# テータ関数を用いた志村対応の構成

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻
学生番号 0530-27-8976
疋田 眞子

平成 29 年 2 月 14 日

# 目 次

# 1　はじめに

本論文は丹羽による論文 [4] の解説論文である. まず初めに, [4] の概要についての解説を行う. ただし $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ でそれぞれ自然数の集合, 整数の集合, 有理数の集合, 実数の集合, 複素数の集合を表すとする. 他の用語の定義等は 2 章以降で述べる.

[4] は半整数ウェイトの保型形式と整数ウェイトの保型形式の間の対応について述べた論文である. この論文が書かれた背景として, 志村による論文 [5] がある. [5] の主定理の正確な主張は 5 章の定理 5.1 で述べることとし, ここでは概略を述べる.

$M_k(N,\chi)$ をウェイト $k$, レベルが $N$ である $\chi$ に対する保型形式の集合とする. また $S_k(N,\chi) \subset M_k(N,\chi)$ をカスプ形式の集合とする. また, $\mathbb{H}$ を複素上半平面とする.

**定理 1.1.** (志村対応) $\kappa \geqq 3$ が奇数のとき, 写像 $I_\kappa$ とある正の整数 $N'$ が存在し $I_\kappa(S_{\kappa/2}(4N,\chi)) \subset M_{\kappa-1}(N',\chi^2)$ となる. 特に $\kappa \geqq 5$ のとき, $I_\kappa(S_{\kappa/2}(4N,\chi)) \subset S_{\kappa-1}(N',\chi^2)$ となる.

本論文ではこの対応を志村対応と呼ぶ. 志村はこの定理を Weil の逆定理を用いて証明した. さらに志村は $N'$ が $2N$ ととれることを予想したが, 完全な解決とはならなかった.

そこで丹羽は [4] でテータ関数を構成し, 半整数ウェイトの保型形式との Petersson 内積を考えることにより $\kappa \geqq 7$ のときの志村対応を直接的に構成した. 次の定理は [4] の主定理の概要である. 正確な主張は 5 章の定理 5.8 で述べる.

**定理 1.2.** $\kappa \geqq 7$ を奇数, $F(z) \in S_{\kappa/2}\left(4N, \overline{\chi}\left(\dfrac{N}{*}\right)\right)$ とする. $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ により, $w = \xi + i\eta$ としたとき $\sigma_w = \begin{pmatrix} \eta^{1/2} & \xi\eta^{-1/2} \\ 0 & \eta^{-1/2} \end{pmatrix}$ とする. $w'$ を $\xi', \eta' \in \mathbb{R}$ により $w' = \xi' + i\eta' = -1/2Nw$ とする.

$$G(z) = (4N)^{-\kappa/4}(-iz)^{-\kappa/2}F(-1/4Nz) \in S_{\kappa/2}(4N,\chi),$$
$$\Phi(w) = (2N)^{\lambda}(-2Nw)^{-2\lambda}(4\eta')^{-\lambda}\int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathbb{H}} v^{\kappa/2}\overline{\theta}(z,\sigma_{4w'})F(z)\frac{dudv}{v^2}$$

と定義すると, ある定数 $C$ で $\Phi(w) = CI_\kappa(G(z)) \in S_{\kappa-1}(2N,\chi^2)$ となる.

また, 丹羽はこの定理の系として $\kappa \geqq 7$ のときには $N'$ は常に $2N$ ととれることを示した. つまり, 丹羽の定理により $\kappa \geqq 7$ のとき次の図式

$$\begin{array}{ccc} S_{\kappa/2}(4N,\chi) & \xrightarrow{\phi} & S_{\kappa-1}(2N,\chi^2) \\ \iota\big\downarrow & & \big\uparrow\tau \\ S_{\kappa/2}\left(4N,\overline{\chi}\left(\dfrac{N}{*}\right)\right) & \xrightarrow{\psi} & S_{\kappa-1}(2N,\overline{\chi}^2) \end{array}$$

が可換になることがわかる.

# 謝辞

本論文を書くにあたり, 多忙な中ご指導いただいた雪江明彦先生に深く感謝致します.

# 2 準備

この章では, 本論文で用いる記号の定義等の説明を行う.

$\mathbb{R}^+$ を正の実数全体の集合, $\mathbb{C}$ の複素上半平面 $\mathbb{H}$ を

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

とする. また, $z \in \mathbb{C}$ に対する平方根 $\sqrt{z}$ はその偏角が区間 $(-\pi/2, \pi/2]$ に属する分枝を常に表すとし, 任意の整数 $k$ に対し $z^{k/2}$ は $(\sqrt{z})^k$ を意味するものとする. さらに $z$ の偏角の主値を $\mathrm{Arg}(z)$ と書く.

$M_2(\mathbb{Z})$ は成分が全て整数である $2 \times 2$ 行列全体の集合を表すとする.

$m, n \in \mathbb{Z}$ に対して $(m, n)$ は $m, n$ の最大公約数を表すものとする.

次に平方剰余記号 $(\frac{c}{d})$ を定める. $d$ が奇素数のときには,

$$\left(\frac{c}{d}\right) = \begin{cases} 0 & (d|c \text{ のとき}) \\ 1 & (c \text{ が } d \text{ を法とする } 0 \text{ 以外の平方剰余}) \\ -1 & (\text{その他}) \end{cases}$$

である. これを $d$ が奇数のときに拡張して, (相異なるとは限らない) 素数 $p_j$ により $d = \prod_j p_j$ とすると

$$\left(\frac{c}{d}\right) = \begin{cases} 0 & (c, d) > 1 \\ \displaystyle\prod_j \left(\frac{c}{p_j}\right) & d = \displaystyle\prod_j p_j \end{cases}$$

と定義する. また, $(\frac{0}{\pm 1}) = 1$ と定める. $d$ が負のとき, $c > 0$ ならば $(\frac{c}{d}) = (\frac{c}{|d|})$ と定め, $c < 0$ ならば $(\frac{c}{d}) = -(\frac{c}{|d|})$ と定める. これをヤコビ記号という.

さらに奇数 $d$ に対して $\epsilon_d = \sqrt{(\frac{-1}{d})}$ すなわち

$$\epsilon_d = \begin{cases} 1 & (d \equiv 1 \mod 4 \text{ のとき}) \\ i & (d \equiv 3 \mod 4 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{2.1}$$

と定める.

$i, j$ をある集合 $A$ の元とするとき, クロネッカーのデルタ $\delta_{i,j}$ を

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$$

と定める.

$n$ を正の整数とする. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元を $x \in \mathbb{Z}$ に対し $\overline{x}$ と表すことにする.

