ウエイト 3/2 の保型形式の q 展開係数と合同数問題について

京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻
修士 2 年
学籍番号：0530256521
片岡　悠希矢

2015 年 1 月 19 日

目次

本論文では特に断らない限り, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ で自然数の集合 $(= \{1, 2, 3, ...\})$, 整数の集合, 有理数の集合, 実数の集合, 複素数の集合を表す. また, $\mathbb{Q}_{>0}$ は正の有理数の集合を表す.

1 Introduction

本論文は Tunnell の論文の解説である．Tunnell は楕円曲線論, 保型形式, L 関数などを用いて, 自然数 n が合同数であることの必要条件を与えている．後に述べるが, 合同数問題はまだ解決されていない．主張だけ見ると極めて明快で初等的に思えるが, 奥に潜む証明は難解なものである．まず初めに合同数の定義を与える．

定義 1.1. 正の有理数 r が合同数であるとは, 面積が r となる 3 辺が有理数の直角三角形が存在するときにいう．

代数的に言えば r が合同数であることは

$$X^2 + Y^2 = Z^2, \quad \frac{1}{2}XY = r$$

を同時に満たす $X, Y, Z \in \mathbb{Q}$ が存在することである．任意の r に対して $n = s^2 r$ が平方因子を持たない自然数となるような $s \in \mathbb{Q}$ を見つけることができるので, 以後 n を平方因子を持たない正の整数としてよい．本論文では特に断らない限り n は平方因子を持たない自然数とする．ここでもし, 直角三角形の辺が整数なら n に対して有限個の可能性しかないので，n が合同数かどうか有限回で判定できる．しかし今, 辺は有理数を考えているので，そのままでは有限回で判定できない．Tunnell の定理は必要条件だが，有限回で判定できる条件を与えている．

以後, 3 辺が有理数である直角三角形を単に三角形と呼ぶことにする．またすべての辺が共通因子を持たない整数のとき原始的な三角形と呼び, すべての三角形は, 有理数の平方全体からなる部分群 $(\mathbb{Q}_{>0})^2$ を法として, 原始的な三角形を代表元としてとれることに注意しておく．

例 1.2. 5 は合同数であることをみる．Hardy & Wright [5, p.245-247, Theorem225] より原始的な三角形の辺を X, Y, Z (Z は斜辺) とおくと $X = a^2 - b^2$, $Y = 2ab$, $Z = a^2 + b^2$ となる $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ (ただし $(a, b) = 1, a > b$ で同時に奇数にならない) が存在する．このとき面積 S は $S = XY/2 = ab(a^2 - b^2)$ である．このことから $(a, b) = (2, 1)$ から根気よく探し出すと,

$$(a, b) = (5, 4) \text{ で } S = 5 \times 4 \times 9 = 5 \times 6^2 \equiv 5 \pmod{(\mathbb{Q}_{>0})^2}$$

となる．今 X, Y, Z はそれぞれ $9, 40, 41$ であるが面積は 180 なので各辺を 6 で割ると $3/2, 20/3, 41/6$ となり, これが面積 5 の三角形の辺である．

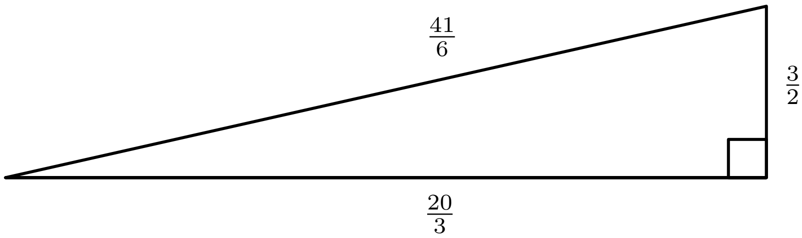

図 1　面積 5 の三角形.

上の例から分かるように 5 が合同数と判断できたのはたまたまである. 実際に出てこないときは, 単に調べきれてないだけなのか, 本当に合同数でないのか判断できないからである. 合同数であるかを判断する上で Tunnell の定理は大変優れたものであるが, 同値条件の一方が弱 BSD 予想を仮定しているので完全に解決したとはいえない.

定理 1.3 (**Tunnell**, [1])**.** n を平方因子を持たない正の奇数とし, 以下の 2 条件を考える.

(A) n は合同数.

(B) $\#\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid 2x^2+y^2+32z^2 = n\} = \frac{1}{2}\#\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid 2x^2+y^2+8z^2 = n\}$.

このとき (A) ならば (B) が成立する. さらに弱 BSD 予想が正しいならば逆も成り立つ.

同様に n を平方因子を持たない正の偶数とし, 以下の 2 条件を考える.

(C) n は合同数.

(D) $\#\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid 4x^2+y^2+32z^2 = n/2\} = \frac{1}{2}\#\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid 4x^2+y^2+8z^2 = n/2\}$.

このとき (C) ならば (D) が成立する. さらに弱 BSD 予想が正しいならば逆も成り立つ.

予想 1.4 (**弱 BSD 予想**, [2])**.** E を楕円曲線, $L(E,s)$ を楕円曲線 E の L 関数とする. このとき $L(E,1)=0$ と E が無限個の有理点を持つことは同値である.

楕円曲線と L 関数については後の節で触れることにし, ここでは主張のみに留める.

謝辞

本論文を書くにあたってご多忙の中, 執筆に関して助言をいただき全面的に指導してくださった雪江先生には心から感謝します.

2 Main theorem

今節で本論文の Main Theorem を述べる. 次の結果は Tunnell [1] により証明された.

定理 2.1 (Main Theorem). $q = e^{2\pi iz}$ とおく. 変数 q に関する形式的冪級数 g を

$$g(z) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{8n})(1-q^{16n})$$

とする. また正の整数 t に対して形式的冪級数 θ_t を

$$\theta_t(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} q^{tn^2}$$

とおく. $g\theta_2, g\theta_4$ を

$$g(z)\theta_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n, \quad g(z)\theta_4(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$$

としたとき以下が成り立つ.

(a) $a_n \neq 0$ なら n は合同数ではない.
(b) $b_n \neq 0$ なら $2n$ は合同数ではない.

$g\theta_2, g\theta_4$ の q 展開においては奇数冪しか出てこないことが簡単にわかる. したがって, Main Theorem より奇数 n については $g\theta_2$ を, 偶数 $2n$ については $g\theta_4$ を調べればいいことになる. ただ $(a), (b)$ の逆が成立するかは保証されていないので $a_n = 0$, $b_n = 0$ のときは何も言えないことに注意しておく. 後に詳しく解説するが $g\theta_2, g\theta_4$ はウエイト 3/2 のある保型形式の q 展開に対応している. Main Theorem の証明において核となるのは, q 展開の係数 a_n, b_n が楕円曲線 E_n(後で定義する) の L 関数の特殊値 $(s = 1)$ で表せることにある. Main Theorem を示す上で必要となる知識を次節以降でまとめていく.

3　楕円曲線

定義 3.1. K を体とする．E が K 上の楕円曲線であるとは, E 上のすべての K' 有理点で非特異であり, 種数 1 の射影曲線であるときにいう (K' は K のある拡大体である).

以下, 楕円曲線を考えるときには体の標数は 2 ではないと仮定する．$f(x)$ を K の元を係数に持つ重根を持たない 3 次多項式としたとき, 楕円曲線 E は一般に方程式

$$E : y^2 = f(x)$$

で表すことができる.

楕円曲線 E を $F(x,y) = y^2 - f(x) = 0$ と表したとき, 点 (x_0, y_0) で非特異であるとは各座標変数での偏微分 $\partial F/\partial x, \partial F/\partial y$ の点 (x_0, y_0) での値のうち少なくとも 1 つが 0 でないことをいう．$f(x)$ が重根を持たないという条件はすべての点で非特異ということに対応している．次に無限遠点を考えるために射影化を考える．これは複素平面に無限遠点を添加して Riemann 球面を作ることと類似している．$y^2 = f(x)$ の中のすべての単項式の次数が 3 になるように z を掛け同次多項式にする．例えば, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とすると, 斉次化することにより $F(x,y) = 0$ は,

$$\widetilde{F}(X,Y,Z) = Y^2Z - aX^3 - bX^2Z - cXZ^2 - dZ^3 = 0$$

となる．K^3 に同値関係

$$(X,Y,Z) \sim (X',Y',Z') \iff \text{ある } 0 \text{ でない } \lambda \in K \text{ が存在して, } (X',Y',Z') = \lambda(X,Y,Z)$$

を入れたものを $\mathbb{P}^2_K$ と書き，射影平面という (同値関係になることについては簡単のため省略する)．$\widetilde{F}(X,Y,Z) = 0$ は $\mathbb{P}^2_K$ 内の曲線を定め, 多項式上の点を射影平面 $\mathbb{P}^2_K$ 内で扱うことができる．$Z = 1$ とおけば元の $y^2 = f(x)$ が得られ, $Z = 0$ とすれば $X = 0$ となり, $(0, Y, 0)$ すなわち $(0, 1, 0)$ が出てくる．$(0, 1, 0)$ が楕円曲線の無限遠点であり以後 O と書く．また楕円曲線 E 上の K 有理点全体の集合を $E(K)$ と書くことにする.

楕円曲線の中でもこれから主に扱うのは

$$E_n : y^2 = x^3 - n^2x \tag{3.2}$$

という形のものである．$x^3 - n^2x = 0$ は確かに 3 つの異なる根 $0, \pm n$ を持っているので E_n は楕円曲線となっている.

命題 3.3. [7, p.7, Proposition2] n は合同数とする. 面積が n である三角形の 3 辺を X,Y,Z とする (X,Y,Z は斉次化したときの変数ではないことに注意する). このとき楕円曲線 E_n 上の有理点で以下を満たすものの集合を $E_n^*(\mathbb{Q})$ で定義する.

$$E_n^*(\mathbb{Q}) := \left\{ (x,y) \in E_n(\mathbb{Q}) \;\middle|\; \begin{array}{l} (1)\, x \in \mathbb{Q}^2. \\ (2)\, x \text{ の分母は偶数}. \\ (3)\, x \text{ の分子と } n \text{ は互いに素}. \end{array} \right\}. \tag{3.4}$$

このとき 3 辺 X,Y,Z と $E_n^*(\mathbb{Q})$ の間で以下の $1:1$ 対応がある.

$$\begin{aligned} X,Y,Z \ &\longmapsto \left(\left(\frac{Z}{2}\right)^2, \pm\frac{(Y^2-X^2)Z}{8} \right), \\ (x,\pm y) \ &\longmapsto X = \sqrt{x+n} - \sqrt{x-n}, \\ & Y = \sqrt{x+n} + \sqrt{x-n}, \\ & Z = 2\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Main Theorem を示すにはいくつか段階を踏む必要がある. まずは楕円曲線上の有理点の集合に群構造を入れる.

定義 3.5. 楕円曲線 E 上の点 P_1,P_2 の加法 $P_3 = P_1 + P_2$ を, P_1 と P_2 を結ぶ直線 l と E の 3 番目の交点を x 軸に関して対称移動した点とする.

[7, p.29-35] より, 単位元を O, $P=(x,y)$ の逆元を $-P=(x,-y)$ とすることで楕円曲線の有理点集合に群構造が入る. 幾何学的な定義になってしまったが, 代数的に述べると次のようになる.

$P_1,P_2 \neq O$ かつ $P_1+P_2 \neq O$ とする. 楕円曲線 E を $y^2 = f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ と書くとき, $P=(x_1,y_1), Q=(x_2,y_2), P+Q=(x_3,y_3)$ とおくと,

$$x_3 = -x_1 - x_2 - \frac{b}{a} + \frac{1}{a}\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)^2 \qquad (P_1 \neq P_2 \text{のとき}), \tag{3.6}$$

$$x_3 = -2x_1 - \frac{b}{a} + \frac{1}{a}\left(\frac{f'(x_1)}{2y_1}\right)^2 \qquad (P_1 = P_2 \text{のとき}), \tag{3.7}$$

$$y_3 = -y_1 + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1-x_3) \qquad (P_1 \neq P_2 \text{のとき}), \tag{3.8}$$

$$y_3 = -y_1 + \frac{f'(x_1)}{2y_1}(x_1-x_3) \qquad (P_1 = P_2 \text{のとき}) \tag{3.9}$$

となる. また, $nP = P+P+\cdots+P$(n 個の和) が O になるとき, P を位数 n の点と呼ぶことにする.

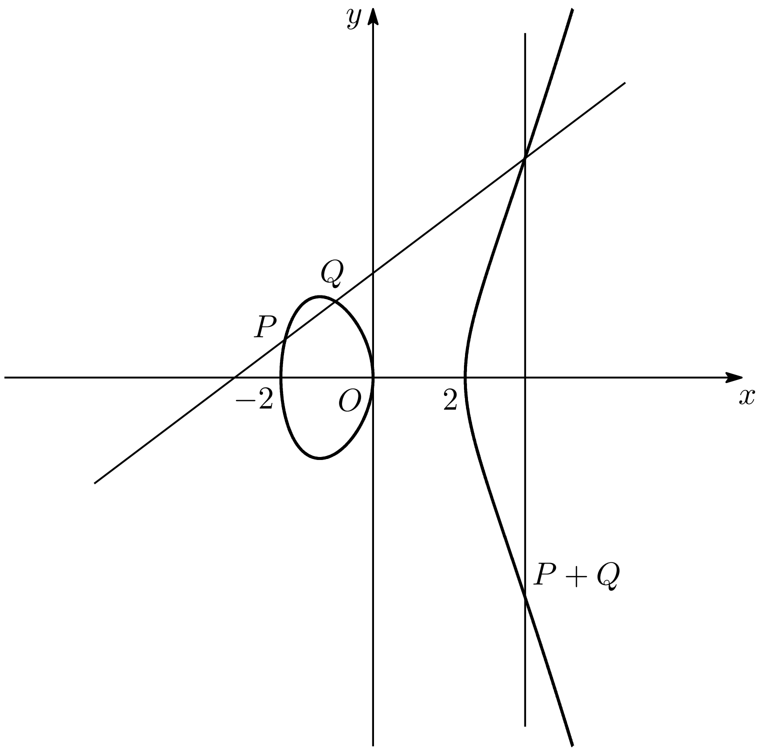

図 2　楕円曲線 E_2 上の加法演算.

例 3.10. 実際に複素数体 $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線 $E : y^2 = x^3 + 2$ の位数 3 の点を求めてみよう. E 上の点 $P \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ で $3P = 0$ となるものを見つければよい. 今 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 上の点を考えているので, 位数が 3 の約数である点全体のなす群は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ と同型であり, $3P = 0$ を満たす点は $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 内に $3^2 = 9$ 個あることに注意しておく. 1 つは無限遠点 O だから, 残りの 8 点を見つける.

$P = (p, q)$ を位数 3 の点とすると, $3P = 0$ より $2P = -P = (p, -q)$ が成り立つので, $2P$ の x 座標と P の x 座標は等しい. $2P = (r, s)$ と書くことにする.

加法公式 (3.7) を $a = 1, b = c = 0, d = 2, f'(x) = 3x^2$ で適用すると,

$$r = -2p + \left(\frac{3p^2}{2q}\right)^2 = \frac{-8pq^2 + 9p^4}{4q^2} = \frac{p(p^3 - 16)}{4(p^3 + 2)} \quad (\because q^2 = p^3 + 2)$$

となる. 先に述べたように, $p = r$ であることが必要条件だから, これを整理すると,

$$3p(p^3 + 8) = 0 \tag{3.11}$$

となる. (3.11) を解くと, $p = 0, -2, 1 \pm \sqrt{-3}$ となり, y 座標も合わせると,

$$P = (0, \pm\sqrt{2}), (-2, \pm\sqrt{-6}), (1 + \sqrt{-3}, \pm\sqrt{-6}), (1 - \sqrt{-3}, \pm\sqrt{-6})$$

の 8 点が得られる．この中に位数 3 の点が存在するが, 最初に述べたようにそのような点は 8 個存在するので, これらすべてが求める点である．

楕円曲線の有理点集合に群演算を認めたところで, Mordell の基本定理を紹介しよう．

定理 3.12 ([6], Mordell)**.** $E(\mathbb{Q})$ は有限生成アーベル群, すなわち $E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}}$ をねじれ部分群とすると,

$$E(\mathbb{Q}) \cong E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}} \oplus \mathbb{Z}^r$$

が成り立つ．

注 3.13. Mordell は基礎体が $\mathbb{Q}$ の場合を示したが, $\mathbb{Q}$ を任意の代数体 K に置き換えても成り立つことが Weil によって証明された．この一般化は Mordell-Weil の定理と呼ばれる．証明は [6, p.120-137] で与えられている．

Mordell の基本定理より, $E_n(\mathbb{Q})$ に無限個の有理点が存在することと自由部分の階数 r が正であることが同値だと分かる．さらに次の定理により 2 倍点集合のなす群 $2E_n(\mathbb{Q})$ が単位群でないことが n が合同数であることの必要十分条件である．

命題 3.14. [7, p.44, Proposition17] $E_n(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, すなわち E_n の有限位数の有理点は自明な 4 点 $(O, (0,0), (\pm n, 0))$ のみである．

さて楕円曲線に関する準備ができたところで楕円曲線と合同数問題を結びつける定理を紹介しよう．

定理 3.15. n が合同数であることは楕円曲線 E_n が無限個の有理点を持つことの必要十分条件である．

証明. n が合同数であると仮定する．先述したことより, 自明でない 2 倍点が存在することを示せばいい．定理 3.3 より面積 n の三角形 (3 辺は X, Y, Z) から $E_n^*(\mathbb{Q})$ の点が得られる．$x = (Z/2)^2$ は明らかに $0, \pm n$ ではないので位数 2 の点ではない．したがって定理 3.14 より無限個の有理点が存在する．

次に逆を示す．Mordell の基本定理より, 無限個の有理点が存在すれば, $P = (x, y)$ を無限位数の点として取ることができる．n が合同数となるためには定理 3.3 より, $E_n^*(\mathbb{Q})$ の点を見つければ良い．実際 $2P = (z, w)$ がそのような点になることを示す．演算の定義の $P_1, P_2 \neq O$ かつ $P_1 + P_2 \neq O$ の場合を $P_1 = P_2 = P$ として適用すると, (3.7) より $2P$

の x 座標は

$$\begin{aligned} z &= -2x + \left(\frac{3x^2-n^2}{2y}\right)^2 \\ &= \frac{-8xy^2+9x^4-6n^2x^2+n^4}{(2y)^2} \\ &= \left(\frac{x^2+n^2}{2y}\right)^2 \quad (\because y^2 = x^3 - n^2x) \end{aligned}$$

となるので (3.4) の条件 (1) は満たす. 条件 (2), (3) を確かめる.

