 1984.

[2] D.Goldfeld, Automorphic forms and L-functions for the group $GL(n,\mathbb{R})$, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[3] T.Ishii, A remark on Whittaker functions on $SL(n,\mathbb{R})$, Ann. Inst. Fourier 55 (2005) 483–492.

[4] T.Ishii and E.Stade, New formulas for Whittaker functions on $GL(n,\mathbb{R})$, J.Funct. Anal. **244**(2007), 289–314.

[5] T.Shintani, On an explicit formula for class-1 “ Whittaker functions ” on GL_n over β-adic fields, Proc. Japan Acad. Volume 52, Number 4 (1976), 180–182.

[6] E.Stade, On explicit integral formulas for $GL(n,\mathbb{R})$-Whittaker functions, Duke Math.J. 60(2) (1990) 313–362.

[7] E.Stade, Mellin transforms of Whittaker functions on $GL(4,\mathbb{R})$ and $GL(4,\mathbb{C})$, Manuscripta Math. 87 (1995) 511–526.

[8] E.Stade, Mellin transforms of $GL(n,\mathbb{R})$ Whittaker functions, Amer.J.Math. 123(2001)121–161.

[9] E.Whittaker and G.Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge Univ. Press, 1902.