$m > 1$ を整数, $\mathbb{C}^1 = \{z \in \mathbb{C} || z| = 1\}$ とする. 指標 $\chi' : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^1$ に対し, $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ を

$$\chi(n) = \begin{cases} \chi'(n + m\mathbb{Z}) & (n, m) = 1 \\ 0 & (m, n) > 1 \end{cases}$$

と定義する．この $\chi$ を $m$ を法とする Dirichlet 指標という．

$\psi$ を指標 $\psi' : (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^1$ から定まる $l > 1$ を法とする Dirichlet 指標で $l|m$ とする．$\chi$ を

$$\chi(n) = \begin{cases} \psi(n) & (n, m) = 1 \\ 0 & (n, m) > 1 \end{cases}$$

により定めると, $\chi$ は $\psi'$ と全射準同型 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times$ の合成より定まる $m$ を法とする Dirichlet 指標である．このとき $\chi$ は $\psi$ により引き起こされた Dirichlet 指標という．

$\chi$ が $m$ を法とする Dirichlet 指標で, $m$ の真の約数 $l > 1$ を法とする Dirichlet 指標からは引き起こされないとき, $\chi$ を原始的な Dirichlet 指標という．

Dirichlet 指標 $\chi$ を引き起こす原始的な Dirichlet 指標はただ一つある．([12, p.52] 参照．) それが $d$ を法とする指標であるとき, $d$ を $\chi$ のコンダクターという．

任意の Dirichlet 指標 $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^1$ に対して, Dirichlet の L 関数を

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} \tag{2.2}$$

と定義する．

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を正の整数, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ とする．$\mathbb{R}^n$ 上の無限回微分可能な関数 $f$ に対する作用を

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x)$$

と定める．任意の多重指数 $\alpha$, $k \in \mathbb{N}$ に対して $f$ が

$$\lim_{|x| \to \infty} (1 + |x|^2)^{k/2} |D^\alpha f(x)| = 0$$

を満たすとき, $f$ は急減少関数であるという．$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の急減少関数全体の集合とする．

$d^\times x$ は $\mathbb{R}^\times$ 上の測度 $dx/x$ を表すとする．

# 3 保型形式

この章では $SL_2(\mathbb{Z})$ とその合同部分群上での保型形式を定義する．

**定義 3.1.** $N$ を正の整数とし, $\Gamma$, $\Gamma(N)$, $\Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$ を次のように定める．

$$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \det \gamma = 1 \right\},$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \middle| a \equiv d \equiv 1 \mod N \right\}, \\
\Gamma_0(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \middle| c \equiv 0 \mod N \right\}, \\
\Gamma_1(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \middle| a \equiv 1 \mod N \right\}.
\end{aligned}
$$

このとき $\Gamma(N)$ は $\Gamma$ の正規部分群である. 特に $\Gamma(1) = \Gamma$ である. $\Gamma(N)$ は**レベル $N$ の主合同部分群**という. $\Gamma$ の部分群は, それが $\Gamma(N)$ を含むとき**レベル $N$ の合同部分群**という. また $\Gamma$ の部分群は, それがレベル $N$ の合同部分群となるような $N$ が存在するときに**合同部分群**という. したがって, $\Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$ は $\Gamma$ の合同部分群である.

また $SL_2(\mathbb{R})$ の部分群 $G$ を考えるときに, $-I \in G$ のときは $\overline{G} = G/\pm I$ を表し, そうでないときは $\overline{G} = G$ を表すものとする.

$\widetilde{\mathbb{C}}$ をリーマン球面とする. すなわち $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ である. $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}), z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$
gz = \frac{az+b}{cz+d}, \quad g\infty = \frac{a}{c} = \lim_{z \to \infty} gz
$$

と定義する. ゆえに $g(-\frac{d}{c}) = \infty$ であり, $c = 0$ のときは $g\infty = \infty$ である. $z \mapsto gz$ は $\tilde{\mathbb{C}}$ の**一次分数変換**という. また, 任意の $g \in SL_2(\mathbb{R}), z \in \mathbb{H}$ に対して $gz \in \mathbb{H}$ である.

**定義 3.2.** $G$ が $\Gamma$ の部分群であって, 2 点 $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ に対して $G$ の元 $g$ が存在して $z_2 = gz_1$ となるとき, $z_1, z_2$ は $G$ **同値**であるという.

**定義 3.3.** $F$ を $\mathbb{H}$ 内の閉領域とする. $\mathbb{H}$ のどの点 $z$ も $F$ のある適当な点に $G$ 同値であるが, $F$ の相異なるどの 2 つの内点も $G$ 同値になることがないとき, $F$ を $\Gamma$ の部分群 $G$ に対する**基本領域**という.

**定義 3.4.** $\{\infty\} \cup \mathbb{Q}$ の点を**カスプ** (尖点) という. $\Gamma$ はカスプに推移的に作用する. $\Gamma'$ が $\Gamma$ の部分群であれば $\Gamma'$ もカスプを置換するが一般的には推移的ではない. カスプの各 $\Gamma'$ 同値類も $\Gamma'$ のカスプという.

以上の定義を用いて, $\Gamma$ 上の保型形式を定義する.

**定義 3.5.** $\mathbb{H}$ 上の周期 1 の有理型関数 $f(z)$ が,

$$
f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \exp(2\pi i n z) \tag{3.6}
$$

という形のフーリエ展開をもち, $n \ll 0$ のとき $a_n = 0$ であるとき $f(z)$ は $\infty$ で**有理型**であるという. $n < 0$ に対して $a_n = 0$ であるとき, $f(z)$ は $\infty$ で**正則である**という. $f(z)$ は $\infty$ で正則で $a_0 = 0$ であるとき $f(z)$ は $\infty$ で**零点をもつ**という.

**定義 3.7.** $f(z)$ を $\mathbb{H}$ 上の有理型関数とし, $k$ を整数とする. $f(z)$ が

$$\text{すべての}\ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})\ \text{に対し}\ f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z) \tag{3.8}$$

を満たしているとする. 特に $\gamma = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\gamma = S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して

$$f(z+1) = f(z), \tag{3.9}$$

$$f(-1/z) = (-z)^k f(z) \tag{3.10}$$

が成り立つ. さらに $f(z)$ は無限遠点で有理型であることも仮定する. このとき $f(z)$ を $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ に対する**ウェイト $k$ の保型関数**とよぶ.

さらに $f(z)$ が $\mathbb{H}$ 上の正則関数であり, かつ無限遠点でも正則である (すなわち, すべての $n < 0$ に対して $a_n = 0$ となる) ときには, $f(z)$ を $\Gamma$ に対する**ウェイト $k$ の保型形式**とよぶ. この関数の集合を $M_k(\Gamma)$ で表す. もしさらに $a_0 = 0$ である, すなわち保型形式が無限遠点で零点を持つならば, $f(z)$ を $\Gamma$ に対する**ウェイト $k$ のカスプ形式**とよぶ. この関数の集合を $S_k(\Gamma)$ で表す.

また, 次のことに注意しておく. ([2, p.109, Remark] 参照.)

**注 3.11.** (3.8) に $\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を代入することにより, $k$ が奇数のとき $\Gamma$ のウェイト $k$ の 0 でない保型形式は存在しないことがわかる. したがって $k$ は偶数であると仮定する.

**注 3.12.** (3.8) が $\gamma_1, \gamma_2$ に対して成り立つとき, $\gamma_1\gamma_2$ についても成り立つ. これは (3.9), (3.10) から (3.8) が従うことを意味している.

**注 3.13.** ある固定されたウェイトの保型関数, 保型形式, カスプ形式の集合はそれぞれ複素ベクトル空間になる. さらにまたウェイト $k_1$ の保型関数（保型形式）とウェイト $k_2$ の保型関数（保型形式）の積はウェイト $k_1 + k_2$ の保型関数（保型形式）であり, ウェイト $k_1$ の保型関数を 0 でないウェイト $k_2$ の保型関数で割った商はウェイト $k_1 - k_2$ の保型関数である. 特にウェイト 0 の保型関数の全体の集合は体である.

次に合同部分群に対する保型形式を定義する.

$GL_2^+(\mathbb{Q})$ を正の行列式をもつ行列からなる $GL_2(\mathbb{Q})$ の部分群を表すとする. このとき,

$$f(z)|[\gamma]_k = (\det\gamma)^{k/2}(cz+d)^{-k} f(\gamma z), \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{Q}) \tag{3.14}$$

と定める.