まず (3.4) の条件 (2),

$$z = \left(\frac{x^2+n^2}{2y}\right)^2 = \frac{(x^2+n^2)^2}{4x(x^2-n^2)}$$

の分母が偶数であることをいう. p を素数として有理数 z の p の冪数を $\operatorname{ord}_p z$ と表すことにする. n は平方因子を持たないので, $\operatorname{ord}_2 n = 0$ または 1 である. 以下場合分けをする.

(ア) $\operatorname{ord}_2 x < \operatorname{ord}_2 n$ のとき

$x = k/2^s l$ ($s \geq 0,\ k, l$ は奇数), $n = 2^t m$ (t は 0 または 1, m は奇数) と書ける.

$$x^2 \pm n^2 = \frac{k^2 \pm 2^{2s+2t}m^2l^2}{l^2 2^{2s}} \quad \text{かつ} \quad s+t>0$$

だから $\operatorname{ord}_2(x^2+n^2) = 2s = 2\operatorname{ord}_2 x$ が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_2 z &= 4\operatorname{ord}_2 x - 2 - \operatorname{ord}_2 x - 2\operatorname{ord}_2 x \\ &= \operatorname{ord}_2 x - 2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

より分母は偶数になる.

(イ) $\operatorname{ord}_2 x > \operatorname{ord}_2 n$ のとき

$x = 2^s k/l$ ($s \geq 1,\ k, l$ は奇数), $n = 2^t m$ (t は 0 または 1, m は奇数) と書ける.

$$x^2 \pm n^2 = \frac{2^{2s}k^2 \pm 2^{2t}m^2l^2}{l^2} = 2^{2t} \cdot \frac{2^{2(s-t)}k^2 \pm m^2l^2}{l^2} \text{かつ } s>t$$

だから $\operatorname{ord}_2(x^2+n^2) = 2t = 2\operatorname{ord}_2 n$ が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_2 z &= 4\operatorname{ord}_2 n - 2 - \operatorname{ord}_2 x - 2\operatorname{ord}_2 n \\ &= 2(\operatorname{ord}_2 n - 1) - \operatorname{ord}_2 x \\ &< 0 \quad (\because \operatorname{ord}_2 x > 0) \end{aligned}$$

より分母は偶数になる.

(ウ) $\mathrm{ord}_2 x = \mathrm{ord}_2 n$ のとき

$x = 2^s k/l, n = 2^s m$ (s は 0 または 1, k, l, m は奇数) と書ける.

$$x^2 \pm n^2 = 2^{2s} \cdot \frac{k^2 \pm m^2 l^2}{l^2}$$

だから

$$z = \frac{2^{4s} \frac{(k^2+m^2l^2)^2}{l^4}}{4 \cdot 2^{3s} \frac{k}{l} \frac{k^2-m^2l^2}{l^2}} = \frac{(k^2+m^2l^2)^2}{2^{2-s}kl(k^2-m^2l^2)}$$

となる. k, m, l は奇数だから $k^2 + m^2 l^2 \equiv 2 \pmod 4$ かつ $k^2 - m^2 l^2 \equiv 0 \pmod 4$ が従い,

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_2 z &= 4 - (2 - s) - \mathrm{ord}_2(k^2 - m^2 l^2) \\ &\leq 2 + s - 4 = s - 2 \\ &< 0\end{aligned}$$

より分母は偶数になる.

(ア), (イ), (ウ) より条件 (2) は示された.

条件 (3) についても p を n の素因数としたとき, $\mathrm{ord}_p z \leq 0$ を示すことになるが同様の議論のため割愛する. 以上より題意は示せた. □

4　楕円曲線の L 関数

本節では楕円曲線の L 関数について解説する．L 関数は合同数問題において大きな役割を果たす．具体的には特殊値 $s=1$ について調べることになる．まずはゼータ関数, 合同ゼータ関数について述べる．また特に断らない限り, $\prod_p$ はすべての素数 p をわたり, $\prod_{p\nmid 2n}$ は $p \nmid 2n$ を満たす素数 p をわたるものとする.

定義 4.1. 楕円曲線 E_n 上の $\mathbb{F}_p$ 有理点の個数 $\#E_n(\mathbb{F}_p)$ を N_p で表す．楕円曲線 E_n の p に関するゼータ関数を

$$\zeta_{E_n,p}(s) := \begin{cases} \dfrac{1+(N_p-p-1)p^{-s}+p^{1-2s}}{(1-p^{-s})(1-p^{1-s})} & (p\nmid 2n \text{ のとき}) \\[2ex] \dfrac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{1-s})} & (p \mid 2n \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義し, さらに楕円曲線 E_n の合同ゼータ関数を

$$\zeta_{E_n}(s) := \prod_p \zeta_{E_n,p}(s) = \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\prod_{p\nmid 2n}\{1+(N_p-p-1)p^{-s}+p^{1-2s}\}^{-1}} \tag{4.2}$$

で定義する．$\zeta(s)$ は通常のリーマンゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

である.

合同ゼータ関数を用いて Hasse-Weil L 関数を定義する.

定義 4.3 (Hasse-Weil L 関数)**.** Hasse-Weil L 関数 $L(E_n,s)$ を

$$L(E_n,s) := \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\prod_p \zeta_{E_n,p}(s)} \tag{4.4}$$

$$= \prod_{p\nmid 2n}\{1+(N_p-p-1)p^{-s}+p^{1-2s}\}^{-1} \tag{4.5}$$

で定義する．(4.4) の分子に $\zeta(s)\zeta(s-1)$ を置いたのは $\prod_p \zeta_{E_n,p}(s)$ に出てくるオイラー積の部分を消去するためである.

オイラー積の各項を等比級数の形で表し, それらを掛け合わせることで $L(E_n,s)$ をディリクレ級数の形で表したのが以下である.

$$L(E_n,s)=\sum_{m=1}^{\infty} b_{m,n}m^{-s}. \tag{4.6}$$

$L(E_n,s)$ の m^{-s} の係数 $b_{m,n}$ を $L(E_1,s)$ の m^{-s} の係数 $b_{m,1}$ とクロネッカー記号を用いて表すことができる. まずはルジャンドル記号とヤコビ記号を定義する.

定義 4.7 (ルジャンドル記号, ヤコビ記号)**.** p を奇素数とする. ルジャンドル記号 $\left(\frac{a}{p}\right)$ を

$$\left(\frac{a}{p}\right):=\begin{cases} \ \ 1 & (a \text{ が } p \text{ を法として平方剰余のとき}) \\ -1 & (a \text{ が } p \text{ を法として平方非剰余のとき}) \end{cases}$$

と定義する.

また, 奇数 m の素因数分解を $m=p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$ とするとき, ヤコビ記号 $\left(\frac{a}{m}\right)$ を

$$\left(\frac{a}{m}\right):=\left(\frac{a}{p_1}\right)^{e_1}\cdots\left(\frac{a}{p_r}\right)^{e_r}$$

で定義する.

また, ヤコビ記号の拡張版として, 負の奇数 d に対して,

$$\left(\frac{c}{d}\right):=\begin{cases} \left(\dfrac{c}{|d|}\right) & (c>0) \\ -\left(\dfrac{c}{|d|}\right) & (c<0) \end{cases}$$

と定義しておく.

定義 4.8 (クロネッカー記号)**.** m を平方因子を持たない整数とするとき, ヤコビ記号を用いてクロネッカー記号 χ_m を以下で定義する.

- $m\equiv 1 \pmod 4$ のとき

$$\chi_m(a):=\left(\frac{a}{|m|}\right).$$

- $m\equiv 3 \pmod 4$ のとき

$$\chi_m(a):=\begin{cases} \left(\dfrac{-1}{a}\right)\left(\dfrac{a}{|m|}\right) & (a \text{ が奇数のとき}) \\ 0 & (a \text{ が偶数のとき}). \end{cases}$$

• $m = 2m_0 \equiv 2 \pmod 4$ のとき

$$\chi_m(a) := \begin{cases} \left(\dfrac{2}{a}\right)\chi_{m_0}(a) & (a \text{ が奇数のとき}) \\ 0 & (a \text{ が偶数のとき}). \end{cases}$$

また整数 t が, 平方因子を持たない整数 m を用いて $t = m \times n^2$ と書けるとき,

$$\chi_t := \chi_m$$

と定義する. これによって 0 でないすべての整数 t に対して χ_t を定義したことになる.

以後, 本論文において χ_t はクロネッカー記号を表すものとする.
次にディリクレ指標の定義を与える.

定義 4.9 (ディリクレ指標)**.** χ を $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{C}$ への関数とする. χ が以下の 4 つの条件を満たすとき, n を法とするディリクレ指標という.

(1) $a \equiv b \pmod n$ ならば $\chi(a) = \chi(b)$.
(2) $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.
(3) $\chi(1) = 1$.
(4) a と n が互いに素でなければ $\chi(a) = 0$.

さらにディリクレ指標のコンダクターについても定義しておく. ディリクレ指標 χ のコンダクターとは大雑把に言えば, χ が法 n で定まるような n のうち, 最小のもののことである. 以下で正確に述べる.

χ を n を法とするディリクレ指標としたとき, m を n の倍数として,

$$\chi^{(m)}(a) := \begin{cases} \chi(a) & ((a,m) = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & ((a,m) \neq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義することで, $\chi^{(m)}$ は m を法とするディリクレ指標となることに注意しておく. このとき, $\chi^{(m)}$ は χ から導かれるという. 逆に n を法とするディリクレ指標 χ が, n の約数 d を法とするディリクレ指標 ψ によって導かれるとき, χ は d で定義されるという. χ が定義される最小の約数 d を χ の **コンダクター**という. χ が定義される最小の約数 d が存在することについては, [16, 雪江, p.51, 命題 3.1.5] より分かる.

ディリクレ指標とコンダクターについて例を見てみよう.

例 4.10. (1) n を法とする自明なディリクレ指標 $\chi_{\mathrm{triv},n}$ を

$$\chi_{\mathrm{triv},n}(a) := \begin{cases} 1 & ((a,n)=1 \text{ のとき}) \\ 0 & ((a,n)\neq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．$\chi_{\mathrm{triv},n}$ は恒等指標 id (すべての整数で 1 をとる) から導かれるのでコンダクターは 1 である．考えている n が明らかなときは, n を省略して χ_{triv} と書く．

(2) ルジャンドル記号 $\left(\frac{a}{p}\right)$ は p を法とするディリクレ指標である．コンダクターは 1 か p のいずれかであるが, 恒等指標 id からは導かれないのでコンダクターは p である．

(3) 8 を法とするディリクレ指標について考える．$\chi(3),\chi(5),\chi(7)$ を求めれば良い．

$$\chi(3)^2=\chi(5)^2=\chi(7)^2=1 \quad \text{かつ} \quad \chi(3)\chi(5)=\chi(7)$$

であることに注意すると以下の 4 つしかないことが分かる (実は n を法とするディリクレ指標全体のなす群は既約剰余類群 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ と同型なので 4 つであることは簡単に分かる)．

表 1　8 を法とするディリクレ指標

$a \pmod 8$	1	3	5	7
$\chi_{\mathrm{triv},2}$	1	1	1	1
χ_{-1}	1	-1	1	-1
χ_2	1	-1	-1	1
χ_{-2}	1	1	-1	-1

表よりコンダクターについて，$\chi_{\mathrm{triv},2}$ は 1，χ_{-1} は 4 で定義できるので 4 であり，χ_2,χ_{-2} は $1,2,4$ のいずれでも定義できないのでコンダクターは 8 となる．コンダクター 4 のディリクレ指標は χ_{-1} のみである．

(4) クロネッカー記号はディリクレ指標になる．より詳しく述べると, m を平方因子を持たない整数として, $m\equiv 1 \pmod 4$ のときは $|m|$ を法とするディリクレ指標であり, $m\equiv 2,3 \pmod 4$ のときは $4|m|$ を法とするディリクレ指標である．同様の議論のため, $m\equiv 3 \pmod 4$ のときのみ確かめる．

- $a\equiv b \pmod{4|m|}$ なら$\chi_m(a)=\chi_m(b)$

$a\equiv b \pmod{4|m|}$ なら a,b の偶奇は同じであり, 偶数なら $\chi_m(a)=\chi_m(b)=0$．奇数なら $\left(\frac{-1}{a}\right)$ は $(a \bmod 4)$ で定まり，$\left(\frac{a}{|m|}\right)$ は $(a \bmod |m|)$ で定まるので, $\chi_m(a)=\chi_m(b)$．

- $\chi_m(ab)=\chi_m(a)\chi_m(b)$

$$\chi_m(ab) = \left(\frac{-1}{ab}\right)\left(\frac{ab}{|m|}\right) = \left(\frac{-1}{a}\right)\left(\frac{-1}{b}\right)\left(\frac{a}{|m|}\right)\left(\frac{b}{|m|}\right) = \chi_m(a)\chi_m(b).$$

- $\chi_m(1) = 1$

$$\chi_m(1) = \left(\frac{-1}{1}\right)\left(\frac{1}{|m|}\right) = 1.$$

- $(4|m|, a) > 1$ なら$\chi_m(a) = 0$

  a が偶数なら $\chi_m(a) = 0$. a が奇数なら $(|m|, a) > 1$ より,

$$\chi_m(a) = \left(\frac{-1}{a}\right)\left(\frac{a}{|m|}\right) = 0.$$

以上より, $4|m|$ を法とするディリクレ指標である. コンダクターについては, [16, 雪江, p.93, 命題 3.6.9] より, $m \equiv 1 \pmod 4$ のときは $|m|$ であり, $m \equiv 2, 3 \pmod 4$ のときは $4|m|$ である.

注 4.11. [16] では, クロネッカー記号を 2 次体の判別式

$$D = \begin{cases} |m| & (m \equiv 1 \pmod 4) \\ 4|m| & (m \equiv 2, 3 \pmod 4) \end{cases}$$

で定義しているため形は若干異なるが, 本質的には同じものである. 本論文で定義した χ_m が, $m \equiv 1 \pmod 4$ については [16, p.86, 定義 3.6.4] の (1) から (5) を満たすことを確かめ, $m \equiv 2, 3 \pmod 4$ については [16, p.86, 定義 3.6.4] の (3) 以外を満たすことを確かめればいい.

命題 4.12. [7, p.81] $2n$ と互いに素な m に対して, $b_{m,n} = \chi_n(m) b_{m,1}$ が成り立つ.

例 4.13. $b_{m,1}$ を小さい m について計算してみる.

$$L(E_1, s) = \prod_{p \neq 2} \{1 + (N_p - p - 1)p^{-s} + p^{1-2s}\}^{-1}$$

だったので, N_p を計算し, 等比級数の形に直せばいい. $p \equiv 3 \pmod 4$ のときは [7, p.40, Proposition16] より, $N_p = p + 1$ となるので, $p \equiv 1 \pmod 4$ となる p についてのみ N_p を求める. $p = 5, 13$ で N_p を計算すると以下のようになる.

- $p = 5$

$y^2 = x^3 - x \pmod 5$ に代入して計算すると, $\mathbb{F}_5$ 有理点は

$$O, (0,0), (1,0), (2,1), (2,4), (3,2), (3,3), (4,0)$$

の 8 点だから $N_5 = 8$.

• $p = 13$

$y^2 = x^3 - x \pmod{13}$ に代入して計算すると, $\mathbb{F}_{13}$ 有理点は

$$O, (0,0), (1,0), (5,4), (5,9), (8,6), (8,7), (12,0)$$

の 8 点だから $N_{13} = 8$.

以上より

$$\begin{aligned} L(E_1, s) &= \frac{1}{1 + 3 \cdot 9^{-s}} \cdot \frac{1}{1 + 2 \cdot 5^{-s} + 5 \cdot 25^{-s}} \cdot \frac{1}{1 + 7 \cdot 49^{-s}} \cdot \frac{1}{1 + 11 \cdot 121^{-s}} \\ &\quad \times \frac{1}{1 - 6 \cdot 13^{-s} + 13 \cdot 169^{-s}} \cdots \\ &= 1 - 2 \cdot 5^{-s} - 3 \cdot 9^{-s} + 6 \cdot 13^{-s} + \cdots \end{aligned}$$

となる.

定理 4.14. [7, p.84, Theorem] $\mathrm{Re}(s) > 3/2$ で定義される楕円曲線 E_n の Hasse-Weil L 関数は全複素平面上の整関数に解析接続される. さらに

$$N = \begin{cases} 32n^2 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 16n^2 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

とし,

$$\Lambda(s) = \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi} \right)^s \Gamma(s) L(E_n, s)$$

とおくと, 関数等式

$$\Lambda(s) = \pm\Lambda(2 - s) \tag{4.15}$$

を満たす.