**定義 3.15.** $q_N = \exp(2\pi iz/N)$ と表す．$f(z)$ を $\mathbb{H}$ 上の有理型関数とし, $\Gamma' \subset \Gamma$ をレベル $N$ の合同部分群とする．また $k \in \mathbb{Z}$ とする．$f(z)$ が $\Gamma'$ に対するウェイト $k$ の**保型関数**であるとは,

$$\text{すべての}\gamma \in \Gamma'\text{に対して } f(z)|[\gamma]_k = f$$

となり, かつ任意の $\gamma_0 \in \Gamma$ に対し,

$$f(z)|[\gamma_0]_k = \sum a_n q_N^n \quad \text{（ただし } n \ll 0 \text{ に対して } a_n = 0\text{）} \tag{3.16}$$

という形の展開をもつときをいう．またこのような保型関数 $f(z)$ が $\mathbb{H}$ 上で正則であり, かつ (3.16) がすべての $\gamma_0 \in \Gamma$, $n < 0$ に対し $a_n = 0$ であるとき, $f(z)$ を $\Gamma'$ に対するウェイト $k$ の**保型形式**という．さらに, 保型形式がすべての $\gamma_0 \in \Gamma$ に対し $a_n = 0$ を満たすとき, この保型形式を**カスプ形式**という．また, $M_k(\Gamma'), S_k(\Gamma')$ はそれぞれ $\Gamma'$ に対するウェイト $k$ の保型形式の集合とカスプ形式の集合を表すとする．

$N$ を法とする Dirichlet 指標 $\chi$ に対し, 任意の $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ に対して $f|[\gamma]_k = \chi(d)f$ となる $f(z)$ からなる $M_k(\Gamma_1(N))$ の部分空間を $M_k(N, \chi)$ と表す．特に $\chi$ が自明な指標 $\chi_{\mathrm{triv}}$ であるときには, $M_k(N, \chi_{\mathrm{triv}}) = M_k(\Gamma_0(N))$ である．このとき, 次が成り立つ．([2, pp.145-146, Problem 15(a)], [2, pp.137-138, Proposition 28] 参照．)

**命題 3.17.** $f \in M_k(N, \chi)$, $\alpha_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$ とすると $f|[\alpha_N]_k \in M_k(N, \overline{\chi})$ が成り立つ．また, $f \in S_k(N, \chi)$ のとき $f|[\alpha_N]_k \in S_k(N, \overline{\chi})$ が成り立つ．

**命題 3.18.** $M_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus M_k(N, \chi)$ である．ただしここで, 直和は $N$ を法とするすべての Dirichlet 指標をわたる．

ここで, テータ関数を

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi in^2 z) \tag{3.19}$$

と定める．　このとき, 次の命題が成り立つ．証明は [2, pp.138-139, Proposition 30] を参照.

**命題 3.20.** $\theta^2 \in M_1(\Gamma_1(4)) = M_1(4, \chi)$ である．ただし, $\chi$ は 4 を法とする指標で $\chi(d) = (-1)^{(d-1)/2}$ である．

次に, テータ関数の変換公式について述べる．$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ と $z \in \mathbb{H}$ によって決まる保型因子 $j(\gamma, z)$ を

$$j(\gamma, z) = \left(\frac{c}{d}\right) \epsilon_d^{-1} \sqrt{cz + d} \tag{3.21}$$

と定める．ただし, $\epsilon_d^{-1}$ は (2.1) で定義したものとする．
次の定理が成り立つ．証明は [2, pp.148-152] を参照.

**定理 3.22.** 任意の $\gamma \in \Gamma_0(4)$ と $z \in \mathbb{H}$ に対して,

$$\theta(\gamma z) = j(\gamma, z)\theta(z)$$

である.

次に複素上半平面内のある領域上の積分を考え, $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ に対し変数変換 $z \mapsto \alpha z$ をするとする. このとき $dxdy/y^2$ は不変測度であり, 次の命題が成り立つ. 証明は [2, pp.168-169, Proposition 44(a)] を参照.

**命題 3.23.** $\Gamma' \subset \Gamma$ を合同部分群とし, $F' \subset \mathbb{H}$ を $\Gamma'$ の任意の基本領域とする.

$$\mu(\Gamma') = \int_{F'} \frac{dxdy}{y^2} \tag{3.24}$$

とする. このとき積分 (3.24) は収束して $F'$ の選び方によらず決まる.

以上のことに注意して Petersson 内積を定義する.

**定義 3.25.** $\Gamma' \subset \Gamma$ を合同部分群とし, $F \subset \mathbb{H}$ を $\Gamma'$ の任意の基本領域, $f, g \in M_k(\Gamma')$ であり $f, g$ のうち少なくとも 1 つはカスプ形式であるとする. このとき, $\langle f, g\rangle$ を次のように定める.

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{[\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma}']} \int_{F'} f(z)\overline{g}(z) y^k \frac{dxdy}{y^2}. \tag{3.26}$$

次の命題の証明は [2, p.170, Proposition 45] を参照.

**命題 3.27.** (3.26) の積分は絶対収束し $F'$ の選び方によらない. $\Gamma''$ が $f, g \in M_k(\Gamma'')$ となるもう 1 つの合同部分群であるとする. このとき $\langle f, g\rangle$ の定義は $f, g$ を $M_k(\Gamma')$ の元と考えるか $M_k(\Gamma'')$ の元と考えるかには無関係である.

整数ウェイトの保型形式についてのヘッケ作用素を定義する.

**定義 3.28.** $S^+$ は $\mathbb{Z}$ の $\{0\}$ でない部分加法群, $S^\times$ は $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ の部分群, $n$ を正の整数とする. このとき, $\Delta^n(N, S^\times, S^+)$ を

$$\Delta^n(N, S^\times, S^+) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \middle| N|c, a \in S^\times, b \in S^+, \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = n \right\}$$

と定義する.

ここで, $\Gamma' = \Delta^1(N, S^\times, S^+)$ は $\Gamma$ の合同部分群であることに注意する.

**定義 3.29.** $\Gamma'$ は $\Gamma$ の合同部分群, $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$,$\Gamma'' = \Gamma' \cap \alpha^{-1}\Gamma'\alpha$, $d = [\Gamma' : \Gamma'']$, $\Gamma' = \bigcup_{j=1}^d \Gamma''\gamma_j'$ とする. さらに, $f(z)$ を $\gamma \in \Gamma'$, $[\gamma]_k$ の下で不変な $\mathbb{H}$ 上の関数とする. このとき,

$$f(z)|[\Gamma'\alpha\Gamma']_k = \sum_{j=1}^d f(z)|[\alpha\gamma_j']_k$$

と定義する.

また, 次の命題が成り立つ. (証明は [2, pp.166-167, Proposition 42] を参照.)

**命題 3.30.** 定義 3.29 において, $f(z)|[\Gamma'\alpha\Gamma']_k$ は同じ剰余類の任意の別の代表元 $\alpha'$ に取り替えても変わらない. また, $\Gamma'$ の $\Gamma''$ を法とする代表元 $\gamma'_j$ の選び方にもよらない. $f \in M_k(\Gamma')$ のとき, $f(z)|[\Gamma'\alpha\Gamma']_k \in M_k(\Gamma')$ である.

これらのことを踏まえて, ヘッケ作用素 $T_n$ を定義する.

**定義 3.31.** $\Gamma' = \Delta^1(N, S^\times, S^+)$, $n$ を正の整数とする. $f \in M_k(\Gamma')$ とするとき,

$$T_n f = n^{(k-2)/2} \sum f(z)|[\Gamma'\alpha\Gamma']_k$$

と定義する. ただし, 和は $\Delta^n(N, S^\times, S^+)$ に含まれる $\Gamma'$ に関する両側剰余類全てをわたるとする.