定理の関数等式の ±1 はルート数であり, $n \equiv 1, 2, 3 \pmod 8$ のとき 1 に等しく, $n \equiv 5, 6, 7 \pmod 8$ のとき -1 に等しい.

さて L 関数に関する準備ができたところで L 関数の特殊値 $s = 1$ について解説する. 特殊値の重要性は次の予想から伺える.

予想 4.16 (弱 BSD 予想, [2])**.** $L(E,1)=0$ であるためには, E が無限個の有理点を持つことが必要十分である.

ある 0 でない 2 つの複素数 ω_1, ω_2 が $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ を満たすとき, 格子 L を

$$L := \{m\omega_1 + n\omega_2 \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

で定義する. また格子 L により定まる定数 $g_2(L), g_3(L)$ を

$$g_2(L) := 60 \sum_{l \in L,\, l \neq 0} l^{-4}, \quad g_3(L) := 140 \sum_{l \in L,\, l \neq 0} l^{-6}$$

で定義する (収束については [7, p.17, Lemma2] より従う). [7, p.24, Proposition10, p.120, Proposition13] より, Weierstrass 型の楕円曲線 $y^2 = 4x^3 - g_2(L)x - g_3(L)$ と商集合 $\mathbb{C}/L$ の間に解析的な 1:1 対応がある. 任意の楕円曲線は変数の一次変換によって, Weierstrass 型に変形できるので, 楕円曲線 $y^2 = f(x)$ に対する格子が 1 つ定まる. 楕円曲線 E が虚数乗法を持つとは, 対応する格子 L がある整数でない複素数 c により, $cL = L$ となるときにいう.

定理 4.17 (Coates-Wiles, [3])**.** E は $\mathbb{Q}$ 上で定義された虚数乗法を持つ楕円曲線とする. E が無限個の有理点を持つとき, $L(E,1)=0$ である.

注 4.18. 定理 4.17 は [8, Kolyvagin] により, 虚数乗法を持たない楕円曲線についても成り立つことが証明された.

E_n にはこの定理を適用することができる. これより,

$$L(E,1) \neq 0 \Longrightarrow E_n \text{の有理点は有限個} \Longleftrightarrow n \text{ は合同数でない}$$

という関係が得られる (1 つめは定理 4.17, 2 つめは定理 3.15 から従う). 弱 BSD 予想を認めると 1 つめの逆の矢印も成り立つ. $n \equiv 5, 6, 7 \pmod 8$ のときはルート数が -1 なので関数等式 (4.15) に $s=1$ を代入することで $L(E_n, 1) = 0$ が簡単に分かる. つまり弱 BSD 予想を認めれば, $n \equiv 5, 6, 7 \pmod 8$ となる n は合同数となる.

5　整数ウエイトの保型形式の基本事項

合同数問題を考える上で保型形式は欠かせないものである．保型形式を導入するにあたってよく使われる記号をまとめておく．$\mathbb{H}$ を上半平面

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

とおく．R を可換環として，

$$GL_2(R) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ ad - bc \in R^\times \right\},$$

$$SL_2(R) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ ad - bc = 1 \right\}$$

とおく．特に $R = \mathbb{Z}$ のとき $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ と書く．また $GL_2(\mathbb{Q})$ の部分群 $GL_2^+(\mathbb{Q})$ を

$$GL_2^+(\mathbb{Q}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ ad - bc > 0 \right\}$$

と表すことにする．

さらに重要な Γ の部分群として，

$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \ \middle| \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\},$$

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \ \middle| \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\},$$

$$\Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \ \middle| \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

と定義する．

Γ の部分群 Γ' が $\Gamma(N)$ を含むとき，Γ' はレベル N の合同部分群という．$\Gamma_0(N), \Gamma_1(N)$ がその一例である．また $\Gamma(N)$ はレベル N の主合同部分群と呼ばれる．

定義 5.1. $z \in \mathbb{H}, \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ に対して，

$$\gamma z = \frac{az + b}{cz + d} \tag{5.2}$$

で定まる変換を一次分数変換という．$SL_2(\mathbb{R})$ は (5.2) によって $\mathbb{H}$ に作用する．

ここで, Γ も (5.2) によって $\mathbb{H}$ に作用するが, Γ の場合は $\mathbb{H}$ よりも大きな集合に作用することを見る．有理数 $r \in \mathbb{Q}$ に対して γr を,

$$\gamma r = \begin{cases} \dfrac{ar+b}{cr+d} & (cr+d \neq 0 \text{ のとき}) \\ \infty & (cr+d = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{5.3}$$

と定める．γ は $\det(\gamma) = 1 \neq 0$ なので, $ar+b=0$ かつ $cr+d=0$ となることがないことに注意しておく．また ∞ に対して $\gamma\infty$ を,

$$\gamma\infty = \begin{cases} \dfrac{a}{c} & (c \neq 0 \text{ のとき}) \\ \infty & (c = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{5.4}$$

と定める．(5.3), (5.4) より, Γ は $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ を $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に移すので, Γ は $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に作用することが分かる．したがって, $\overline{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ とおくと, Γ は $\overline{\mathbb{H}}$ に作用する．

定義 5.5. Γ' を Γ の部分群とする．$z, w \in \overline{\mathbb{H}}$ に対して, ある $\gamma \in \Gamma'$ が存在して $w = \gamma z$ となるとき, z と w は Γ' 同値と呼ぶことにする (同値関係になることは省略)．また, $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ の Γ' 同値類の代表元を Γ' のカスプという．

例 5.6. 任意の既約分数 a/c に対して $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ が存在して, $a/c = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \infty$ となるので Γ のカスプは ∞ のみである．

ここで, 上半平面 $\mathbb{H}$ の Γ の部分群 Γ' に対する基本領域を定義する．

定義 5.7 (基本領域)**.** F は $\mathbb{H}$ 内の閉領域であり, 単連結とする．また Γ' は Γ の部分群とする．以下の 2 つを満たすとき, F は群 Γ' に対する基本領域という．

(1) 任意の点 $z \in \mathbb{H}$ に対して, ある $\gamma' \in \Gamma'$ と $w \in F$ が存在して, $z = \gamma' w$ が成り立つ (つまり z は F の適当な点とΓ'同値になる)．

(2) F の内点 z, w が Γ' 同値ならば, $z = w$ が成り立つ (つまり F の相異なる内点はΓ' 同値にならない)．境界上の点については Γ' 同値になってもよい．

例 5.8. レベル 2 の主合同部分群 $\Gamma(2)$ に対する基本領域は図 3 のようになる．計算については, [7, p.105-106] を参照せよ．

定義 5.9. f を上半平面 $\mathbb{H}$ 上の有理型関数とする．$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ に対して,

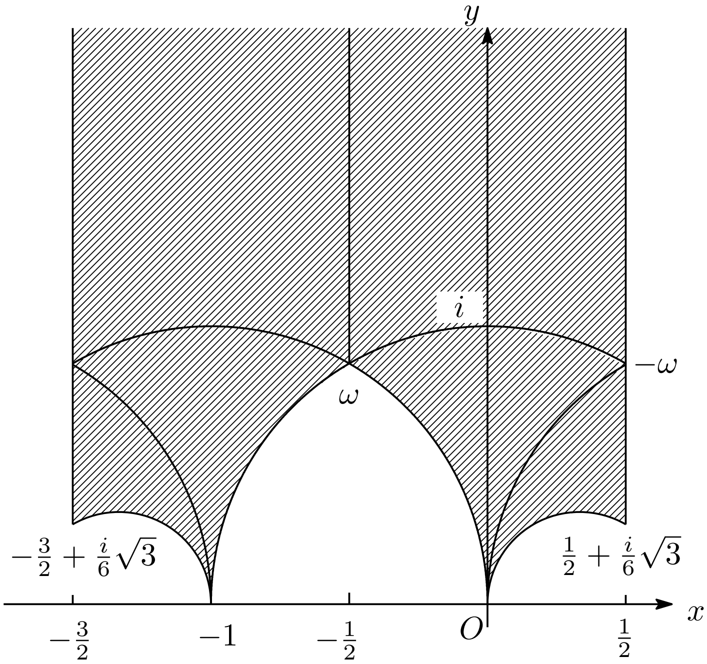

図 3　$\Gamma(2)$ に対する基本領域 $F(2)$.

$\mathbb{H}$ 上の有理型関数 $f|[\gamma]_k$ を

$$f|[\gamma]_k := (\det\gamma)^{k/2}(cz+d)^{-k}f(\gamma z)$$

で定義する.

定義 5.10. f を上半平面 $\mathbb{H}$ 上の有理型関数, $\Gamma^{'}$ を合同部分群とする. f が $\Gamma^{'}$ に関するウエイト k の保型形式であるとは以下の 2 条件が成り立つときにいう.

- **保型性**
  任意の $\gamma \in \Gamma^{'}$ に対して,
$$f|[\gamma]_k = f(z). \tag{5.11}$$

- **カスプでの正則性**
  $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ を $\Gamma^{'}$ のカスプとし, $\gamma \in \Gamma$ で $s = \gamma\infty$ が成り立つとする. このとき, ある自然数 N が存在して, $q_N = e^{2\pi iz/N}$ を用いて $f|[\gamma]_k$ は,
$$f(z)|[\gamma]_k = \sum_{n\geq 0} a_n q_N^n \tag{5.12}$$
の形の展開を持つ.

$\Gamma^{'}$ に関するウエイト k の保型形式の集合を $M_k(\Gamma^{'})$ と書く. さらに f が $\Gamma^{'}$ のすべてのカスプで零点を持つとき f はカスプ形式であるといい, $\Gamma^{'}$ に関するウエイト k のカスプ形式の集合を $S_k(\Gamma^{'})$ と書く. Γ に対する保型形式は最も簡単で, Γ のカスプは ∞ のみであるからカスプでの正則性も q 展開を調べれるだけでいい.

以後, 混乱しないように保型形式のクラスの包含関係について注意しておく. 簡単な考察から

$$\Gamma(N) \subseteq \Gamma_1(N) \subseteq \Gamma_0(N) \subseteq \Gamma$$

なので

$$M_k(\Gamma(N)) \supseteq M_k(\Gamma_1(N)) \supseteq M_k(\Gamma_0(N)) \supseteq M_k(\Gamma)$$

となる.

命題 5.13. [7, p.127, Proposition17] $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q}), \Gamma^{'} := \alpha^{-1}\Gamma_0(N)\alpha \cap \Gamma$ とおくと, $\Gamma^{'}$ は Γ の合同部分群になる. また $f \in M_k(\Gamma_0(N))$ ならば $f|[\alpha]_k \in M_k(\Gamma^{'})$ が成り立ち, $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ ならば $f|[\alpha]_k \in S_k(\Gamma^{'})$ が成り立つ.

命題 5.13 で $\alpha = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ととると, $\alpha^{-1}\Gamma_0(N)\alpha \cap \Gamma = \Gamma_0(N)$ なので, $f(z) \in M_K(\Gamma_0(N))$ なら $f(Nz) \in M_K(\Gamma_0(N))$ となることが分かる.

指標付きの保型形式の空間を定義する. まず表現の概念を復習しておく.

定義 5.14. G を群, V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とするとき, G から $GL(V)$ への群準同型

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

を群 G の $\mathbb{C}$ 上の表現という.

例 5.15. f を $\mathbb{H}$ 上の有理型関数とする. $\Gamma_0(N)$ の元 γ に対して, 写像 $\rho(\gamma)$ を

$$\rho(\gamma) : f \longmapsto f|[\gamma]_k$$

で定めると, $\rho(\gamma_1\gamma_2) = f|[\gamma_1\gamma_2]_k = (f|[\gamma_1]_k)|[\gamma_2]_k = \rho(\gamma_1)\rho(\gamma_2)$ より, $\mathbb{H}$ 上の有理型関数全体のなす空間を V と書けば ρ は $\Gamma_0(N)$ から $GL(V)$ への群準同型となる. すなわち ρ は $\Gamma_0(N)$ の表現である.

また, 命題 5.13 で, $\alpha \in \Gamma_0(N)$ なら明らかに $\Gamma^{'} = \alpha^{-1}\Gamma_0(N)\alpha \cap \Gamma = \Gamma_0(N)$ なので, ρ は $\Gamma_0(N)$ から $GL(M_k(\Gamma_0(N))$ への群準同型, すなわち $M_k(\Gamma_0(N))$ は V の部分表現となるが, 任意の $\gamma \in \Gamma_0(N)$ に対して $\rho(\gamma) = \mathrm{id}_{M_k(\Gamma_0(N))}$ なので, 自明な部分表現であることが分かる.

命題 5.16. $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ に対して, $\mu(\gamma) = d \pmod N$ と定義すると, μ は $\Gamma_0(N)$ から既約剰余類 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ への全射群準同型となり,

$$\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N) \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$$

が成り立つ.

証明. $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \delta = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ はともに $\Gamma_0(N)$ の元とする.

$$\gamma\delta = \begin{pmatrix} * & * \\ * & cf+dh \end{pmatrix}$$

なので $\mu(\gamma\delta) = dh \pmod N = \mu(\gamma)\mu(\delta)$ となり μ は準同型である.

次に μ が全射であることを示す. 任意の $\overline{d} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ に対して, $\begin{pmatrix} \overline{d}^{-1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{d} \end{pmatrix}$ は $SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の元となる. ここで 1 つ補題を用意する.

補題 5.17. N を 1 より大きい整数とする. 自然な群準同型写像

$$\psi : SL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$$

は全射である.

証明. 任意の $SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が簡単な行列の積で表されることを示す. $SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の定義より a, b, c, d は

$$ad - bc \equiv 1 \pmod N \tag{5.18}$$

を満たす. 以下のように場合分けをして示す.

(ア) a, b, c, d の中で $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ において可逆元であるものが存在するとき

d を可逆元としても一般性を失わない. なぜなら $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ の左からの積は, -1 倍を無視して 1 行目と 2 行目の交換に対応しており, 右からの積は -1 倍を無視して 1 列目と 2 列目の交換に対応する (-1 は明らかに可逆元なので気にしなくてよい). つまり可逆元を $(2, 2)$ 成分に持ってくることができる. 以下, d を可逆元とし, e を

$$de \equiv 1 \pmod N \tag{5.19}$$

を満たす元とする．このとき,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & bd \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ce & 1 \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

と表すことができる．さらに対角行列 $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ は次のように展開できる．

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -e(e-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

(5.20),(5.21) の計算は $SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の中で行っており, 途中で (5.18), (5.19) を使った．(5.20),(5.21) より, $SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ において $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -e(e-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & bd \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ce & 1 \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

と書くことできる．(5.22) の右辺に現れる行列は $GL_2(\mathbb{Z})$ の元として見ても行列式はすべて 1 となるので $SL_2(\mathbb{Z})$ の元である．したがって ψ の像が $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ となる $SL_2(\mathbb{Z})$ の元を (5.22) の右辺としてとれるので $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(\psi)$ となる．

(イ) a, b, c, d **のすべてが** $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ **において可逆元でないとき**

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を $GL_2(\mathbb{Z})$ の元として見る．必要なら $S, -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ を適当に掛けて $|a| > b, b > 0$ としてもよい．$a = bq_1 + r_1\,(r_1 < b)$ とする．このとき $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に右から $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q_1 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ を掛けると,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - bq_1 & b \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & b \\ * & * \end{pmatrix}$$

となり, $(1,1)$ 成分に r_1 を持ってくることができる．以下同様に, $b = q_2 r_1 + r_2, r_1 = q_3 r_2 + r_3, \cdots$ と続けていくと $r_1 > r_2 > r_3 > \cdots$ であり $r_i \geq 0$ なので, $r_{n-1} \neq 0, r_n = 0$ となる n が存在する．順に $\begin{pmatrix} r_1 & b \\ * & * \end{pmatrix}$ に右から $SL_2(\mathbb{Z})$ の元

$\begin{pmatrix}1 & -q_2\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\-q_3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -q_4\\0 & 1\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix}1 & -q_n\\0 & 1\end{pmatrix}$ を掛けていくと

$$\begin{pmatrix}r_{n-1} & r_n\\c^{'} & d^{'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r_{n-1} & 0\\c^{'} & d^{'}\end{pmatrix} \tag{5.23}$$

となり下三角行列にできる．最後の $r_n = 0$ が $(1,1)$ 成分, $(1,2)$ 成分のどちらに来るかは n の偶奇によるが, 本質的には問題ないので $(1,2)$ 成分が 0 になったとして進める (上の場合では n は偶数である)．今, $SL_2(\mathbb{Z})$ の元を掛けて変形したので (5.23) の行列の行列式は $r_{n-1}d^{'} = ad - bc \equiv 1 \pmod N$ が成り立つ．これより r_{n-1} が $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ において可逆元になるので (ア) の場合に帰着でき, $\begin{pmatrix}r_{n-1} & 0\\c^{'} & d^{'}\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(\psi)$, すなわち $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(\psi)$ となる．

以上 (ア), (イ) より主張は成り立つ． □

補題 5.17 より,

$$\psi(\gamma) = \begin{pmatrix}\overline{d}^{-1} & \overline{0}\\\overline{0} & \overline{d}\end{pmatrix}$$

となる $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ が存在する．$(2,1)$ 成分が $\overline{0}$ なので, $\gamma \in \Gamma_0(N)$ となり μ は全射である．

また $\ker(\mu) = \Gamma_1(N)$ は明らかなので準同型定理より,

$$\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N) \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$$

が従う． □

χ を N を法とするディリクレ指標とする．μ を,

$$\mu(\gamma) := \chi(d)$$

で定義すると, 命題 5.16 より μ は $\Gamma_0(N)$ の指標である．

定義 5.24. χ を N を法とするディリクレ指標とし, ρ は例 5.15 で出てきたものとする．また, $\Gamma_0(N)$ の指標 μ は $\gamma \in \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ に対して, $\mu(\gamma) = \chi(d)$ と定めておく．このとき保型形式の空間 $M_k(N,\chi)$ を

$$M_k(N,\chi) := \left\{ f \in M_k(\Gamma_1(N)) \;\middle|\; \forall\gamma = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)\ s.t.\ \rho(\gamma)f = \chi(d)f \right\} \tag{5.25}$$

で定義する．カスプ形式については $S_k(N,\chi)$ で表す．

命題 5.26. [7, p.137, Proposition28] N を法とするディリクレ指標の集合を X_N としたとき,

$$M_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{X_N} M_k(N,\chi)$$

が成り立つ.