また, 命題 3.30 より $T_n f \in M_k(\Gamma')$ となる.
ヘッケ作用素について次の命題が成り立つ. (証明は [2, pp.156-157, Proposition 32] を参照.)

**命題 3.32.** (i) $(m, n) = 1$ ならば, $T_{mn} = T_m T_n$ である. 特に, $T_m$ と $T_n$ は可換である.
(ii) $p$ が $p|N$ となる素数ならば $T_{p^l} = T_p^l$ である.

最後に Mellin 変換とフーリエ変換について述べる.

**定義 3.33.** (i) 正の実軸上の関数 $f(t)$ が与えられたとき, その Mellin 変換とは,

$$g(s) = \int_0^\infty f(t) t^s d^\times t \tag{3.34}$$

によりこの積分が収束するような $s$ の値に対して定義される関数 $g(s)$ のことをいう. また, $a < \mathrm{Re}(s) < b$ で積分 (3.34) が絶対収束し, 関数 $f(t)$ が有界変動ならば, 反転公式

$$\frac{1}{2}\{f(t+0) + f(t-0)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(s) t^{-s} ds,\ (a < c < b) \tag{3.35}$$

が成り立つ. ([11, p.307] 参照. )

(ii) 任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対してそのフーリエ変換 $\widehat{f}$ を

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixy} f(x) dx$$

により定義する. さらに, $f$ のフーリエ逆変換を $\check{f}$ と表すことにすると $\check{f}$ は

$$\check{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ixy} f(x) dx$$

と与えられる.

また複素数上の関数

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^s d^\times t$$

を**ガンマ関数**という．すなわち $\Gamma(s)$ は $f(t) = e^{-t}$ の Mellin 変換である．任意の定数 $c > 0$ に対して $e^{-ct}$ の Mellin 変換は $c^{-s}\Gamma(s)$ である．ガンマ関数の性質について少し述べておく．$\Gamma(s)$ は関係式

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \tag{3.36}$$

を満たし，これによって $\Gamma(s)$ は全複素 $s$ 平面上の有理型関数に解析接続される．$s = 0, -1, -2, -3, \dots$ において 1 位の極をもつことを除き至る所で正則であり，零点をもたない．また，関数等式

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}, \tag{3.37}$$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{1-s}\Gamma(s) \tag{3.38}$$

が成り立つ．これを用いると $1/\Gamma(s)$ は $s$ に関する整関数であることがわかる．

フーリエ変換についての次の公式は有用である．(証明は [2, p.72, Proposition 6] を参照.)

**命題 3.39.** (Poisson 和公式) 任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)$$

が成り立つ．

# 4 半整数ウェイトの保型形式

この章では，半整数ウェイトの保型形式に関して復習する．

**定義 4.1.** $T = \{\pm1, \pm i\}$ とする．$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{Q})$, $\phi(z)$ は $\mathbb{H}$ 上の正則関数で，ある $t \in T^2 = \{\pm1\}$ により，

$$\phi(z)^2 = t\frac{cz+d}{\sqrt{\det\alpha}} \tag{4.2}$$

であるものとする．このとき $G$ を上の条件を満たすすべての順序対 $(\alpha, \phi(z))$ のなす集合と定める

(4.2) からわかるように，各 $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ と固定された各 $t$ に対して，2 つの元 $(\alpha, \pm\phi(z)) \in G$ が存在する．$G$ の 2 つの元の積を

$$(\alpha, \phi(z))(\beta, \psi(z)) = (\alpha\beta, \phi(\beta z)\psi(z)) \tag{4.3}$$

と定義する．次の命題の証明は [2, p.179, Proposition 1] を参照.

**命題 4.4.** $G$ は演算 (4.3) の下で群である．

各順序対の第 1 成分への射影 $(\alpha, \phi(z)) \mapsto \alpha$ をとることで, 準同型

$$P : G \to GL_2^+(\mathbb{Q})$$

が得られる．$G^1 = P^{-1}(\Gamma)$ を $\alpha \in \Gamma$ となるすべての順序対 $(\alpha, \phi(z)) \in G$ からなる集合であるとする．$G^1$ は明らかに $G$ の部分群である．

**定義 4.5.** $\xi = (\alpha, \phi(z)) \in G$ と任意の整数 $k$ に対し, $\mathbb{H}$ 上の関数 $f$ への作用素 $[\xi]_{k/2}$ を次のように定める．

$$f(z)|[\xi]_{k/2} = f(\alpha z)\phi(z)^{-k}.$$

$G$ の定義から

$$(f(z)|[\xi_1]_{k/2})|[\xi_2]_{k/2} = f(z)|[\xi_1\xi_2]_{k/2}$$

が成り立つ．

$\Gamma'$ を $\Gamma_0(4)$ の部分群であるとする．このとき $\gamma \in \Gamma'$ に対して $j(\gamma, z)$ は (3.21) のものとする．いま,

$$\widetilde{\Gamma}' = \{(\gamma, j(\gamma, z)) | \gamma \in \Gamma'\}$$

と定める．$\widetilde{\Gamma}'$ は明らかに $G$ の部分群で, 射影 $P$ によって $\Gamma'$ と同型になる．$\Gamma_0(4)$ から $G$ への写像 $L$ を

$$L(\gamma) = (\gamma, j(\gamma, z))$$

で定義する．すると $P$ と $L$ は $\widetilde{\Gamma}_0(4)$ と $\Gamma_0(4)$ の間の同型を与え, 互いに逆写像となる．この $L$ を射影 $P$ の**リフト**あるいは**切断**と呼ぶ.

$f(z)$ は $\mathbb{H}$ 上の有理型関数で, $\gamma \in \Gamma'$ に対する $[\tilde{\gamma}]_{k/2}$ の作用で不変であると仮定する．$s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に対し, $\alpha \in \Gamma$ を $s = \alpha\infty$ となるように定める．このとき $\alpha$ に射影される $G$ の元 $\xi = (\alpha, \phi(z))$ を 1 つとる．$g = f|[\xi]_{k/2}$ とおくと, 任意の元 $\pm\xi^{-1}\tilde{\gamma}\xi \in \pm\xi^{-1}\widetilde{\Gamma}'\xi$ に対して,

$$g|[\pm\xi^{-1}\tilde{\gamma}\xi]_{k/2} = f|[\tilde{\gamma}\xi]_{k/2} = f|[\xi]_{k/2} = g$$

となる．$\widetilde{\Gamma}'_s = \{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}' | \gamma s = s\}$ と定めると, ある $t \in T$ と正の整数 $h$ により

$$\pm\xi^{-1}\widetilde{\Gamma}'_s\xi = \left\{ \pm \left( \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \right)^j \;\middle|\; j \in \mathbb{Z} \right\}$$

であることに注意する．つまり

$$g(z) = g(z)\left|\left[\left(\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t\right)\right]_{k/2} = t^{-k} g(z+h)\right.$$

となる．ここで $t^k = e^{2\pi i r}$, ただし $r = 0, 1/4, 1/2, 3/4$ と表す．すると $e^{-2\pi i r z/h} g(z)$ は $z \to z+h$ の変換で不変であり, フーリエ級数展開 $e^{-2\pi i r z/h} g(z) = \sum a_n e^{2\pi i n z/h}$ を得る．すなわち,

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i z(n+r)/h}$$

となる．

この展開において, 有限個を除くすべての $n < 0$ に対して $a_n = 0$ となるとき, $f$ は $s$ で有理型であるという．またすべての $n < 0$ に対して $a_n = 0$ となるとき, $f$ は $s$ で正則であるという．正則かつ $a_0 = 0$ であるとき, $s$ で零点をもつという．

**定義 4.6.** $k$ を任意の整数とし, $\Gamma' \subset \Gamma_0(4)$ を有限指数の部分群とする．$f(z)$ を $\mathbb{H}$ 上の有理型関数で, すべての $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}'$ に対する $[\tilde{\gamma}]_{k/2}$ の作用で不変であるものとする．$f$ が $\Gamma'$ のすべてのカスプで有理型であるとき, $f$ を $\widetilde{\Gamma}'$ に対するウェイト $k/2$ の**保型関数**とよぶ．そのような $f$ が $\mathbb{H}$ 上およびすべてのカスプで正則であるとき, $f$ は**保型形式**とよばれ, $f \in M_{k/2}(\widetilde{\Gamma}')$ と書かれる．保型形式 $f$ がすべてのカスプで零点をもつとき, $f$ は**カスプ形式**とよばれ, $f \in S_{k/2}(\widetilde{\Gamma}')$ と書かれる．

$N$ を 4 の正の倍数とする．したがって $\Gamma_0(N) \subset \Gamma_0(4)$ である．また $\chi$ を $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ の指標とする．任意の $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ に対し

$$f|[\tilde{\gamma}]_{k/2} = \chi(d) f$$

を満たす $f$ からなる $M_{k/2}(\widetilde{\Gamma}_1(N))$ の部分空間を $M_{k/2}(N, \chi)$ と表す．また $S_{k/2}(N, \chi) = S_{k/2}(\widetilde{\Gamma}_1(N)) \cap M_{k/2}(N, \chi)$ と定める．整数ウェイトの場合と同様に

$$M_{k/2}(\widetilde{\Gamma}_1(N)) = \bigoplus_{\chi} M_{k/2}(N, \chi)$$

が成り立つ．さらに, $\chi_1$ と $\chi_2$ を $N$ を法とする Dirichlet 指標とするとき

$$f_i \in M_{k_i/2}(N, \chi_i) (i = 1, 2) \text{ ならば}$$

$$f_1 f_2 \in M_{(k_1+k_2)/2}(N, \chi_1 \chi_2)$$

となる．

ここで, のちに必要となる命題を 2 つ述べておく．証明は [5, p.448, Proposition 1.3, 1.4] を参照.

**命題 4.7.** $m$ を正の整数, $\tilde{\sigma} = \left(\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m^{-1/4}\right)$, $\chi'(d) = \chi(d) \cdot \left(\dfrac{m}{d}\right)$ とする．このとき, $[\tilde{\sigma}]_{k/2}$ は $S_{k/2}(N, \chi)$ を $S_{k/2}(mN, \chi')$ に送る写像である．

**命題 4.8.** $\beta_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$, $\tau_N = (\beta_N, N^{1/4}(-iz)^{1/2})$ とおき, $\chi^* = \overline{\chi}(d) \cdot \left(\dfrac{N}{d}\right)$ とする．このとき, $[\tau_N]_{k/2}$ は $S_{k/2}(N, \chi)$ を $S_{k/2}(N, \chi^*)$ に送る写像である．

最後に, 半整数ウェイトの保型形式に対するヘッケ作用素を定義する．

**定義 4.9.** $4|N$, $f \in M_{k/2}(\widetilde{\Gamma}_1(N))$, $n$ は $N$ と互いに素な任意の正の整数とする．

$$\alpha_n = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, n^{1/4}\right)$$

とするとき,

$$f|[\widetilde{\Gamma}_1(N)\alpha_n\widetilde{\Gamma}_1(N)]_{k/2} = \sum_j f|[\alpha_n\tilde{\gamma}_j]_{k/2}$$

と定義する．ただし, 和は両側剰余類 $\widetilde{\Gamma}_1(N)\alpha_n\widetilde{\Gamma}_1(N)$ に含まれる $\widetilde{\Gamma}_1(N)$ に関する全ての相異なる右剰余類をわたる．

上の記号の下で, 次の命題が成り立つ．(証明は [2, pp.204-206, Proposition 12] を参照.)

**命題 4.10.** $n$ を $N$ と互いに素な正の整数で完全平方数でないとする．このとき,

$$f|[\widetilde{\Gamma}_1(N)\alpha_n\widetilde{\Gamma}_1(N)]_{k/2} = 0$$

となる．

この命題より, 半整数ウェイトの保型形式に対するヘッケ作用素 $T_n$ は $n$ が完全平方数であるときのみ意味を持つ．また整数ウェイトの場合は $p$ を素数とすると, ヘッケ作用素の生成元は命題 3.32 より $T_p$ である．半整数ウェイトの場合も同様に生成元は $T_{p^2}$ となる．以上を踏まえてヘッケ作用素を定義する．

**定義 4.11.** $f \in M_{k/2}(\widetilde{\Gamma}_1(N))$ とする．

$$\alpha_{p^2} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, \sqrt{p}\right)$$

とするとき,

$$T_{p^2}f = p^{(k-4)/2}f|[\widetilde{\Gamma}_1(N)\alpha_{p^2}\widetilde{\Gamma}_1(N)]_{k/2}$$

と定義する．

$f \in M_{\kappa/2}(N, \chi)$ がヘッケ作用素 $T_{p^2}$ に対する固有ベクトルであるとき, $f$ を $T_{p^2}$ に対する**固有形式**という．さらに, $f$ がいくつかのヘッケ作用素に対して同時に固有形式となるとき, $f$ は**同時固有形式**であるという．

## 5 主定理の主張

この章では丹羽による定理 (定理 5.8) を述べる．まず初めに志村による定理を述べる．志村は [5] で同時固有形式となっている半整数ウェイトのカスプ形式と, 整数ウェイトのカスプ形式の対応を述べた.

**定理 5.1.** (志村対応) $\kappa \geqq 3$ を奇数, $N$ を正の整数, $\chi$ を $4N$ を法とする指標, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\exp(2\pi i n z) \in S_{\kappa/2}(4N,\chi)$, $\lambda = (\kappa-1)/2$ とする．さらに $t$ を平方因子をもたない正の整数とし, $\chi_t$ を $4tN$ を法とする

$$\chi_t(m) = \chi(m)\left(\frac{-1}{m}\right)^{\lambda}\left(\frac{t}{m}\right)$$

で定義された指標とする.

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_t(n)n^{-s} = L(s-\lambda+1,\chi_t)\left(\sum_{m=1}^{\infty} a(tm^2)m^{-s}\right)$$

により, $\mathbb{H}$ 上の関数 $F_t(z)$ を

$$F_t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_t(n)\exp(2\pi i n z)$$

で定義する．ただし, $L(s,\chi)$ は (2.2) で定義したものである．$f$ を $\chi_t$ のコンダクターを割り切らない $4N$ の全ての素因数 $p$ に対する $T_{p^2}$ による同時固有形式とする．このとき, ある正の整数 $N_t$ に対して $F_t \in M_{\kappa-1}(N_t,\chi^2)$ が成り立つ．さらに, $\kappa \geqq 5$ のとき, $F_t$ はカスプ形式である．特に $t=1$ のときには $N_1 = 2N$ ととれる.

次に定理 5.8 に必要な記号を定義してから, 丹羽による定理を述べる．$N, \lambda$ を正の整数, $\chi$ を $4N$ を法とする指標, さらに

$$\chi_1(m) = \chi\left(\frac{-1}{m}\right)^{\lambda} \tag{5.2}$$

とする．$\mathbb{R}^3$ の元 $x = (x_1,x_2,x_3)$ に対し関数 $f(x)$ を

$$f(x) = (x_1 - ix_2 - x_3)^{\lambda}\exp\left\{-\frac{2\pi}{N}\left(2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2\right)\right\} \tag{5.3}$$

と定める.