6 半整数ウエイトの保型形式の基本事項

前節で整数ウエイトの保型形式について解説した．半整数ウエイトの保型形式についても同様に定義できるが少し注意が必要である．整数ウエイトの場合を思い出すと, $\gamma \in \Gamma$ に対して,

$$f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z)$$

が保型性の条件であった．この定義より, 半整数 $k/2$ についても

$$f(\gamma z) = (cz+d)^{k/2} f(z)$$

としたいところである．一見良さそうに見えるが半整数乗のため, 都合のいい平方根の分岐が存在せず, -1 倍だけずれてしまうことがある．これを解決するために $[\gamma]$ の作用を少し拡張する．

まず -1 倍のずれの煩わしさを解消するために $\widetilde{\gamma} = (\gamma, \phi(z))$ による作用を考える．ただし $\phi(z)$ は $\mathbb{H}$ 上の有理型関数で

$$\phi(z)^2 = \pm \frac{cz+d}{\sqrt{\det(\alpha)}} \tag{6.1}$$

を満たすものとしておく．このような $GL_2^+(\mathbb{Q})$ の元と $\phi(z)$ の組全体の集合を

$$G = \{\widetilde{\gamma} = (\gamma, \phi(z)) \mid \gamma \in GL_2^+(\mathbb{Q}) \text{ かつ } \phi(z) \text{ は (6.1) を満たす．}\}$$

と書くことにする．また G の 2 つの元の積を

$$(\alpha, \phi(z))(\beta, \psi(z)) = (\alpha\beta, \phi(\beta z)\psi(z)) \tag{6.2}$$

で定義する．

命題 6.3. 演算 (6.2) に関して G は群をなす．E を単位行列として, 単位元は $(E, 1)$ である．

証明． ● (6.2) が G で閉じていること

G の 2 つの元 $(\alpha, \phi(z)), (\beta, \psi(z))$ の積が G に属していることを確認する．$t_1, t_2 \in \{\pm 1\}$ とし,

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \phi(z)^2 = t_1 \frac{cz+d}{\sqrt{\det(\alpha)}}, \psi(z)^2 = t_2 \frac{gz+h}{\sqrt{\det(\beta)}}$$

とおく．$\alpha\beta \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ は明らかである．

$$\begin{aligned}
(\phi(\beta z)\psi(z))^2 &= t_1\frac{c\beta z+d}{\sqrt{\det(\alpha)}}\cdot t_2\frac{gz+h}{\sqrt{\det(\beta)}} \\
&= t_1t_2\frac{\left(c\cdot\frac{ez+f}{gz+h}+d\right)(gz+h)}{\sqrt{\det(\alpha\beta)}} \\
&= t_1t_2\frac{(ce+dg)z+(cf+dh)}{\sqrt{\det(\alpha\beta)}}
\end{aligned}$$

となるが, $t_1t_2 \in \{\pm 1\}$ かつ

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

なので, $(\alpha, \phi(z))(\beta, \psi(z))$ は G に属している．

結合法則と単位元については明らかなので省略する．

- **逆元について**

$(\alpha, \phi(z))$ の逆元は $(\alpha^{-1}, 1/\phi(\alpha^{-1}z))$ と分かるので, これが G に属していることを確認する．

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\phi(\alpha^{-1}z)}\right)^2 &= \frac{\sqrt{\det(\alpha)}}{t_1\left(c\cdot\frac{dz-b}{-cz+a}+d\right)} \\
&= \frac{\sqrt{\det(\alpha)}}{t_1}\cdot\frac{-cz+a}{ad-bc} \\
&= \frac{1}{t_1}\cdot\frac{-\frac{c}{ad-bc}z+\frac{a}{ad-bc}}{\sqrt{\det(\alpha^{-1})}}
\end{aligned}$$

となるので, $(\alpha^{-1}, 1/\phi(\alpha^{-1}z)) \in G$ となる．

以上から演算 (6.2) に関して G は群をなす． $\square$

定義 6.4. f を上半平面 $\mathbb{H}$ 上の有理型関数とする．$\widetilde{\gamma} = (\gamma, \phi(z)) \in G$ のとき, $\mathbb{H}$ 上の有理型関数 $f|[\widetilde{\gamma}]_{k/2}$ を

$$f(z)|[\widetilde{\gamma}]_{k/2} := f(\gamma z)\phi(z)^{-k}$$

で定義する．

1 つの $\gamma \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ に対して選択可能な $\phi(z)$ が 4 つあることに注意する．このように定義することによって -1 倍のずれはなくなりスムーズに計算できるようになる．ここで

第一成分への射影 $\widetilde{\gamma}=(\gamma,\phi(z))\mapsto\gamma$ を取ることで準同型 $P:G\to GL_2^+(\mathbb{Q})$ が得られる. $G_1=P^{-1}(\Gamma)$ としておく.

例 6.5. [7, 148-152, Theorem] $q=2\pi iz$ とし, テータ関数 $\theta(z)$ を

$$\theta(z):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n^2} \tag{6.6}$$

で定める. このとき, $\gamma\in\Gamma_0(4)$ に対し $\theta(z)$ は,

$$\theta(\gamma z)=j(\gamma,z)\theta(z) \tag{6.7}$$

を満たす. ただし

$$j(\gamma,z):=\left(\frac{c}{d}\right)\epsilon_d^{-1}\sqrt{cz+d} \tag{6.8}$$

であり, $d\equiv 1 \pmod 4$ なら $\epsilon_d=1$, $d\equiv 3 \pmod 4$ なら $\epsilon_d=i$ である. $j(\gamma,z)$ は確かに (6.1) を満たしている. 実際, $\theta(z)$ は $\Gamma_0(4)$ に関するウエイト 1/2 の保型形式となる.

注 6.9. $\left(\frac{c}{d}\right)$ は定義 4.7 で述べた"ヤコビ記号の拡張版"として扱う. また, $c=0$ については $\left(\frac{0}{\pm 1}\right)=1$ とする.

Γ' を $\Gamma_0(4)$ の部分群とするとき, $\gamma\in\Gamma'$ を $\widetilde{\gamma}=(\gamma,j(\gamma,z))\in G$ に移す写像を L と表すことにする. P と L は互いに逆写像であり, $\Gamma_0(4)$ と $\widetilde{\Gamma}_0(4)$ の間の同型を与える. この L を P のリフトと呼ぶ.

カスプ条件に関しても整数の場合とほぼ同様である. $s\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ を Γ' のカスプとし, $\gamma\in\Gamma$ で $s=\gamma\infty$ が成り立つとする. このとき, ある自然数 N が存在して, $q_N=e^{2\pi iz/N}$ を用いて $f|[\widetilde{\gamma}]_{k/2}$ のフーリエ展開を

$$f(z)|[\widetilde{\gamma}]_{k/2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nq_N^n$$

と表せるのだが, $n<0$ に対して $a_n=0$ ならカスプ s で正則, さらに $a_n=0$ ならカスプ s で零点を持つという.

以上をまとめると, 半整数ウエイトの保型形式について以下の定義が与えられる.

定義 6.10. k を奇数, f を上半平面 $\mathbb{H}$ 上の有理型関数とする. また $\Gamma'\subset\Gamma_0(4)$ を有限指数の部分群とする. f が $\widetilde{\Gamma}'$ に関するウエイト $k/2$ の保型形式であるとは以下の 2 条件が成り立つときにいう.

- 保型性

任意の $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}' := \{(\gamma, j(\gamma, z)) \mid \gamma \in \Gamma'\}$ に対して,

$$f|[\widetilde{\gamma}]_{k/2} = f(z). \tag{6.11}$$

● **カスプでの正則性**

$s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ を Γ' のカスプとし, $\gamma \in \Gamma$ で $s = \gamma\infty$ が成り立つとする. このとき, ある自然数 N が存在して, $q_N = e^{2\pi iz/N}$ を用いて $f|[\widetilde{\gamma}]_{k/2}$ は,

$$f(z)|[\widetilde{\gamma}]_{k/2} = \sum_{n \geq 0} a_n q_N^n$$

の形の展開を持つ.

$\widetilde{\Gamma}'$ に関するウエイト $k/2$ の保型形式の集合を $M_{k/2}(\widetilde{\Gamma}')$ と書く. さらに f が Γ' のすべてのカスプで零点を持つとき, f はカスプ形式であるといい, $\widetilde{\Gamma}'$ に関するウエイト $k/2$ のカスプ形式の集合を $S_{k/2}(\widetilde{\Gamma}')$ と書く. また整数ウエイトのときと同様にディリクレ指標をツイストした保型形式の空間を考えることができる. ρ は例 5.15 で出てきたものとして,

$$M_{k/2}(\widetilde{\Gamma}_0(N), \chi) := \{f \in M_{k/2}(\widetilde{\Gamma}_1(N)) \mid \rho(\gamma)f = \chi(d)f\} \tag{6.12}$$

で定義する.

命題 6.13. [7, p.183] N を法とするディリクレ指標の集合を X_N としたとき,

$$M_{k/2}(\widetilde{\Gamma}_1(N)) = \bigoplus_{\chi \in X_N} M_{k/2}(\widetilde{\Gamma}_0(N), \chi)$$

が成り立つ.

最後に $k/2$ が整数のとき, 整数ウエイト $k/2$ の保型形式と半整数ウエイト $k/2$ の保型形式の関係について見ておく. $f \in M_{k/2}(\widetilde{\Gamma}_0(N), \chi)$ とし, $\left(\frac{-1}{d}\right)$ を $\chi_{-1}(d)$ と書くと $4 \mid N$ のとき,

$$\begin{aligned} f(z)|[\widetilde{\gamma}]_{k/2} &= j(\gamma, z)^{-k} f(\gamma z) \\ &= \chi_{-1}(d)^{k/2} (cz + d)^{-k/2} f(\gamma z) \quad (\because k \text{ が偶数なので } \left(\frac{c}{d}\right) = 1\ ) \\ &= \chi_{-1}(d)^{k/2} f(z)|[\gamma]_{k/2} \end{aligned}$$

となる. 定数倍 $(\chi_{-1}(d)^{k/2})$ 異なるだけなので, カスプ条件については同値である. したがって以下の定理が得られる.

定理 6.14. $4 \mid N$ かつ $k/2 \in \mathbb{Z}$ ならば,

$$M_{k/2}(\widetilde{\Gamma}_0(N), \chi) = M_{k/2}(N, \chi_{-1}^{k/2}\chi)\,, \quad S_{k/2}(\widetilde{\Gamma}_0(N), \chi) = S_{k/2}(N, \chi_{-1}^{k/2}\chi)$$

が成り立つ.

7 保型形式上のヘッケ作用素

今節では特に断らない限り, Γ' は Γ の合同部分群, $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ とする.

- **整数ウエイトの場合**

準備として以下の概念を述べておく.

定義 7.1. Γ_1, Γ_2 を群 G の部分群とする. $[\Gamma_1 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2] < \infty$ かつ $[\Gamma_2 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2] < \infty$ のとき Γ_1 と Γ_2 は通約可能という.

例 7.2. [7, p.165, Proposition41] Γ' と $\alpha^{-1}\Gamma'\alpha$ は通約可能である.

定義 7.3. $\Gamma'' = \Gamma' \cap \alpha^{-1}\Gamma'\alpha$ とおくと, 例 7.2 より, ある整数 d が存在して $[\Gamma' : \Gamma''] = d$ となる. $f \in M_k(\Gamma')$ とし, Γ' の Γ'' に関する右剰余類分解を $\Gamma' = \bigcup_{j=1}^{d} \Gamma''\gamma_j'$ で表したとき, $\mathbb{H}$ 上の正則関数 $f(z)|[\Gamma'\alpha\Gamma']_k$ を

$$f(z)|[\Gamma'\alpha\Gamma']_k := \sum_{j=1}^{d} f(z)|[\alpha\gamma_j']_k$$

で定義する. これは α や γ_j' のとり方によらない. また $f(z)|[\Gamma'\alpha\Gamma']_k \in M_k(\Gamma')$ となる.

$\mathbb{Z}$ の部分加法群を M, また $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ の部分群 K を自然な準同型 $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ で引き戻したものを $\phi^{-1}(K)$ と書く. 整数行列の集合 $\Delta^n(N, M, K)$ を

$$\Delta^n(N, M, K) := \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; N \mid c, a \in \phi^{-1}(K), b \in M, \det A = n \right\}$$

と定める. ここまでの準備でヘッケ作用素を導入する.

定義 7.4. $\Gamma' = \Delta^1(N, M, K)$ とおく (たしかに合同部分群になっている). $f \in M_k(\Gamma')$ とするとき,

$$\begin{aligned} T(n)f &:= n^{k/2-1} \sum f|[\Gamma'\alpha\Gamma']_k && (7.5) \\ &= n^{k/2-1} \sum f|[\alpha_j]_k && (7.6) \end{aligned}$$

と定義する. ただし和は (7.5) では $\Delta^n(N, M, K)$ に含まれる Γ' のすべての両側剰余類をわたり, (7.6) では $\Delta^n(N, M, K)$ に含まれる Γ' のすべての右剰余類をわたる.

$\Gamma^{'}$ を Γ の合同部分群とするとき, $\overline{\Gamma}^{'}$ を以下で定義する.

$$\overline{\Gamma}^{'} = \begin{cases} \Gamma^{'}/\{\pm I\} & (-I \in \Gamma^{'}\text{のとき}) \\ \Gamma^{'} & (-I \notin \Gamma^{'}\text{のとき}). \end{cases}$$

定義 7.7 (ピーターソン内積)**.** $\Gamma^{'} \subset \Gamma$ を合同部分群, $F^{'} \subset \mathbb{H}$ を $\Gamma^{'}$ の基本領域とする. $f, g \in M_k(\Gamma^{'})$ かつ少なくとも一方はカスプ形式であるとき, $\langle f, g\rangle$ を以下で定義する.

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{[\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma}^{'}]} \int_{F^{'}} f(z)\overline{g(z)} y^k \frac{dxdy}{y^2}. \tag{7.8}$$

少なくとも一方がカスプ形式なので積分は収束する. (7.8) はエルミート内積の条件を満たす.

定義 7.9. $S_k(N,\chi)$ の部分空間 $S_k^1(N,\chi)$ を

$$\bigcup_M \bigcup_l \{f(lz) \mid f(z) \in S_k(M,\chi)\}$$

で生成される部分空間とする. ただし, χ のコンダクターを m_χ とすると, M は N の真の約数で $m_\chi \mid M$ となるものを動き, l は N/M の約数全体を動く. また $S_k^0(N,\chi)$ を $S_k^1(N,\chi)$ のピーターソン内積に関する直交補空間, すなわち

$$S_k^0(N,\chi) = S_k^1(N,\chi)^\perp$$

で定義する. $S_k^1(N,\chi)$ の元を *old form*, $S_k^0(N,\chi)$ の元を *new form* という.

注 7.10. $m_\chi \mid M$ より, χ は M で定義されるので, $S_k(M,\chi)$ を考えることができる. 具体的には χ は M を法として次のように定義される. $(n,M) \neq 1$ なら $\chi(n) = 0$ とすればよい. $(n,M) = 1$ のとき, ディリクレの算術級数定理より, $(n^{'}, N) = 1$ かつ $n^{'} \equiv n \pmod M$ となるような $n^{'}$ がとれる. この $n^{'}$ に対して $\chi(n)$ を

$$\chi(n) = \begin{cases} \chi(n^{'}) & ((n,M) = 1) \\ 0 & ((n,M) \neq 1) \end{cases}$$

と定義すれば, M を法とするディリクレ指標になる.

- **半整数ウエイトの場合**

整数ウエイトの場合と同様にまず両側剰余類の作用を考える. 以後今節では, k は奇数, $4 \mid N$ かつ $f \in M_{k/2}(\widetilde{\Gamma}_1(N))$ として話をすすめる.