**定義 5.4.** $g \in SL_2(\mathbb{R})$, $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ とするとき $gx = (x_1', x_2', x_3') \in \mathbb{R}^3$ を

$$g\begin{pmatrix} x_1 & x_2/2 \\ x_2/2 & x_3 \end{pmatrix}{}^t g = \begin{pmatrix} x_1' & x_2'/2 \\ x_2'/2 & x_3' \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

と定義する．さらに $\kappa = 2\lambda + 1$, $L' = \mathbb{Z} \oplus N\mathbb{Z} \oplus (N\mathbb{Z}/4) \subset \mathbb{Q}^3$ とし, 実数 $u, v$ に対して $\mathbb{H}$ の元 $z$ を $z = u + iv$ とする．このとき, $\theta(z, g)$ を

$$\theta(z,g) = \sum_{x \in L'} \overline{\chi}_1(x_1) v^{(3-\kappa)/4} \exp\left\{\frac{2\pi i u}{N}(x_2^2 - 4x_1x_3)\right\} f(\sqrt{v} g^{-1} x) \tag{5.6}$$

と定義する．

$F(z) \in S_{\kappa/2}\left(4N, \overline{\chi}\left(\frac{N}{*}\right)\right)$ とすると, 命題 4.8 より

$$G(z) = (4N)^{-\kappa/4}(-iz)^{-\kappa/2} F(-1/4Nz) \in S_{\kappa/2}(4N, \chi)$$

が成り立つ．$G(z)$ のフーリエ級数展開を

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a(k) \exp(2\pi i k z)$$

とするとき, $A_1(n)$ を

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_1(n) n^{-s} = L(s - \lambda + 1, \chi_1) \left(\sum_{k=1}^{\infty} a(k^2) k^{-s}\right)$$

で定義する．ここで記号を 1 つ定義する．

**定義 5.7.** $\mathbb{H}$ の元 $w$ を実数 $\xi, \eta$ により, $w = \xi + i\eta$ としたとき

$$\sigma_w = \begin{pmatrix} \eta^{1/2} & \xi\eta^{-1/2} \\ 0 & \eta^{-1/2} \end{pmatrix}$$

と定義する．

$w'$ を $\xi', \eta' \in \mathbb{R}$ により $w' = \xi' + i\eta' = -1/2Nw$ とする．次の定理は論文 [4] の主定理である．

**定理 5.8.** 上で述べた記号の下で, $\kappa \geqq 7$ を奇数, $z = u + iv$ とする．このとき,

$$\Phi(w) = (2N)^{\lambda}(-2Nw)^{-2\lambda}(4\eta')^{-\lambda} \int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathbb{H}} v^{\kappa/2} \overline{\theta}(z, \sigma_{4w'}) F(z) \frac{dudv}{v^2} \in S_{\kappa-1}(2N, \chi^2)$$

が成り立つ．また $C = (-1)^{\lambda} 2^{(-4\lambda+5)/2} N^{\kappa/2}$ としたとき,

$$\Phi(w) = C \sum_{n=1}^{\infty} A_1(n) \exp(2\pi i n w)$$

である．

また定理 5.8 から, 定理 5.1 の $N_t$ について次のことがわかる．

**系 5.9.** 定理 5.1 において $\kappa \geqq 7$ のとき $N_t$ は常に $2N$ ととれる．

# 6 証明のための準備

この章では定理 5.8 の証明に必要な関数を定義する. 特に断らない限り, $z = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$ とする.

$Q$ を有理数を成分に持つ $n$ 次非退化対称行列で符号数が $(p, q)$ であるものとする. $Q$ を用いて $\mathbb{R}^n$ での対称双線型形式を

$$\langle x, y \rangle = {}^t x Q y$$

で定義する.

$SL_2(\mathbb{R})$ 上の Weil 表現を定義する.

**定義 6.1.** $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とする.

$$\epsilon(\gamma) = \begin{cases} \sqrt{i} & (c > 0) \\ i^{(1-\mathrm{sgn}(d))/2} & (c = 0) \\ \sqrt{i}^{-1} & (c < 0) \end{cases}$$

とし, Weil 表現 $\gamma \to r_0(\gamma)$ を

$$\begin{aligned} &(r_0(\gamma)f)(x) \\ &= \begin{cases} |a|^{n/2} \exp\left\{\dfrac{2\pi i ab\langle x, x\rangle}{2}\right\} f(ax) & (c = 0) \\ |\mathrm{det} Q|^{1/2}|c|^{-n/2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{\dfrac{2\pi i(a\langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + d\langle y, y\rangle)}{2c}\right\} f(y)dy & (c \neq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

で定義する. また $r(\gamma) = \epsilon(\gamma)^{q-p} r_0(\gamma)$ とする. このとき $r$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ を表現空間とする $SL_2(\mathbb{R})$ の表現となっている.

$\langle x, x\rangle$ は $\mathbb{Q}^n$ の中での格子 $L$ 上で整数の値をとると仮定する. $L^*$ を $L$ の双対格子とし, $h \in L^*/L$ と $f \in S(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\theta(f, h) = \sum_{x \in L} f(h + x)$$

と定義する. 次の命題は [6, pp.95-97, Proposition 1.6] による.

**命題 6.2.** (i) $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ が任意の $x \in L$ に対して $ab\langle x, x\rangle, cb\langle x, x\rangle \equiv 0 \mod 2$ を満たすとき, $\mathrm{vol}(L)$ を $L$ の基本領域の体積とすると,

$$\begin{aligned} &c(h, k)_\gamma \\ &= \begin{cases} \delta_{k,ah} \exp\left\{\dfrac{2\pi i ab\langle h, k\rangle}{2}\right\} & (c = 0) \\ |\det Q|^{-1/2}\mathrm{vol}(L)^{-1}|c|^{-n/2} & \\ \times \displaystyle\sum_{r \in L/cL} \exp\left\{\dfrac{2\pi i(a\langle h + r, h + r\rangle - 2\langle k, h + r\rangle + d\langle k, k\rangle)}{2c}\right\} & (c \neq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

とする．このとき

$$\theta(r_0(\gamma)f,h)=\sum_{k\in L^*/L}c(h,k)_\gamma\theta(f,k)$$

となる．

(ii) さらに任意の $x\in L^*$ に対して $c\equiv c\langle x,x\rangle\equiv 0 \mod 2$ であり $cL^*\subset L$ であるとする．また $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ を $L$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底, $D=\det(\langle\lambda_i,\lambda_j\rangle)$ とする．このとき

$$\sqrt{i}^{-(p-q)\mathrm{sgn}(cd)}c(h,k)_\gamma$$
$$=\begin{cases}\delta_{h,dk}\exp\left\{\dfrac{2\pi iab\langle h,h\rangle}{2}\right\}\epsilon_d^{-n}(i\,\mathrm{sgn}(c))^n\left(\dfrac{2c}{d}\right)^n\left(\dfrac{D}{-d}\right) & (d<0)\\ \delta_{h,dk}\exp\left\{\dfrac{2\pi iab\langle h,h\rangle}{2}\right\}\epsilon_d^{n}\left(\dfrac{-2c}{d}\right)^n\left(\dfrac{D}{d}\right) & (d>0)\end{cases}$$

である．

**定義 6.3.** $\epsilon$ は正の整数とする．$\theta\in\mathbb{R}$ に対し,

$$k(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

と定義する．$\mathbb{R}^n$ 上の関数 $f$ が $r(k(\theta))f=(\cos\theta+i\sin\theta)^{\epsilon/2}f$ を満たすとき, $\theta(z,f,h)$ を

$$\theta(z,f,h)=v^{-\epsilon/4}\theta(r_0(\sigma_z)f,h)$$

により定義する．

命題 6.2 より次の系が得られる．([4, p.150, Corollary 0] を参照.)

**系 6.4.** $\epsilon$ は正の整数とする．命題 6.2 と同じ条件と記号の下で $f$ が任意の $\theta\in\mathbb{R}$ に対して $r(k(\theta))f=(\cos\theta+i\sin\theta)^{\epsilon/2}f$ を満たすとする．このとき $c\neq 0$ とすると $\theta(z,f,h)$ についての次の変換公式が得られる．

$$(\sqrt{i})^{(p-q)\mathrm{sgn}(c)}(cz+d)^{-\epsilon/2}\theta(\gamma z,f,h)=\sum_{k\in L^*/L}c(h,k)_\gamma\theta(z,f,k). \tag{6.5}$$

系 6.4 を証明する前に, 次の補題を述べる．(証明は [1, pp.56-57, Proposition 1.3] を参照.)

**補題 6.6.** $\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{R})$, $\theta$ を $e^{i\theta}=(cz+d)/|cz+d|$ により定める．このとき次のことが成り立つ．

(i) $\sigma_{\gamma z}=\gamma\sigma_z k(\theta)$.

(ii) $r_0(\gamma)r_0(\sigma_z)=r_0(\sigma_{\gamma z})r_0(k(-\theta))$.

系 6.4 の証明．任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して $r(k(\theta))f = (\cos\theta + i\sin\theta)^{\epsilon/2}f$ より，

$$f = e^{i\epsilon\theta/2}\epsilon(k(-\theta))^{q-p}r_0(k(-\theta))f$$

が成り立つことに注意する．$e^{i\theta} = (cz+d)/|cz+d|$ とすると補題 6.6 より，

$$\begin{aligned}
&\theta(\gamma z, f, h) \\
&= \mathrm{Im}(\gamma z)^{-\epsilon/4}\theta(r_0(\sigma_{\gamma z})f, h) \\
&= \left(\frac{v}{|cz+d|^2}\right)^{-\epsilon/4}\theta(r_0(\gamma)r_0(\sigma_z)r_0(k(-\theta))^{-1}f, h) \\
&= \left(\frac{v}{|cz+d|^2}\right)^{-\epsilon/4}\theta(e^{i\epsilon\theta/2}\epsilon(k(-\theta))^{q-p}r_0(\gamma)r_0(\sigma_z)f, h) \\
&= \left(\frac{v}{|cz+d|^2}\right)^{-\epsilon/4}\sum_{k\in L^*/L}c(h,k)_\gamma\theta(e^{i\epsilon\theta/2}\epsilon(k(-\theta))^{q-p}r_0(\sigma_z)f, k) \\
&= \left(\frac{v}{|cz+d|^2}\right)^{-\epsilon/4}e^{i\epsilon\theta/2}\epsilon(k(-\theta))^{q-p}\sum_{k\in L^*/L}c(h,k)_\gamma\theta(r_0(\sigma_z)f, k) \\
&= \left(\frac{1}{|cz+d|^2}\right)^{-\epsilon/4}e^{i\epsilon\theta/2}\epsilon(k(-\theta))^{q-p}\sum_{k\in L^*/L}c(h,k)_\gamma\theta(z, f, k) \\
&= (cz+d)^{\epsilon/2}\epsilon(k(-\theta))^{q-p}\sum_{k\in L^*/L}c(h,k)_\gamma\theta(z, f, k)
\end{aligned}$$

となる．ここで $\mathrm{sgn}(-\sin(-\theta)) = \mathrm{sgn}(c)$ と $\epsilon(k(-\theta)) = (\sqrt{i})^{\mathrm{sgn}(-\sin(-\theta))}$ であることに注意すると，(6.5) が得られる． □

以下，準備 1, 2, 3 に分けて証明に必要な関数を定義する．主な目的は準備 3 で，ある変換公式を満たす (5.6) の $\theta(z, g)$ を構成することである．$\theta(z, g)$ は $L' = \mathbb{Z}\oplus N\mathbb{Z}\oplus(N\mathbb{Z}/4)$ 上のある関数の変数を，$L'$ 全体で動かしたときの和で定義されていた．そのために準備 1, 2 ではそれぞれ $L = N\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\oplus(N\mathbb{Z}/4)$ として考え，準備 1, 2 を踏まえて準備 3 を述べる．また特に断らない限り，準備 1, 2, 3 では $\epsilon$ は正の整数とする．

**準備 1.** $n = 1$, $Q = (2/N)$, $L = N\mathbb{Z}$, $f(x) = \exp(-(2\pi/N)x^2)$ とする．このとき，$p = 1, q = 0$, $L^* = \mathbb{Z}/2$ である．

$r(k(\theta))f = (\cos\theta + i\sin\theta)^{1/2}f$ となることを確認する．

(i) $-\sin\theta = 0$ のとき，$\cos\theta = \pm 1$ である．したがって

$$(r_0(k(\theta)))f(x) = f(x\cos\theta) = f(x)$$

となる．また $(\cos\theta + i\sin\theta)^{1/2} = \epsilon(k(\theta))$ であることもわかる．

(ii) $-\sin\theta \neq 0$ のとき,

$$
\begin{aligned}
&r(k(\theta))f \\
&= \sqrt{i}^{-\mathrm{sgn}(-\sin\theta)} \left(\frac{2}{N}\right) |\sin\theta|^{-1/2} \\
&\qquad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{2\pi i \frac{2(x^2\cos\theta - 2xy + y^2\cos\theta)}{-2N\sin\theta}\right\} \exp\left(-\frac{2\pi}{N}y^2\right) dy
\end{aligned}
$$

である. また,

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{2\pi i \frac{2(x^2\cos\theta - 2xy + y^2\cos\theta)}{-2N\sin\theta}\right\} \exp\left(-\frac{2\pi}{N}y^2\right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{2\pi i e^{-i\theta}}{N\sin\theta}(y - e^{i\theta}x)^2\right\} \exp\left\{\frac{2\pi}{N\sin\theta}(i\cos\theta - \sin\theta - i\cos\theta)x^2\right\} dy \\
&= f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{2\pi i e^{-i\theta}}{N\sin\theta}(y - e^{i\theta}x)^2\right\} dy
\end{aligned}
$$

となる. ここで, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ で $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ とすると

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+\beta)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{|\alpha|}} e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Arg}(\alpha)} \tag{6.7}
$$

であることに注意すると,

$$
r(k(\theta))f = \sqrt{i}^{\mathrm{sgn}(\sin\theta)} \left(\frac{2}{N}\right) |\sin\theta|^{-1/2} \sqrt{\frac{\pi N|\sin\theta|}{2\pi}} e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Arg}(c)} f(x)
$$

となる. ただし, $c = 2\pi i e^{-i\theta}/N\sin\theta$ とした. また $\sqrt{i}^{\mathrm{sgn}(\sin\theta)} e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Arg}(c)} = e^{i\theta}$ がわかるので $f$ は $r(k(\theta))f = (\cos\theta + i\sin\theta)^{1/2} f$ を満たす.