定義 7.11. $\xi_n = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, n^{1/4} \right)$ とすれば $\xi_n \in G$ となる．このとき，

$$f|[\widetilde{\Gamma}_1(N)\xi_n\widetilde{\Gamma}_1(N)]_{k/2} := \sum f|[\xi_n\widetilde{\gamma}_j]_{k/2}$$

で定める．ただし和は，両側剰余類 $\widetilde{\Gamma}_1(N)\xi_n\widetilde{\Gamma}_1(N)$ に含まれる $\widetilde{\Gamma}_1(N)$ に関するすべての右剰余類をわたる．言い換えると，$\widetilde{\Gamma}'' = \xi_n^{-1}\widetilde{\Gamma}_1(N)\xi_n \cap \widetilde{\Gamma}_1(N)$ に関する右剰余類の完全代表系 $\{\widetilde{\gamma}_j\}$ をわたる和である．

命題 7.12. $(n, N) = 1$ かつ n は完全平方数でないならば，

$$f|[\widetilde{\Gamma}_1(N)\xi_n\widetilde{\Gamma}_1(N)]_{k/2} = 0$$

が成り立つ．

証明. 本命題の証明において，$\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ と $\xi = (\alpha, \phi) \in G$ は固定しておく．また $\Gamma' = \alpha^{-1}\Gamma_1(N)\alpha \cap \Gamma_1(N)$, $T = \{\pm 1, \pm i\}$ とする．まず，Γ' から T への写像 t を次のように構成する．$\gamma, \gamma_1 \in \Gamma_1(N)$ で $\gamma = \alpha^{-1}\gamma_1\alpha$ であるとする．このとき $\widetilde{\gamma}$, $\xi^{-1}\widetilde{\gamma}_1\xi \in G_1$ はともに射影 P で同じ元に移るため，

$$\xi^{-1}\widetilde{\gamma}_1\xi = \widetilde{\gamma}(E, t) \quad (E \text{ は単位行列}) \tag{7.13}$$

を満たす $t \in T$ が存在する．γ に対して (7.13) の t を対応させる写像を t と定義する．t が準同型になることは以下のようにして確認できる．

$\gamma = \alpha^{-1}\gamma_1\alpha$, $\gamma' = \alpha^{-1}\gamma_2\alpha$ かつ $t(\gamma) = t, t(\gamma') = t'$ とすると，

$$\xi^{-1}\widetilde{\gamma}_1\xi = \widetilde{\gamma}(E, t) \tag{7.14}$$
$$\xi^{-1}\widetilde{\gamma}_2\xi = \widetilde{\gamma}'(E, t') \tag{7.15}$$

が成り立つ．(7.14) × (7.15) より，

$$\xi^{-1}\widetilde{\gamma}_1\widetilde{\gamma}_2\xi = \widetilde{\gamma}(E, t)\widetilde{\gamma}'(E, t')$$

となり，(E, t) は G の中心の元なので，

$$\xi^{-1}\widetilde{\gamma_1\gamma_2}\xi = \widetilde{\gamma\gamma'}(E, tt')$$

が得られる．したがって，$t(\gamma\gamma') = tt' = t(\gamma)t(\gamma')$ となり t は準同型になる．

準同型 t が ϕ によらないことは ξ^{-1} と ξ で打ち消しあう事から明らかである．ここで補題を用意する．

補題 7.16. 記号は上記のものとする．$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$ に対して，$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ のとき，

$$t(\gamma) = \left(\frac{d}{n}\right)$$

となる．

証明. $\gamma = \alpha^{-1}\gamma_1\alpha$ としたとき，γ_1 を計算すると，

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} a & b/n \\ nc & d \end{pmatrix}$$

となる ($\gamma_1 \in \Gamma_1(N)$ だったので $n \mid b$ であることが必要である)．

今，$\xi_n = (\alpha, n^{1/4}), \widetilde{\gamma} = (\gamma, j(\gamma, z))$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} \xi_n\widetilde{\gamma}\xi_n^{-1} &= \left(\gamma_1, \left(\frac{c}{d}\right)\epsilon_d^{-1}\sqrt{ncz+d}\right) \\ &= \left(\gamma_1, j(\gamma_1, z)\left(\frac{n}{d}\right)\right) \\ &= \widetilde{\gamma}_1\left(E, \left(\frac{n}{d}\right)\right) \end{aligned}$$

と計算できる．変形すると，

$$\xi_n^{-1}\widetilde{\gamma}_1\xi_n = \widetilde{\gamma}\left(E, \left(\frac{n}{d}\right)\right)$$

となり，$t(\gamma) = \left(\frac{n}{d}\right)$ が成り立つ．また $d \equiv 1 \pmod N$ かつ $4 \mid N$ なので平方剰余の相互法則より，$t(\gamma) = \left(\frac{d}{n}\right)$ と変形できる． □

命題の証明に戻ろう．$\Gamma'' := \xi_n^{-1}\widetilde{\Gamma}_1(N)\xi_n \cap \widetilde{\Gamma}_1(N)$ と定める．写像 t の核を K とするとき，$\widetilde{K} = \widetilde{\Gamma}''$ が成り立つ．

• $\widetilde{K} \supset \widetilde{\Gamma}''$ について

$\gamma, \gamma_1 \in \Gamma_1(N)$ で $\widetilde{\gamma} = \xi_n^{-1}\widetilde{\gamma}_1\xi_n$ と仮定する．これに射影 P を適用すると，$\gamma = \alpha^{-1}\gamma_1\alpha$ より $\gamma \in \Gamma'$ が言える．$\xi_n^{-1}\widetilde{\gamma}_1\xi_n = \widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}(E, 1)$ なので $t(\gamma) = 1$ となり，$\gamma \in K$ すなわち，$\widetilde{\gamma} \in \widetilde{K}$ となる．

• $\widetilde{K} \subset \widetilde{\Gamma}''$ について

$\gamma \in K \subset \Gamma'$ なら，ある $\gamma_1 \in \Gamma_1(N)$ で $\gamma = \alpha^{-1}\gamma_1\alpha$ となる．このとき，$\xi_n^{-1}\widetilde{\gamma}_1\xi_n = \widetilde{\gamma}(E, 1) = \widetilde{\gamma}$ が成り立つので，$\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}''$ は明らかである．

$\widetilde{K} = \widetilde{\Gamma}''$ が分かったので，部分群 $\widetilde{\Gamma}''$ が $\widetilde{\Gamma}'$ 全体と一致するためには写像 t が自明になることが必要十分である．補題 7.16 より $t(\gamma) = \left(\frac{d}{n}\right)$ なのでこれは n が完全平方数であることと同値である．n が完全平方数でなければ，t は ± 1 のいずれかを取るので，$\widetilde{\Gamma}''$ は $\widetilde{\Gamma}'$ の

指数 2 の部分群になる. $\widetilde{\Gamma}'$ の右剰余類分解を $\widetilde{\Gamma}' = \widetilde{\Gamma}'' \cup \widetilde{\Gamma}''\widetilde{\tau}$ とすれば, $\tau \in \widetilde{\Gamma}' \setminus \widetilde{\Gamma}''$ なので, ある $\tau_1 \in \Gamma_1(N)$ が存在して $\tau = \alpha^{-1}\tau_1\alpha$ かつ $\widetilde{\tau} = \xi_n^{-1}\widetilde{\tau}_1\xi_n(E,-1)$ を満たす. $\Gamma_1(N)$ の Γ' に関する右剰余類分解を $\Gamma_1(N) = \bigcup_j \Gamma'\gamma_j$ とすれば,

$$\widetilde{\Gamma}_1(N) = \bigcup_j \widetilde{\Gamma}''\widetilde{\gamma}_j \cup \bigcup_j \widetilde{\Gamma}''\widetilde{\tau}\widetilde{\gamma}_j$$

が $\widetilde{\Gamma}_1(N)$ の $\widetilde{\Gamma}''$ に関する右剰余類分解となる. 例 7.2 より, $\Gamma_1(N)$ と $\alpha^{-1}\Gamma_1(N)\alpha$ は通約可能だったので j は有限であることを注意しておく. 定義 7.11 より,

$$f|[\widetilde{\Gamma}_1(N)\xi_n\widetilde{\Gamma}_1(N)]_{k/2} = \sum_j f|[\xi_n\widetilde{\gamma}_j]_{k/2} + \sum_j f|[\xi_n\widetilde{\tau}\widetilde{\gamma}_j]_{k/2}$$

となるが, $f \in M_{k/2}(\widetilde{\Gamma}_1(N))$ だったので f は $[\widetilde{\tau}_1]_{k/2}$ で不変だから各 j に対し,

$$\begin{aligned} f|[\xi_n\widetilde{\tau}\widetilde{\gamma}_j]_{k/2} &= f|[\xi_n\widetilde{\tau}\xi_n^{-1}\xi_n\widetilde{\gamma}_j]_{k/2} \\ &= f|[\widetilde{\tau}_1(E,-1)\xi_n\widetilde{\gamma}_j]_{k/2} \\ &= f|[(E,-1)\xi_n\widetilde{\gamma}_j]_{k/2} \\ &= (-1)^k f|[\xi_n\widetilde{\gamma}_j]_{k/2} \\ &= -f|[\xi_n\widetilde{\gamma}_j]_{k/2} \end{aligned}$$

となる.

したがって,

$$f|[\widetilde{\Gamma}_1(N)\xi_n\widetilde{\Gamma}_1(N)]_{k/2} = \sum_j f|[\xi_n\widetilde{\gamma}_j]_{k/2} - \sum_j f|[\xi_n\widetilde{\gamma}_j]_{k/2} = 0$$

が成り立ち, 題意は示された. □

注 7.17. $\widetilde{\Gamma}''$ は Γ' のリフトの部分群である. すなわち, 一般に $\widetilde{\Gamma}'' \subsetneq L(\Gamma')$ である. 一見一致しているように思えるので気をつけないといけない.

命題 7.12 より半整数ウエイトの場合は $T(n^2)$ の形のものだけ考えれば良いことになる. 以下, n が素数 p の場合について述べる.

定義 7.18. $f \in M_{k/2}(\widetilde{\Gamma}_1(N))$ とする. f に作用するヘッケ作用素 $T(p^2)$ を以下で定義する.

$$T(p^2)f := p^{k/2-2} f|[\widetilde{\Gamma}_1(N)\xi_{p^2}\widetilde{\Gamma}_1(N)]_{k/2}.$$

ただし, $\xi_{p^2} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, p^{1/2}\right)$ である.

ここで $T(p^2)f$ の q 展開の係数を f の q 展開の係数で表す極めて大切な定理を紹介しよう. Main Theorem を示す上でも大いに力を発揮する.

定理 7.19. [7, p.207, Proposition13] p を素数とし, $k = 2\lambda + 1$ を正の奇数とする. $f,\ T(p^2)f \in M_{k/2}(\widetilde{\Gamma}_0(N), \chi)$ の q 展開をそれぞれ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \quad T(p^2)f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n$$

とする. $p^2 \nmid n$ のとき $a_{n/p^2} = 0$ と定義すると, b_n は a_n を用いて

$$b_n = a_{p^2 n} + \chi(p)\left(\frac{(-1)^{\lambda} n}{p}\right) p^{\lambda-1} a_n + \chi(p^2) p^{k-2} a_{n/p^2} \tag{7.20}$$

と書ける.

8 Main Theorem の証明

いよいよ Main Theorem を証明していく．まず整数ウエイト $k-1$ の保型形式と半整数ウエイト $k/2$ の保型形式を結びつける志村対応を解説する．特に断らない限り，$q=e^{2\pi iz}$ とする．

定理 8.1 (志村の定理, [14])**.** k を 3 以上の奇数，$\lambda=(k-1)/2$ で χ を N を法とするディリクレ指標とする．$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n\in S_{k/2}(\widetilde{\Gamma}_0(N),\chi)$ はすべての素数 p に対する $T(p^2)$ の同時固有形式，すなわち

$$T(p^2)f=\lambda_p f \quad (\lambda_p\text{は固有値})$$

が成り立つと仮定する．$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nq^n$ を以下の恒等式で定める．

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_nn^{-s}=\prod_{p:\text{素数}}\frac{1}{1-\lambda_pp^{-s}+\chi(p)^2p^{k-2-2s}}.$$

このとき，$m_{\chi^2}\mid N^{'}$(m_{χ^2}はχ^2のコンダクター) を満たす正整数 $N^{'}$ が存在して，

$$g(z)\in M_{k-1}(N^{'},\chi^2)$$

となる．また，すべての素数 p に対して g は $T(p)$ の同時固有形式で，対応する固有値は λ_p，すなわち

$$T(p)g=\lambda_pg$$

となる．以後，志村対応で f と g が結びつくとき，$g=\mathrm{SH}(f)$ と書くことにする．

注 8.2. 志村の定理に出てくる $N^{'}$ はいつでも $N/2$ と取れることが Niwa [11] によって証明された．

ここで関数 θ_t を

$$\theta_t(z):=\theta(tz)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{tn^2} \tag{8.3}$$

で定義する．

命題 8.4. θ_t はウエイト 1/2，レベル $4t$，指標 χ_t の保型形式である．

証明. [7, p.184, Proposition4] より, $\theta_1(z) = \theta(z)$ がウエイト 1, レベル 4 の保型形式であることは認める. t を正の整数, $\rho = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{\rho} = (\rho, t^{-1/4}) \in G_1$ としたとき,

$$\theta_t(z) = \theta(tz) = t^{-1/4}\theta(z)|[\widetilde{\rho}]_{1/2}$$

となることに注意しておく.

$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4t)$ ならば,

$$\gamma_1 = \rho\gamma\rho^{-1} = \begin{pmatrix} a & tb \\ c/t & d \end{pmatrix}$$

は $4t \mid c$ だから $\Gamma_0(4)$ の元になる. 補題 7.16 と同様にして,

$$\widetilde{\gamma}_1 = \widetilde{\rho}\widetilde{\gamma}\widetilde{\rho}^{-1}(E, \chi_t(d)) \quad \text{すなわち} \quad \widetilde{\gamma} = \widetilde{\rho}^{-1}\widetilde{\gamma}_1(E, \chi_t(d))\widetilde{\rho}$$

が導けるため,

$$\begin{aligned}
\theta_t(z)|[\widetilde{\gamma}] &= t^{-1/4}(\theta(z)|[\widetilde{\rho}])[\widetilde{\gamma}] \\
&= t^{-1/4}\theta(z)|[\widetilde{\rho}\widetilde{\rho}^{-1}\widetilde{\gamma}_1(E, \chi_t(d))\widetilde{\rho}] \\
&= t^{-1/4}\theta(z)|[(E, \chi_t(d))\widetilde{\rho}] \quad (\because \widetilde{\gamma}_1 \in \widetilde{\Gamma}_0(4) \text{ なので} \theta(z)|[\widetilde{\gamma}_1] = \theta(z)) \\
&= t^{-1/4}\chi_t(d)\theta(z)|[\widetilde{\rho}] \\
&= \chi_t(d)\theta_t(z)
\end{aligned}$$

となり保型性が示せた (ウエイトの 1/2 は見やすくするため省略した).

カスプでの正則性については, 任意の $\xi \in G_1$ で $\theta_t(z)|[\xi]_{1/2}$ のフーリエ展開が負の冪を持たなければいい. [7, p.127, Lemma2] より任意の $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ に対して, f がカスプで正則なら $f|[\alpha]$ もカスプで正則であることが分かる. $\theta_t(z) = t^{-1/4}\theta(z)|[\widetilde{\rho}]_{1/2}$ なのでカスプでの正則性は保たれる.

以上より, $\theta_t(z) \in M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(4), \chi_t)$ となることが示せた. □

Main Theorem で出てきた g を思い出しておく.

$$g(z) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{8n})(1 - q^{16n}) \tag{8.5}$$

今から $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$, $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128), \chi_2)$, $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$, $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128), \chi_2)$ の構造について調べる. 結論から言うと, $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$ と $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128), \chi_2)$ はいくつか

のテータ関数 θ_t によって生成される．次に $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$ と $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128),\chi_2)$ についてだが，$M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$，$M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128),\chi_2)$ と比較するとレベルはともに 128 であり，ウエイトは 1 だけ異なる．Tunnell はこのことに着目して，ウエイト 1，レベル 128 の適当なカスプ形式 g を $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$ と $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128),\chi_2)$ の生成元に掛けることで $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$ と $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128),\chi_2)$ の生成元が得られないかと考えた．実は Main Theorem に出てきた g こそが $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$，$M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128),\chi_2)$ の生成元から $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$ と $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128),\chi_2)$ の生成元を与えてくれるカスプ形式なのである．

まず $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$ と $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128),\chi_2)$ について述べる．

命題 8.6. $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$，$M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128),\chi_2)$ について以下が成り立つ．

(1) $\theta_2,\theta_8,\theta_{32}$ は $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128),\chi_2)$ の基底になる．

(2) $\theta_1,\theta_4,\theta_{16}$ は $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$ の基底になる．

証明. (1) $t=2^k$ のとき定義 4.8 より，

$$\chi_t = \begin{cases} \mathrm{id} & (k\text{ が偶数のとき}) \\ \chi_2 & (k\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

となることに注意すると命題 8.4 より，$\theta_2,\theta_8,\theta_{32}$ は $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128),\chi_2)$ の元となる．[4, Cohen, Oesterlé] では半整数ウエイトの保型形式がなす線形空間の次元について述べられており，

$$\dim M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128),\chi_2)=3$$

と分かるので，$\theta_2,\theta_8,\theta_{32}$ が一次独立であることを示せばよい．$\theta_2,\theta_8,\theta_{32}$ の定数項，q^2，q^8 の係数を行成分に持つを 3×3 行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり，行列式が 0 でないのでこれらは一次独立である．したがって，$\theta_2,\theta_8,\theta_{32}$ は $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128),\chi_2)$ の基底になる．

(2) (1) と同様にして $\theta_1,\theta_4,\theta_{16}$ は $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$ の元となる．[4] から

$$\dim M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))=3$$

と分かるので，$\theta_1,\theta_4,\theta_{16}$ が一次独立であることを示せばよい．$\theta_1,\theta_4,\theta_{16}$ の定数項，q，q^4 の係数を行成分に持つを 3×3 行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり，行列式が 0 でないのでこれらは一次独立である．したがって，$\theta_1,\theta_4,\theta_{16}$ は $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$ の基底になる． □

注 8.7. [4] より, 次元について

$$\dim M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64), \chi_2) = 2 < \dim M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128), \chi_2) = 3$$

と確認できるので,

$$\langle \theta_2, \theta_8, \theta_{32} \rangle = M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128), \chi_2) \supsetneq M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64), \chi_2)$$

が成り立つ.

一方, $\langle \theta_1, \theta_4, \theta_{16} \rangle$ については, [4] で

$$\dim M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64)) = \dim M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128)) = 3$$

と確認できるので,

$$\langle \theta_1, \theta_4, \theta_{16} \rangle = M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128)) = M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64))$$

が成り立つ. 実際, $\theta_1, \theta_4, \theta_{16}$ は命題 8.4 よりすべてレベル 64 の保型形式なので, $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64))$ に入ることは明らかである.

さて, g について詳しく見ていく. 証明したいことは,

$$g \in S_1(128, \chi_{-2})$$

であるが, これを見るにはいくつかの準備が必要である. まず g を q に関する冪級数の形にする.

定理 8.8. q の冪級数として, g は以下で表される.

$$g(z) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (-1)^{m+n} q^{(4m+1)^2+16n^2} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (-1)^n q^{(4m+1)^2+8n^2}.$$

証明. 以下で表されるヤコビ三重積 [10, Moreno] を用いて示す.

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu^k q^{k^2} = \prod_{l=1}^{\infty} (1-q^{2l})(1+q^{2l-1}\nu)(1+q^{2l-1}\nu^{-1}). \tag{8.9}$$

天下り的であるが, 異なる形の級数の積が $q\prod_{l=1}^{\infty}(1-q^{8l})(1-q^{16l})$ に一致することを目指す. (8.9) の q, ν を下記の (　) 内のように置き換えると以下の恒等式が得られる.

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{2m^2+m} = \prod_{l=1}^{\infty}(1-q^{4l})(1+q^{2l-1}) \quad (q\to q^2, \nu=q), \tag{8.10}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} = \prod_{l=1}^{\infty}(1-q^{2l})(1-q^{2l-1})^2 \quad (\nu=-1), \tag{8.11}$$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m q^{2m^2+m} = \prod_{l=1}^{\infty}(1-q^{4l})(1-q^{2l-1}) \quad ((8.10)\text{ で } q\to -q), \tag{8.12}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{2n^2} = \prod_{l=1}^{\infty}(1-q^{4l})(1-q^{4l-2})^2 \quad ((8.11)\text{ で } q\to q^2). \tag{8.13}$$

(8.10) × (8.11) より,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{2m^2+m} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} = \prod_{l=1}^{\infty}(1-q^{l})(1-q^{2l}) \tag{8.14}$$

が得られ, (8.12) × (8.13) より,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m q^{2m^2+m} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{2n^2} = \prod_{l=1}^{\infty}(1-q^{l})(1-q^{2l}) \tag{8.15}$$

が得られる. (8.14) の右辺と (8.15) の右辺は一致している. 最後に (8.14) と (8.15) の q を q^8 に置き換えて q を掛けると,

$$\begin{aligned} q\prod_{l=1}^{\infty}(1-q^{8l})(1-q^{16l}) &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (-1)^{m+n} q^{(4m+1)^2+16n^2} \\ &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (-1)^{n} q^{(4m+1)^2+8n^2} \end{aligned}$$

となり, 目標の形が得られた. □

次に, g を θ_t たちで表す.

命題 8.16.

$$g(z) = \frac{1}{2}(\theta_1(z)-\theta_4(z))(2\theta_{32}(z)-\theta_8(z))$$

が成り立つ.

証明.

$$\theta_4(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{4n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{(2n)^2}$$

なので, $\theta_1(z)$ と $\theta_4(z)$ の差は q の冪が奇数の部分だけ残り,

$$\theta_1(z) - \theta_4(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{(2k+1)^2} = 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{(4m+1)^2}$$

となる. また,

$$2\theta_{32}(z) = 2 + 2\sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0} q^{8(2n)^2}$$

だから,

$$2\theta_{32}(z) - \theta_8(z) = 1 + \sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0} (-1)^n q^{8n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{8n^2}$$

となる. 以上より,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\theta_1(z) - \theta_4(z))(2\theta_{32}(z) - \theta_8(z)) &= \frac{1}{2}\cdot 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{(4m+1)^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{8n^2} \\ &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (-1)^n q^{(4m+1)^2+8n^2}\end{aligned}$$

となり, 定理 8.8 より $g(z)$ と一致する. □

定理 8.17. g はウエイト 1, レベル 128, 指標 χ_{-2} のカスプ形式, すなわち

$$g \in S_1(128, \chi_{-2})$$

となる.

証明. 命題 8.6 より,

$$\frac{1}{2}(\theta_1(z) - \theta_4(z)) \in M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128)) \quad \text{かつ} \quad 2\theta_{32}(z) - \theta_8(z) \in M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128), \chi_2)$$

である. g はこの 2 つの積だから定理 6.14 より,

$$M_{2/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128), \chi_2) = M_1(128, \chi_{-1}\chi_2) = M_1(128, \chi_{-2})$$

の元になる. したがって, g が $\Gamma_0(128)$ のすべてのカスプで零点を持つことが言えれば主張が成り立つ.

今から $\Gamma_0(128)$ のカスプを求める．まず ∞ を固定する $SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群を Γ_∞, すなわち

$$\Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

と書くことにする．$\mathbb{Q} \cup \{\infty\} = SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma_\infty$ の $\Gamma_0(128)$-同値類を求めればいいので, 両側剰余類 $\Gamma_0(128) \setminus SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma_\infty$ の代表元を求める．$\Gamma_0(128)$ による左からの商について考えると,

$$\Gamma_0(128) \setminus SL_2(\mathbb{Z}) \cong (\Gamma(128) \setminus \Gamma_0(128)) \setminus (\Gamma(128) \setminus SL_2(\mathbb{Z}))$$

が成り立つ．定理 5.16 より, 自然な準同型 $SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{Z}/128\mathbb{Z})$ は全射かつ核は $\Gamma(128)$ なので準同型定理より,

$$\Gamma(128) \setminus SL_2(\mathbb{Z}) \cong SL_2(\mathbb{Z}/128\mathbb{Z})$$

となる．また $\Gamma(128) \setminus \Gamma_0(128)$ を H とおくと,

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}/128\mathbb{Z}) \right\}$$

となる．

$(0,1)H = (0,*)$ なので, H による右からの作用で安定な列ベクトルは, $(0,1)$ の張る空間 $\langle(0,1)\rangle$ であることが分かる．列ベクトル (x,y) は $(0,1)\begin{pmatrix} * & * \\ x & y \end{pmatrix}$ と表せるので, $\Gamma_0(128) \setminus SL_2(\mathbb{Z}) \cong H \setminus SL_2(\mathbb{Z}/128\mathbb{Z})$ の代表元として,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \qquad (x, y \in \{0,1,2,...,127\} \text{ かつ } ay - bx = 1)$$

がとれる．

また, $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$ なので, Γ_∞ の左からの作用で安定な行ベクトルは, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の張る空間 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ であることが分かる．$\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix}$ より,

$$\frac{a}{x} \qquad (x \in \{0,1,2,...,127\} \text{ かつ } (a,x) = 1)$$

が $\Gamma_0(128)$ カスプの代表元である．以下の 3 つの場合に分け, さらに絞り込みを行う．

(ア) x が 128 を法として可逆元のとき

H の元 $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ による左からの積で,

$$\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} * \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と変形できるので, カスプ a/x は 0 と同値である.

(イ) x=0 のとき

$a/0 = \infty$ よりカスプ 0 と同値である.

(ウ) $x \neq 0$ が 128 を法として可逆元でないとき

$(a, x) = 1$ より a は奇数となるので, H の元 $\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ による左からの積で,

$$\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \qquad (k \text{ は } 2 \text{ から } 126 \text{ までの偶数})$$

と変形できる.

(ア), (イ), (ウ) より, 考えるべきカスプは

$$0, \infty, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, ..., \frac{1}{126}$$

の 65 個に絞られた.

さらに, H の元 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の左からの積で,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1+k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k}{1+k} \end{pmatrix}$$

より, $k \mapsto \frac{k}{1+k} \pmod{128}$ で互いに移りあうものは, 同値なカスプになる (以下 $\pmod{128}$ は省略). 実際, Mathematica でコマンド

$$\mathrm{f[k\_] := Mod[k * PowerMod[1+k, -1, 128], 128]}$$

で $k = 2, 4, ..., 126$ の $k \mapsto \frac{k}{1+k}$ による変換を計算すると次ページの 14 グループに分けられる.

表 2 より $\Gamma_0(128)$ のカスプは

表 2　$k \mapsto \frac{k}{1+k}$ による変換

$k = 2$ 位数 32	2, 86, 26, 110, 114, 70, 10, 94, 98, 54, 122, 78, 82, 38, 106, 62, 66, 22, 90, 46, 50, 6, 74, 30, 34, 118, 58, 14, 18, 102, 42, 126
$k = 4$ 位数 8	4, 52, 100, 20, 68, 116, 36, 84
$k = 8$ 位数 2	8, 72
$k = 12$ 位数 8	12, 60, 208, 28, 76, 124, 44, 92
$k = 16$ 位数 1	16
$k = 24$ 位数 2	24, 88
$k = 32$ 位数 1	32
$k = 40$ 位数 2	40, 104
$k = 48$ 位数 1	48
$k = 56$ 位数 2	56, 120
$k = 64$ 位数 1	64
$k = 80$ 位数 1	80
$k = 96$ 位数 1	96
$k = 112$ 位数 1	112

$$0, \infty, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \frac{1}{24}, \frac{1}{32}, \frac{1}{40}, \frac{1}{48}, \frac{1}{56}, \frac{1}{64}, \frac{1}{80}, \frac{1}{96}, \frac{1}{112}$$

の高々 16 個という結果が得られた (まだ少なくできるかもしれないことを注意しておく).

いよいよ g の各カスプでの値を計算する. 以下で出てくる S と T は,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

としておく.

- **∞ について**

カスプ ∞ については q 展開の定数項が 0 であることから, $g(\infty) = 0$.

- **$\mathbf{0}$ について**

カスプ 0 での計算では関数等式, [7, p.124, (3.4)]

$$\theta\left(-\frac{1}{4z}\right) = \left(\frac{2z}{i}\right)^{1/2} \theta(z) \tag{8.18}$$

を用いる. $0 = S\infty$ より $\widetilde{S} = [S, z^{1/2}]_{1/2} \in G_1$ を θ_t に作用すると,

$$\begin{aligned}
\theta_t(z)|[\widetilde{S}]_{1/2} &= \theta_t\left(-\frac{1}{z}\right) z^{-1/2} = \theta\left(-\frac{t}{z}\right) z^{-1/2} \\
&= \theta\left(-\frac{1}{4 \cdot \frac{z}{4t}}\right) z^{-1/2} \\
&= \theta\left(\frac{z}{4t}\right)\left(\frac{z}{2ti}\right)^{1/2} z^{-1/2} \quad (\because (8.18)) \\
&= \theta\left(\frac{z}{4t}\right)(2ti)^{-1/2}
\end{aligned}$$

となる. これより, $z \to i\infty$ では $\theta_t(z)$ は $1 \times (2ti)^{-1/2} = (2ti)^{-1/2}$ に収束する.

したがって, g に $\widetilde{S} = [S, z^{1/2}]_1 \in G_1$ を作用すると,

$$g(z)|[\widetilde{S}]_1 = \frac{1}{2}\left(\theta\left(\frac{z}{4}\right)(2i)^{-1/2} - \theta\left(\frac{z}{16}\right)(8i)^{-1/2}\right)\left(2\theta\left(\frac{z}{128}\right)(64i)^{-1/2} - \theta\left(\frac{z}{32}\right)(16i)^{-1/2}\right)$$

となり, $z \to i\infty$ では

$$\frac{1}{2}\{(2i)^{-1/2} - (8i)^{-1/2}\}\{2(64i)^{-1/2} - (16i)^{-1/2}\} = 0$$

に収束する. よって, $g(0) = 0$ である.

- **$1/k \quad (k = 2, 4, 6, ..., 126)$ について**

$1/k = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -k & -1 \end{pmatrix} \infty = ST^{-k}S\infty$ なので, $g(z)|[(S,\phi_1(z))][(T^{-k},\phi_2(z))][(S,\phi_3(z))]$ (添え字の 1 は省略) を計算し, $z \to i\infty$ での値を調べればいい. 以下では, $\phi_1(z) = \phi_3(z) = z^{1/2}, \phi_2(z) = 1$ として計算している. まず θ_t に作用すると,

$$
\begin{aligned}
&\theta_t(z)|[(S,\phi_1(z))][(T^{-k},\phi_2(z))][(S,\phi_3(z))] \\
&= (2ti)^{-1/2}\theta\left(\frac{z}{4t}\right)\Big|[(T^{-k},\phi_2(z))][(S,\phi_3(z))] \quad (\text{カスプ } 0 \text{ での計算.}) \\
&= (2ti)^{-1/2}\theta\left(\frac{z-k}{4t}\right)\Big|[(S,\phi_3(z))] \\
&= (2ti)^{-1/2}\theta\left(\frac{-\frac{1}{z}-k}{4t}\right)z^{-1/2} \\
&= (2tiz)^{-1/2}\theta\left(-\frac{1}{4\cdot\frac{t}{1/z+k}}\right) \\
&= (2tiz)^{-1/2}\theta\left(\frac{t}{\frac{1}{z}+k}\right)\left\{\frac{2t}{i(\frac{1}{z}+k)}\right\}^{1/2} \\
&= \theta\left(\frac{t}{\frac{1}{z}+k}\right)\{-(1+kz)\}^{-1/2}
\end{aligned}
$$

なので, $z \to i\infty$ では 0 となる.

したがって,

$$
\begin{aligned}
&g(z)|[(S,\phi_1(z))][(T^{-k},\phi_2(z))][(S,\phi_3(z))] \\
&\quad = -\frac{1}{1+kz}\left\{\theta\left(\frac{1}{\frac{1}{z}+k}\right)-\theta\left(\frac{4}{\frac{1}{z}+k}\right)\right\}\left\{2\theta\left(\frac{32}{\frac{1}{z}+k}\right)-\theta\left(\frac{8}{\frac{1}{z}+k}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

が成り立ち, $z \to i\infty$ では 0 に収束するので, $g(1/k) = 0$ となる.

以上よりすべてのカスプで零点を持つことが示せたので, g は $S_1(128,\chi_{-2})$ の元となる. □

$g \in S_1(128,\chi_{-2})$ が分かったので, いよいよ $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$, $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128),\chi_2)$ の構造について見ていく.

命題 8.19. $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$, $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128),\chi_2)$ について以下が成り立つ.

(1) $g\theta_2, g\theta_8, g\theta_{32}$ は $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$ の基底になる.

(2) $g\theta_1, g\theta_4, g\theta_{16}$ は $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128),\chi_2)$ の基底になる.

証明. (1) g は $S_1(128, \chi_{-2})$ の元である. 定理 6.14 より,

$$S_1(128, \chi_{-2}) = S_{2/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128), \chi_{-1}^{-1}\chi_{-2}) = S_{2/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128), \chi_2)$$

だから $g\theta_2, g\theta_8, g\theta_{32}$ は $S_{2/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128), \chi_2)$ の元と $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128), \chi_2)$ の元の積となるため $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$ の元になる. [4] より,

$$\dim S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128)) = 3$$

と分かるので, $g\theta_2, g\theta_8, g\theta_{32}$ が一次独立であればいい. 命題 8.6 (1) より, $\theta_2, \theta_8, \theta_{32}$ が一次独立なので, これらも一次独立である. したがって, $g\theta_2, g\theta_8, g\theta_{32}$ は $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$ の基底になる.

(2) (1) と同様にして, $g\theta_1, g\theta_4, g\theta_{16}$ は $S_{2/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128), \chi_2)$ の元と $M_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$ の元の積となるため $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128), \chi_2)$ の元になる. [4] より,

$$\dim S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128), \chi_2) = 3$$

と分かるので, $g\theta_1, g\theta_4, g\theta_{16}$ が一次独立であればいい. 命題 8.6 (2) より, $\theta_1, \theta_4, \theta_{16}$ が一次独立なので, これらも一次独立である. したがって, $g\theta_1, g\theta_4, g\theta_{16}$ は $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128), \chi_2)$ の基底になる. □

注 8.20. [4] より, 次元について

$$\dim S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64)) = 1, \quad \dim S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64), \chi_2) = 0$$

と確認できるので,

$$\begin{aligned} S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64)) &\subsetneq S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128)) = \langle g\theta_2, g\theta_8, g\theta_{32} \rangle, \\ S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64), \chi_2) &\subsetneq S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128), \chi_2) = \langle g\theta_1, g\theta_4, g\theta_{16} \rangle \end{aligned}$$

が成り立つ.

Tunnell は志村対応のもとで $L(E_1, s)$ に対応する保型形式 $\phi = f_{E_1} \in S_2(\Gamma_0(32))$ に移っていく保型形式 $f \in S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(N), \chi)$ を求めた. Niwa [11] により, SH(f) は $S_2(N/2, \chi^2)$ の元であることが示されているので $N = 64$ と取りたいところだが, 実際には, 志村対応のもとで ϕ に移るレベル 64 の保型形式は存在しない. Tunnell は ϕ に移っていく保型形式は少なくともレベル 128 を持つことを示した.

定理 8.21. 保型形式 $g\theta_2, g\theta_4, g\theta_8, g\theta_{16}$ は志村対応のもとで, ウエイト 2, レベル 32 の保型形式 $\phi = f_{E_1}$ に移る. すなわち

$$\mathrm{SH}(g\theta_t) = \phi \quad (t = 2, 4, 8, 16)$$

が成り立つ.

証明. 同様の議論なので $g\theta_2, g\theta_8$ についてのみ示す. 定理 8.21 を証明をするにあたって補題を 3 つ用意する.

補題 8.22. $g\theta_2, g\theta_8, 2g\theta_{32} - g\theta_8$ はヘッケ作用素 $T(3^2), T(5^2)$ の固有形式である.

証明. まずはじめに $g\theta_2, g\theta_8, g\theta_{32}$ の最初の項を書き出しておく.

$$\begin{aligned} g\theta_2 &= q + 2q^3 + q^9 - 2q^{11} - 4q^{17} - 2q^{19} - 3q^{25} + \cdots, \\ g\theta_8 &= q + q^9 - 4q^{17} - 3q^{25} + 4q^{33} + \cdots, \\ g\theta_{32} &= q - q^9 - 2q^{17} + q^{25} + 2q^{33} + \cdots. \end{aligned}$$

$T(p^2)$ は $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$ を保つことに注意しておく. $g\theta_2, g\theta_8, g\theta_{32}$ の q, q^3, q^9 の係数を行成分に持つ行列の行列式は 0 でなかったので, ヘッケ作用素で移った元の q, q^3, q^9 の係数を見れば一意的に定まることになる. $g\theta_2$ の q 展開で現れる q の冪は 8 を法として 1 または 3 だったので, 定理 7.19 から $T(3^2)(g\theta_2)$ の q 展開で現れる q の冪も 8 を法として 1 または 3 であることが容易に分かる.

$T(3^2)(g\theta_2)$ を,

$$T(3^2)(g\theta_2) = b_1 q + b_3 q^3 + b_9 q^9 + \cdots$$

とおいて b_1, b_3, b_9 を計算する. b_9 を求める過程で a_{81} が必要になるので先に求める. $g\theta_2 = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (-1)^{m+n} q^{(4m+1)^2+16n^2+2t^2}$ において, $(4m+1)^2 + 16n^2 + 2t^2 = 81$ となる整数の組 (m, n, t) は,

$$(-1, \pm 2, \pm 2),$$

$$(2, 0, 0),$$

$$(-1, 0, \pm 6),$$

$$(-2, 0, \pm 4)$$

の 9 つなので $a_{81} = -1-1-1-1+1-1-1+1+1 = -3$ となる．よって，

$$\begin{aligned} b_1 &= a_9 + \left(\frac{-1}{3}\right) a_1 = 1 - 1 = 0, \\ b_3 &= a_{27} = 0, \\ b_9 &= a_{81} + 3a_1 = 0 \end{aligned}$$

と求まり，b_1, b_3, b_9 がすべて 0 であることから，$T(3^2)(g\theta_2) = 0$ が言える．したがって，$g\theta_2$ が $T(3^2)$ の固有値 0 に関する固有形式であることが示せた．

$T(3^2)(g\theta_8), T(3^2)(g\theta_{32})$ についても q, q^3, q^9 の係数を計算して，

$$\begin{aligned} T(3^2)(g\theta_8) &= 0q + 0q^3 + 0q^9 + \cdots, \\ T(3^2)(g\theta_{32}) &= -2q + 0q^3 + 6q^9 + \cdots \end{aligned}$$

となるので $g\theta_8$ も $T(3^2)$ の固有値 0 に関する保型形式になる．$g\theta_{32}$ については少し工夫が必要である．$T(3^2)(g\theta_{32}) = ag\theta_2 + bg\theta_8 + cg\theta_{32}$ とおいて，連立方程式

$$\begin{cases} a + b + c = -2 \\ \quad\quad 2a = 0 \\ a + b - c = 6 \end{cases}$$

を解くと，$(a, b, c) = (0, 2, -4)$ となるので $T(3^2)(g\theta_{32}) = 2g\theta_8 - 4g\theta_{32}$ となる．これを固有形式の形になるように変形すると，

$$T(3^2)(2g\theta_{32} - g\theta_8) = -4(2g\theta_{32} - g\theta_8)$$

となり，$2g\theta_{32} - g\theta_8$ がヘッケ作用素 $T(3^2)$ の -4 に対する固有形式であることが分かる．

$T(5^2)$ の計算についても $T(5^2)(g\theta_2), T(5^2)(g\theta_8), T(5^2)(g\theta_{32})$ の q, q^3, q^9 の項は，

$$\begin{aligned} T(5^2)(g\theta_2) &= -2q - 4q^3 - 2q^9 + \cdots, \\ T(5^2)(g\theta_8) &= -2q + 0q^3 - 2q^9 + \cdots, \\ T(5^2)(g\theta_{32}) &= 2q + 0q^3 - 10q^9 + \cdots \end{aligned}$$

となるので，$g\theta_2, g\theta_8$ はともに固有値 -2 に関する固有形式になる．$g\theta_{32}$ については，$T(3^2)$ のときと同じように少し工夫が必要である．$T(5^2)(g\theta_{32}) = ag\theta_2 + bg\theta_8 + cg\theta_{32}$ とおいて，連立方程式

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ \quad\quad 2a = 0 \\ a + b - c = -10 \end{cases}$$

を解くと, $(a,b,c)=(0,-4,6)$ となるので $T(5^2)(g\theta_{32})=-4g\theta_8+6g\theta_{32}$ となる. これを固有形式の形になるように変形すると,

$$T(5^2)(2g\theta_{32}-g\theta_8)=6(2g\theta_{32}-g\theta_8)$$

となり, $2g\theta_{32}-g\theta_8$ がヘッケ作用素 $T(5^2)$ の 6 に関する固有形式であることが分かる. 以上から, 補題 8.22 は示せた. $\square$

補題 8.23. $2g\theta_{32}-g\theta_8$ の q 展開について,

$$2g(z)\theta_{32}(z)-g(z)\theta_8(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\chi_{-1}(m)mq^{m^2}$$

が成り立つ.

証明. この等式を直接証明するのは非常に難しいと思う. $2g\theta_{32}-g\theta_8$ に

$$g(z)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}(-1)^{m+n}q^{(4m+1)^2+16n^2},\quad \theta_t(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{tn^2}$$

を代入して整理すると,

$$2g(z)\theta_{32}(z)-g(z)\theta_8(z)=\sum_{(m,n,t)\in\mathbb{Z}^3}(-1)^{m+n+t}q^{(4m+1)^2+16n^2+8t^2}$$

となるため 3 つの平方数の和に関する計算をする必要があるからである. 別の方法で示すことを考えてみる.

仮に $\sum_{m=1}^{\infty}\chi_{-1}(m)mq^{m^2}$ が保型形式であること ($S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$ の元であること) が言えたらどうだろうか. $\sum_{m=1}^{\infty}\chi_{-1}(m)mq^{m^2}$ の q,q^3,q^9 の係数は, $1,0,-3$ なので, $2g\theta_{32}-g\theta_8$ の q,q^3,q^9 の係数と一致する. $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$ は 3 次元空間なので, この 2 つの保型形式は一致しなければならない.

ゆえに問題は $\sum_{m=1}^{\infty}\chi_{-1}(m)mq^{m^2}$ が保型形式であること ($S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$ の元であること) を示すことに帰着される. 以後, 定理 8.21 の証明が完結するまでは $\sum_{m=1}^{\infty}\chi_{-1}(m)mq^{m^2}$ を f と表すことにする (場合によっては, f と書かず, 直接 $\sum_{m=1}^{\infty}\chi_{-1}(m)mq^{m^2}$ と書いている).

- 保型性について

[14, 志村, Proposition2.2.] ではコンダクター r の奇指標 ψ に対して, $\sum_{m=1}^{\infty}\psi(m)mq^{m^2}$ が $\widetilde{\Gamma}_0(4r^2)$ の任意の元で保型性を満たすことが述べられており, これを $\psi=\chi_{-1}$ $(r=4)$ で用いると, $\sum_{m=1}^{\infty}\chi_{-1}(m)mq^{m^2}$ が $\widetilde{\Gamma}_0(64)$ の任意の元で保型性を満たすことが分かる. つまり, $\widetilde{\Gamma}_0(128)$ の任意の元でも保型性を満たす.

• カスプで零点を持つことについて

$\Gamma_0(128)$ のカスプはすでに分かっているので f の各カスプでの値を計算する.

• ∞ について

カスプ ∞ については q 展開の定数項が 0 であることから, $f(\infty)=0$.

• **0** について

$0=S\infty$ より $\widetilde{S}=[S,z^{1/2}]_{3/2}\in G_1$ を f に作用すると,

$$\begin{aligned} f(z)|[\widetilde{S}]_{3/2} &= f\left(-\frac{1}{z}\right)z^{-3/2} \\ &= f\left(-\frac{1}{64\cdot\frac{z}{64}}\right)z^{-3/2} = *\left(\frac{z}{64}\right)^{3/2} f\left(\frac{z}{64}\right)z^{-3/2} \\ &= *f\left(\frac{z}{64}\right) \qquad (*\text{は定数}) \end{aligned}$$

となる. これより, $z\to i\infty$ では 0 に収束するので $f(0)=0$. 2 行目の変換は [14, 志村, Proposition2.2.] より従う.

• $1/k \quad (k=2,4,6,...,126)$ について

$1/k=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -k & -1\end{pmatrix}\infty=ST^{-k}S\infty$ なので, $f(z)|[(S,\phi_1(z))][(T^{-k},\phi_2(z))][(S,\phi_3(z))]$ (添え字の 3/2 は省略) を計算し, $z\to i\infty$ での値を調べればいい. 以下では, $\phi_1(z)=\phi_3(z)=z^{1/2},\phi_2(z)=1$ として計算している.

$$\begin{aligned} & f(z)|[(S,\phi_1(z))][(T^{-k},\phi_2(z))][(S,\phi_3(z))] \\ &= *f\left(\frac{z}{64}\right)\Big|[(T^{-k},\phi_2(z))][(S,\phi_3(z))] \quad (\because \text{カスプ 0 での計算}) \\ &= *f\left(\frac{z-k}{64}\right)\Big|[(S,\phi_3(z))] \\ &= *f\left(\frac{-\frac{1}{z}-k}{64}\right)z^{-3/2} \\ &= *f\left(-\frac{1}{64\cdot\frac{1}{1/z+k}}\right)z^{-3/2} \\ &= *f\left(\frac{1}{\frac{1}{z}+k}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{z}+k}\right)^{3/2}z^{-3/2} \\ &= *f\left(\frac{z}{1+kz}\right)(1+kz)^{-3/2} \quad (*\text{は定数}) \end{aligned}$$

したがって $z\to i\infty$ では 0 となる.

以上よりすべてのカスプで零点を持つことが示せた．保型性の議論と合わせて，f が保型形式であること ($S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64))$ の元であること) が言えたので，

$$2g(z)\theta_{32}(z) - g(z)\theta_8(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{-1}(m) m q^{m^2}$$

が成り立つ． □

補題 8.24. $S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128))$ の部分空間 $\langle g\theta_2, g\theta_8 \rangle$ はすべての $T(p^2)$ で安定である．

証明. $T(3^2), T(5^2)$ はエルミート作用素なので，

$$\langle T(3^2) g\theta_2, 2g\theta_{32} - g\theta_8 \rangle = \langle g\theta_2, T(3^2)(2g\theta_{32} - g\theta_8) \rangle$$

が成り立つ．左辺は

$$\langle 0 g\theta_2, 2g\theta_{32} - g\theta_8 \rangle = 0$$

であり，右辺は

$$\langle g\theta_2, 4(2g\theta_{32} - g\theta_8) \rangle = 4 \langle g\theta_2, 2g\theta_{32} - g\theta_8 \rangle$$

なので $\langle g\theta_2, 2g\theta_{32} - g\theta_8 \rangle = 0$ となり，$g\theta_2$ と $2g\theta_{32} - g\theta_8$ は直交する．同様にして $g\theta_8$ と $2g\theta_{32} - g\theta_8$ の直交性も言えるので，

$$S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(128)) = \langle g\theta_2, g\theta_8 \rangle \oplus \langle 2g\theta_{32} - g\theta_8 \rangle$$

となる．

ここで $\langle 2g\theta_{32} - g\theta_8 \rangle = \langle \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{-1}(m) m q^{m^2} \rangle$ が $T(p^2)$ で安定であることが言えれば，$T(p^2)$ がエルミート作用素であることにより固有直和分解が存在するので $\langle g\theta_2, g\theta_8 \rangle$ も $T(p^2)$ で安定であることが分かる．また，

$$\sum_{m=1}^{\infty} \chi_{-1}(m) m q^{m^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n,$$

$$T(p^2) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \chi_{-1}(m) m q^{m^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$$

とおくと，n が平方数でないときは定理 7.19 より $b_n = 0$ がすぐ分かる．よって，n が平方数のときの係数 b_n を調べる．

- $p \nmid n$ のとき

$$\begin{aligned} b_{n^2} &= a_{(np)^2} + \left(\frac{-1}{p} \right) a_{n^2} = \chi_{-1}(np) np + \chi_{-1}(p) \chi_{-1}(n) n \\ &= a_{n^2} \chi_{-1}(p)(p+1). \end{aligned}$$

• $p \mid n$ のとき

$$\begin{aligned} b_{n^2} &= \chi_{-1}(np)np + p\chi_{-1}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{n}{p} \\ &= \chi_{-1}(np)np + n\chi_{-1}(np) \qquad \left(\because \frac{n}{p} \equiv \frac{n}{p}\cdot p^2 \equiv np \pmod 4\right) \\ &= a_{n^2}\chi_{-1}(p)(p+1). \end{aligned}$$

よって f は $T(p^2)$ の固有値 $\chi_{-1}(p)(p+1)$ に関する固有形式であり, $\langle f\rangle$ は $T(p^2)$ で安定となる. 上で述べたことから $\langle g\theta_2, g\theta_8\rangle$ が $T(p^2)$ で安定となる. □

さて定理 8.21 の証明に戻ろう. 示したいことは $\mathrm{SH}(g\theta_2) = \mathrm{SH}(g\theta_8) = \phi$ であった. まず $g(\theta_2 - \theta_8)$ の q 展開で現れる項の冪に注目する.

$$\theta_2(z) - \theta_8(z) = 2(q^{2\times 1^2} + q^{2\times 3^2} + \cdots)$$

なので $\theta_2 - \theta_8$ の q 展開で現れる冪は 8 を法としてすべて 2 である. 一方,

$$g(z) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (-1)^{m+n} q^{(4m+1)^2+16n^2}$$

の q 展開で現れる冪は 8 を法としてすべて 1 である. したがって, $g(\theta_2 - \theta_8)$ の q 展開で現れる冪は 8 を法としてすべて 3 となる. 同様にして $g\theta_8$ の q 展開で現れる冪は 8 を法としてすべて 1 であることが分かる. また定理 7.19 より, $T(p^2)(g(\theta_2-\theta_8))$, $T(p^2)(g\theta_8)$ の q 展開で現れる冪もそれぞれ, 8 を法としてすべて $3, 1$ となる. このことから任意の p に対しある λ_p, μ_p が存在して

$$T(p^2)(g(\theta_2-\theta_8)) = \lambda_p g(\theta_2 - \theta_8) \tag{8.25}$$
$$T(p^2)(g\theta_8) = \mu_p g\theta_8 \tag{8.26}$$

が成り立つ. $g(\theta_2-\theta_8), g\theta_8$ に対して志村の定理を適用すると, $\phi_1, \phi_2 \in M_2(N', \chi^2)$ (N' は 128 の約数) で,

$$T(p)\phi_1 = \lambda_p \phi_1 \tag{8.27}$$
$$T(p)\phi_2 = \mu_p \phi_2 \tag{8.28}$$

となるものが存在する. (8.27), (8.28) を満たす保型形式を見つけたいわけだが, $p = 3, 5$ のとき $\lambda_3, = \mu_3 = 0, \lambda_5 = \mu_5 = -2$ であることは補題 8.22 より分かっている. [15, Birch, Kuyk] の Table3 では, レベル N の保型形式ごとにヘッケ作用素 $T(p)$ の固有値 a_p

が表で与えられている．高々レベル 128 の保型形式で $T(3)$ の固有値が 0, $T(5)$ の固有値が -2 となるものを探すと, レベル 32 の保型形式 ϕ しかないことが分かる．したがって,

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi$$

となり, (8.27) と (8.28) より $T(p)\phi = \lambda_p\phi = \mu_p\phi$ なので,

$$\lambda_p = \mu_p \tag{8.29}$$

が成り立つ．(8.25), (8.26), (8.29) から

$$T(p^2)(g\theta_2) = \lambda_p g\theta_2 \tag{8.30}$$

となり, $g\theta_2$ も固有値 λ_p に対する固有形式になる．すべての $T(p)$ で固有値が $g\theta_8$ と同じなので, $g\theta_2$ と $g\theta_8$ の志村写像による行き先は同じになり,

$$\mathrm{SH}(g\theta_2) = \mathrm{SH}(g\theta_8) = \phi \tag{8.31}$$

となる．これで定理 8.21 の証明を終わる ($g\theta_4$, $g\theta_{16}$ についても同様の計算を行えばよい). □

今までの結果を用いると, Tunnell が示した次の事実を確認することができる．

定理 8.32. 志村対応のもとで ϕ に移るレベル 64 の保型形式は存在しない．

証明. $f \in S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64), \chi)$ で $\mathrm{SH}(f) = \phi$ となるものが存在する可能性のある χ をすべて探す．$\phi \in S_2(\Gamma_0(32))$ かつ Niwa [11] より, $\mathrm{SH}(f) \in S_2(32, \chi^2)$ なので $\chi^2 = \chi_{\mathrm{triv}}$, すなわち χ は 2 次指標である．また χ が奇指標なら $f \in S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64), \chi)$ に対し,

$$f(z) = f(z)|[(-E, 1)]_{1/2} = \chi(-1)f(z) = -f(z)$$

から $f(z) = 0$ となってしまうので

$$S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64), \chi) = \{0\}$$

となる．したがって, χ は偶指標でなければならない．

また指標付保型形式空間の定義より, χ のコンダクターは $64 = 2^6$ を割り切る．ここで指標の一般論について, N を法とするディリクレ指標全体のなす群は既約剰余類群 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ と同型であるという事実と, 群論の一般論について, $k \geq 3$ ならば $(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{k-2}\mathbb{Z}$ という事実を用いる．$(\mathbb{Z}/64\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ の元で位数が 2 以下のものは 4 つあるので, 64 を割り切るコンダクターを持つ 2 次指標は 4

つ存在する. さらに, $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の 4 つの元の位数はすべて 2 以下なので χ のコンダクターは 8 以下となる. 例 4.10 より, これらは $\chi_{\mathrm{triv},2}, \chi_{-1}, \chi_2, \chi_{-2}$ であるが, このうち偶指標であるのは $\chi_{\mathrm{triv},2}, \chi_2$ の 2 つである.

以上より, 考えるべきカスプ空間は

$$S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64)), \quad S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64), \chi_2)$$

の 2 つである. ここで, $2g\theta_{32} - g\theta_8$ は補題 8.23 の中で, $\widetilde{\Gamma}_0(64)$ の任意の元に関して保型性を持つことを見ていたので, $2g\theta_{32} - g\theta_8 \in S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64))$, すなわち

$$S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64)) = \langle 2g\theta_{32} - g\theta_8 \rangle$$

となる.

以上より, 注 8.20 と合わせて,

$$S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64)) = \langle 2g\theta_{32} - g\theta_8 \rangle, \quad S_{3/2}(\widetilde{\Gamma}_0(64), \chi_2) = \{0\}$$

を得る. 定理 8.24 より, $2g\theta_{32} - g\theta_8$ はすべての p で $T(p^2)$ の固有形式となるので, もし志村対応で ϕ に移るレベル 64 の保型形式が存在すれば, それは定数倍を除いて $2g\theta_{32} - g\theta_8$ のみである. [15] の Table3 で ϕ の $T(3), T(5)$ の固有値を確認すると, それぞれ $0, -2$ なので, もし

$$\mathrm{SH}(2g\theta_{32} - g\theta_8) = \phi$$

であれば, $2g\theta_{32} - g\theta_8$ の $T(3^2), T(5^2)$ の固有値もそれぞれ $0, -2$ である. しかし補題 8.22 で見たように, $T(3^2)$ と $T(5^2)$ の固有値はそれぞれ -4, 6 なので, $\mathrm{SH}(2g\theta_{32} - g\theta_8) \neq \phi$ となる. したがって, 志村対応のもとで ϕ に移るレベル 64 の保型形式は存在しない. □

少し話がそれるが, 補題 8.23 より, $2g\theta_{32} - g\theta_8$ と $\sum_{m=1}^{\infty} \chi_{-1}(m) m q^{m^2}$ の q^{m^2} の係数を比較すると面白い結果が得られる.

系 8.33. *k は整数とし, χ_{-1} をコンダクター 4 の指標とする.*

(1) *平方数 k^2 に対して,*

$$\begin{aligned}&\sharp\{(4m+1)^2 + 16n^2 + 8l^2 = k^2 \mid m+n+l \text{ は偶数 }\}\\ &\quad - \sharp\{(4m+1)^2 + 16n^2 + 8l^2 = k^2 \mid m+n+l \text{ は奇数 }\}\\ &= k\chi_{-1}(k)\end{aligned}$$

が成り立つ.

(2) k が非平方数のとき,

$$\begin{aligned}&\sharp\{(4m+1)^2+16n^2+8l^2=k \mid m+n+l \text{ は偶数 }\}\\&=\sharp\{(4m+1)^2+16n^2+8l^2=k \mid m+n+l \text{ は奇数 }\}\end{aligned}$$

が成り立つ.

これは式自体は非常にわかりやすいが, 初等的に証明するのはかなり大変かもしくはできないと思われる. 初等的に証明できるかは実際やっていないので不明だが, 3 つの平方数の和が平方数になる場合とそうでない場合を一般の m, n, l で表すのは骨の折れる作業である. 保型形式の理論を応用すれば上のような非自明な整数の関係式が得られるのはとても面白いことである.

さらに (8.29) からは次の結果が得られる.

系 8.34. $g\theta_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n$, $g\theta_8=\sum_{n=1}^{\infty}c_nq^n$ としたとき, 奇素数 p に対して以下が成り立つ.

(1) $a_{p^2}=c_{p^2}$.
(2) $a_{3p^2}=2\left(a_{p^2}+\left(\frac{-1}{p}\right)-\left(\frac{-3}{p}\right)\right)$.

証明. (1) 定理 7.19 より (8.30) で q の項を比較して,

$$\lambda_p=a_{p^2}+\left(\frac{-1}{p}\right)\quad(\because a_1=1)\tag{8.35}$$

を得る. また (8.26) で q の項を比較して,

$$\mu_p=c_{p^2}+\left(\frac{-1}{p}\right)\quad(\because c_1=1)$$

を得る. よって, $a_{p^2}=c_{p^2}$ が成り立つ.

(2) (8.30) で q^3 の項を比較して,

$$2\lambda_p=a_{3p^2}+2\left(\frac{-3}{p}\right)\quad(\because a_3=2)$$

を得る. よって, (8.35) を代入して, $a_{3p^2}=2\left(a_{p^2}+\left(\frac{-1}{p}\right)-\left(\frac{-3}{p}\right)\right)$ が成り立つ. □

Waldspurger の定理を述べる.

定理 8.36 (Waldspurger の定理 [9], [12]). ϕ をウエイト $k-1$, 指標 χ^2 の *new form* とする. また, ϕ は志村対応のもとで, ウエイト $k/2$, 指標 χ の適当な保型形式の像であると

する．ϕ のレベルは 16 を割り切ると仮定する．このとき平方因子を持たない整数から複素数体 $\mathbb{C}$ への関数 $A(t)$ が存在して以下の 2 条件を満たす．

(1) $A(t)^2 = L(\phi \otimes \chi^{-1}\chi_t, (k-1)/2)$.
(2) 任意の正の整数 N に対し，ある具体的に記述できる関数の有限集合 $\{c(n)\}$ が存在して，

$$\left\langle \sum A(n)c(n)q^n \right\rangle_{\{c(n)\}} = \{f \in S_{k/2}(\widetilde{\Gamma}_0(N), \chi) \mid \mathrm{SH}(f) = \phi\}$$

が成り立つ．

ただし，$\phi \otimes \chi$ は保型形式 ϕ にディリクレ指標 χ をツイストしたものであり，$L(\phi \otimes \chi, s)$ は保型形式 $\phi \otimes \chi$ に対応する L 関数である．

注 8.37. ここで述べたものは [9, Waldspurger, p.459, 460] の特別な場合である．本来ならヘッケ指標 η に対して定まる因子 $\epsilon(\eta, t)$ が定理 8.36 の (1) で現れるが，η が 2 次指標なら $\epsilon(\eta, 1/2) = 1$ であり，本論文では 2 次指標の場合しか扱わないので無視する．

定理 8.38. $g\theta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$, $g\theta_4 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$ とする．n を平方因子を持たない奇数とすると，

(1) $L(E_n, 1) = a_n^2 \beta n^{-1/2}/4$
(2) $L(E_{2n}, 1) = b_n^2 \beta (2n)^{-1/2}/2$

が成り立つ．ただし，$\beta = \int_1^{\infty} dx/\sqrt{x^3 - x} = 2.62205...$ である．

証明. Waldspurger の定理を使って，係数 a_n, b_n と L 関数の特殊値を結びつける．$c_2(n)$ を $(n \bmod 8)$ で定義される関数とし，偶数 n では 0 を取るものとする．つまり，$c_2(1)$, $c_2(3)$, $c_2(5)$, $c_2(7)$ を決定すれば，$c_2(n)$ はすべての自然数 n で定まることになる．[9, Waldspurger] では $c(n)$ について 11 通りの取り方が述べられているが，ここではその内の 1 つとして，$c(n) = n^{1/4} c_2(n)$ ととる．

また [7, p.217] より，ϕ に χ_n をツイストした保型形式 $\phi \otimes \chi_n$ に対応する L 関数は楕円曲線 E_n の L 関数になること，すなわち

$$L(\phi \otimes \chi_n, s) = L(E_n, s)$$

が成り立つことに注意しておく．

(1) $k=3, N=32, \chi=\chi_{\mathrm{triv}}$ で定理 8.21 と定理 8.36 (2) を使うと,

$$\left\langle \sum A(n)c(n)q^n \right\rangle_{\{c(n)\}} = \langle g\theta_2, g\theta_8 \rangle$$

となる $c(n)$ が存在する (必要なら $\langle \sum A(n)c(n)q^n \rangle_{\{c(n)\}}$ の中で線形結合によって $\sum A(n)c(n)q^n = g\theta_2, \sum A(n)c(n)q^n = g\theta_8$ となるようにする). $g\theta_2, g\theta_8$ は $n \equiv 5, 7 \pmod 8$ のとき q^n の係数は 0 なので,

$$A(n) = 0 \quad (n \equiv 5, 7 \bmod 8)$$

でなければならない. $c_2(n)$ を $c_2(1) = \beta_1, c_2(3) = \beta_3$ となるように選ぶ ($c_2(5)$, $c_2(7)$ については $A(n) = 0$ $(n \equiv 5, 7 \bmod 8)$ より何でもいい). そうすると,

$$a_n = \begin{cases} \beta_1 A(n) n^{1/4} & (n \equiv 1 \bmod 8) \\ \beta_3 A(n) n^{1/4} & (n \equiv 3 \bmod 8) \end{cases}$$

となる. 定理 8.36 (1) より,

$$A(n)^2 = L(\phi \otimes \chi_n, s) = L(E_n, s)$$

なので,

$$a_n^2 = \begin{cases} \beta_1^2 L(E_n, 1) n^{1/2} & (n \equiv 1 \bmod 8) \\ {\beta_3}^2 L(E_n, 1) n^{1/2} & (n \equiv 3 \bmod 8) \\ 0 = A(n)^2 = L(E_n, 1) & (n \equiv 5, 7 \bmod 8) \end{cases}$$

が成り立つ. [2, Birch and Swinnerton-Dyer] では,

$$\frac{L(E_n, 1) n^{1/2}}{\beta}$$

が有理数となることが述べられており, [2] の Table1 で具体的な n について値が与えられているのでそれを用いると,

$$\frac{L(E_1, 1)}{\beta} = \frac{1}{4}, \quad \frac{L(E_1, 1) 3^{1/2}}{\beta} = 1$$

となることが分かる. $a_1 = 1, a_3 = 2$ と比較して,

$$\beta_1^2 = \beta_3^2 = \frac{4}{\beta}$$

が得られる. したがって, $L(E_n, 1) = a_n^2 \beta n^{-1/2}/4$ となる (平方因子を持たないすべての奇数 n で成立する).

(2) $k=3, N=32, \chi=\chi_2$ で定理 8.21 と定理 8.36 (2) を使うと,

$$\left\langle \sum A(n)c(n)q^n \right\rangle_{\{c(n)\}} = \langle g\theta_4, g\theta_{16} \rangle$$

となる $c(n)$ が存在する (必要なら $\langle \sum A(n)c(n)q^n \rangle_{\{c(n)\}}$ の中で線形結合によって $\sum A(n)c(n)q^n = g\theta_4, \sum A(n)c(n)q^n = g\theta_{16}$ となるようにする). $g\theta_4, g\theta_{16}$ は $n \equiv 3, 7 \pmod 8$ のとき q^n の係数は 0 なので,

$$A(n) = 0 \quad (n \equiv 3, 7 \bmod 8)$$

でなければならない. $c_2(n)$ を $c_2(1) = \gamma_1, c_2(5) = \gamma_5$ となるように選ぶ ($c_2(3)$, $c_2(7)$ については $A(n) = 0$ ($n \equiv 3, 7 \bmod 8$) より何でもいい). そうすると,

$$b_n = \begin{cases} \gamma_1 A(n) n^{1/4} & (n \equiv 1 \mod 8) \\ \gamma_5 A(n) n^{1/4} & (n \equiv 5 \mod 8) \end{cases}$$

となる. χ_2 は 2 次指標なので $\chi_2^{-1} = \chi_2$ に注意すると定理 8.36 (1) より,

$$A(n)^2 = L(\phi \otimes \chi_2^{-1}\chi_n, s) = L(\phi \otimes \chi_{2n}, s) = L(E_{2n}, s)$$

なので,

$$b_n^2 = \begin{cases} \gamma_1^2 L(E_{2n}, 1) n^{1/2} & (n \equiv 1 \mod 8) \\ \gamma_5^2 L(E_{2n}, 1) n^{1/2} & (n \equiv 5 \mod 8) \\ 0 = A(n)^2 = L(E_{2n}, 1) & (n \equiv 3, 7 \mod 8) \end{cases}$$

が成り立つ. [2] の Table1 より,

$$\frac{L(E_2, 1) 2^{1/2}}{\beta} = \frac{1}{2}, \quad \frac{L(E_{10}, 1) 10^{1/2}}{\beta} = 2$$

を用いると, $b_1 = 1, b_5 = 2$ と比較して,

$$\gamma_1^2 = \gamma_5^2 = \frac{2^{3/2}}{\beta}$$

が得られる. したがって, $L(E_{2n}, 1) = b_n^2 \beta 2n^{-1/2}/2$ となる (平方因子を持たないすべての偶数 $2n$ で成立する). $\square$

注 8.39. [2] の Table1 の $L(E_D, s)$ と本論文の $L(E_n, s)$ では $D = n^2$ で対応することに注意する.

今までに議論したことをまとめて Main Theorem を完結させよう．もう一度ここで主張を述べておく．

定理 8.40 (Main Theorem). $q = e^{2\pi iz}$ とおく．変数 q に関する形式的冪級数 g を

$$g(z) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{8n})(1-q^{16n})$$

とする．また正の整数 t に対して形式的冪級数 θ_t を

$$\theta_t(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} q^{tn^2}$$

とおく．$g\theta_2, g\theta_4$ を

$$g(z)\theta_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n, \quad g(z)\theta_4(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$$

としたとき以下が成り立つ．

(a) $a_n \neq 0$ なら n は合同数ではない．

(b) $b_n \neq 0$ なら $2n$ は合同数ではない．

証明. 定理 3.15, 定理 4.17, 定理 8.38 を組み合わせることによって従う． □

参考文献

[1] J. B. Tunnell, A classical Diophantine problem and modular forms of weight 3/2, Invent. Math., 72, 1983, 323–334.

[2] B. J. Birch and H. P. F. Swinnerton-Dyer , Notes on elliptic curves. II, J. Reine Angew. Math., 218, 1965, 79–108.

[3] J. Coates and A. Wiles, On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer, Invent. Math., 39, 1977, 3, 223–251.

[4] H. Cohen, and J. Oesterlé, Dimensions des espaces de formes modulaires, Modular functions of one variable, VI , Lecture Notes in Math., Vol. 627, Springer, Berlin, 1977, 69–78.

[5] G. H. Hardy, and E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers, Sixth, Oxford University Press, Oxford, 2008.

[6] D. Husemöller, Elliptic curves, Graduate Texts in Mathematics, 111, Second, Springer-Verlag, New York, 2004.

[7] N. Koblitz, Introduction to elliptic curves and modular forms, Graduate Texts in Mathematics, 97, Second, Springer-Verlag, New York, 1993.

[8] V. A. Kolyvagin, Finiteness of $E(\mathbf{Q})$ and $\mathrm{SH}(E, \mathbf{Q})$ for a subclass of Weil curves, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 52, 1988, 3, 522–540, 670–671.

[9] C. Mœglin and J.-L. Waldspurger, Sur les conjectures de Gross et Prasad. II, Astérisque No. 347 (2012), Société Mathématique de France, Paris, 2012.

[10] C. J. Moreno, The higher reciprocity laws: an example, Journal of Number Theory, 12, 1980, 1, 57–70.

[11] S. Niwa, Modular forms of half integral weight and the integral of certain theta-functions, Nagoya Math. J., 56, 1975, 147–161.

[12] S. Purkait, Explicit application of Waldspurger's theorem, LMS J. Comput. Math., 16, 2013, 216–245.

[13] J.-P. Serre and H. M. Stark, Modular forms of weight 1/2, Modular functions of one variable, VI , Lecture Notes in Math., Vol. 627, Springer, Berlin, 1977, 27–67.

[14] G. Shimura, On modular forms of half integral weight, Ann. of Math. (2), 97, 1973, 440–481.

[15] H. P. F. Swinnerton-Dyer, N. M. Stephens, James Davenport, J. Vélu, F. B. Coghlan, A. O. L. Atkin and D. J. Tingley, Numerical tables on elliptic curves, Modular functions of one variable IV, Lecture Notes in Math., Vol. 476, Springer, Berlin, 1975, 74–144.

[16] 雪江明彦, 整数論 3 解析的整数論への誘い, 日本評論社, 2014.