$f$ は系 6.4 の条件を満たすので,

$$
\begin{aligned}
\theta(z, f, 0) &= v^{-1/4}\theta(r_0(\sigma_z)f, 0) \\
&= v^{-1/4} \sum_{x\in L} (r_0(\sigma_z)f)(x) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}} \exp(2\pi i N u x^2) f(\sqrt{v}Nx) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}} \exp(2\pi i N z x^2) \\
&= \theta(Nz)
\end{aligned}
$$

となる.

$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4N)$ に対して系 6.4 より

$$
(\sqrt{i})^{\mathrm{sgn}(c)}(cz+d)^{-1/2}\theta(\gamma z, f, 0) = \sum_{k\in L^*/L} c(0,k)_\gamma \theta(z, f, k).
$$

このとき, $cL^* \subset L$ を満たすので, 命題6.2より $k \neq 0$ のとき $c(0,k)_\gamma = 0$ である. したがって

$$(\sqrt{i})^{\mathrm{sgn}(c)}(cz+d)^{-1/2}\theta(N\gamma z) = c(0,0)_\gamma \theta(Nz).$$

命題4.7より $\theta(Nz) \in M_{1/2}\left(4N, \left(\frac{N}{d}\right)\right)$ なので $\theta(N\gamma z) = \left(\frac{N}{d}\right) j(\gamma,z)\theta(Nz)$ が成り立つ. したがって

$$\begin{aligned} c(0,0)_\gamma &= (\sqrt{i})^{\mathrm{sgn}(c)}(cz+d)^{-1/2}\theta(N\gamma z)/\theta(Nz) \\ &= (\sqrt{i})^{\mathrm{sgn}(c)}(cz+d)^{-1/2} j(\gamma,z)\left(\frac{N}{d}\right) \end{aligned} \tag{6.8}$$

である. 命題6.2からわかるように, $c(h,k)_\gamma$ は $f$ に依存しないことに注意する.

$r(k(\theta))f = (\cos\theta + i\sin\theta)^{(2\epsilon+1)/2} f$ を満たす関数 $f$ を見つける. そのために, 次のように写像 $I$ を定義する. $L^2(\mathbb{C}, \exp(-\pi z\overline{z})dudv)$ は $u,v \in \mathbb{R}$, $z = u+iv$ としたときに

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \exp(-\pi|z|^2)dudv < \infty$$

となる関数 $f$ 全体の集合とする.

**定義 6.9.** $m$ を正の有理数, $k(x,z) = \exp(-\pi m x^2)\exp(2\pi i x\sqrt{m}z)\exp((\pi/2)z^2)$ とする. 写像 $I : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{C}, \exp(-\pi z\overline{z})dudv)$ を

$$(If)(z) = \int_{\mathbb{R}} k(x,z)f(x)dx, f \in L^2(\mathbb{R}) \tag{6.10}$$

と定める.

写像 $I$ が well-defined であることを確認する. $f \in L^2(\mathbb{R})$, $z = u+iv$, $u,v$ は実数とする. このとき,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{C}} |(If)(z)|^2 \exp(-\pi|z|^2)dudv \\ &= \int_{\mathbb{C}} \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-\pi m x^2)\exp(2\pi i x\sqrt{m}z)\exp\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)dx\right|^2 \exp(-\pi|z|^2)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-\pi m x^2)\exp(-2\pi\sqrt{m}vx)\exp(2\pi i x\sqrt{m}u)dx\right|^2 \\ &\qquad \times \left|\exp\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\right|^2 \exp(-\pi|z|^2)dudv. \end{aligned}$$

ここで $g(x) = f(x)\exp(-\pi m x^2)\exp(-2\pi\sqrt{m}vx)$ とおくと Plancherel の定理 ([8, p.81, 定理 3.24]) より, $|g(x)|^2$ と $|\hat{g}(x)|^2$ の実数全体での積分の値は等しくなるので, 上の積

分は

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{g}(-\sqrt{m}u)|^2du\right)\exp(-2\pi v^2)dv \\
&=\frac{1}{\sqrt{m}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{g}(u)|^2du\right)\exp(-2\pi v^2)dv \\
&=\frac{1}{\sqrt{m}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\exp(-2\pi m x^2)\exp(-4\pi\sqrt{m}vx)dx\right)\exp(-2\pi v^2)dv \\
&=\frac{1}{\sqrt{m}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\exp\left\{-2\pi m\left(x+\frac{v}{\sqrt{m}}\right)^2\right\}dxdv
\end{aligned}$$

と計算できる．さらに被積分関数は可積分だから, Fubini の定理と変数変換より上の積分は,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{m}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-2\pi v^2)dv\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx \\
&=\frac{1}{\sqrt{2m}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx
\end{aligned}$$

に等しい．よって, $I$ は well-defined である．このことから $I$ が単射であることがわかる．

$\epsilon$ を正の整数とする．エルミート関数 $h_\epsilon(x)$ を

$$h_\epsilon(x)=\exp(\pi m x^2)\frac{d^\epsilon}{dx^\epsilon}\bigg|_{\sqrt{m}x}\exp(-2\pi x^2)$$

とする．このとき次の補題が成り立つ．

**補題 6.11.** $(Ih_\epsilon)(z)$ は $z^\epsilon$ の定数倍である．

証明. $(Ih_\epsilon)(z)$ を計算すると

$$\begin{aligned}
(Ih_\epsilon)(z)&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi m x^2)\exp(2\pi i x\sqrt{m}z)\exp\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)h_\epsilon(x)dx \\
&=\exp\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(2\pi i x\sqrt{m}z)\frac{d^\epsilon}{dx^\epsilon}\bigg|_{\sqrt{m}x}\exp(-2\pi x^2)dx \\
&=\frac{1}{\sqrt{m}}\exp\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(2\pi i x z)\frac{d^\epsilon}{dx^\epsilon}\exp(-2\pi x^2)dx
\end{aligned}$$

となる．部分積分を繰り返すことによって

$$\begin{aligned}
(Ih_\epsilon)(z)&=\frac{1}{\sqrt{m}}(-2\pi i z)^\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-2\pi\left(x-\frac{iz}{2}\right)^2\right\}dx \\
&=\frac{1}{\sqrt{m}}(-2\pi i z)^\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-2\pi x^2\right)dx \\
&=\frac{1}{\sqrt{2m}}(-2\pi i z)^\epsilon
\end{aligned}$$

となる． □

補題 6.11 と Stone-Weierstrass の定理 [10, p.520, 定理 7.61] より $z$ の多項式全体の集合は $L^2(\mathbb{C}, \exp(-\pi z\bar{z})dudv)$ で稠密であることがわかるので, $I$ は全単射である.

さらに次の補題が成り立つ.

**補題 6.12.** 任意の $\theta \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\mathbb{R})$, 1 次行列 $Q = (m)$ に対して

$$(Ir(k(\theta))f)(z) = (\cos\theta + i\sin\theta)^{1/2}(If)(e^{i\theta}z) \tag{6.13}$$

が成り立つ.

証明. (i) $-\sin\theta = 0$ のとき, $\cos\theta = \pm 1$ であり

$$(r(k(\theta)))f(x) = \begin{cases} f(x) & (\cos\theta = 1) \\ -if(-x) & (\cos\theta = -1) \end{cases}$$

となり,

$$(Ir(k(\theta))f)(z) = \begin{cases} (If)(z) & (\cos\theta = 1) \\ -i(If)(-z) & (\cos\theta = -1) \end{cases}$$

が成り立つので (6.13) が満たされている.

(ii) $-\sin\theta \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
&(Ir(k(\theta))f)(z) \\
&= \sqrt{i}^{\,\mathrm{sgn}(\sin\theta)} m^{1/2}|-\sin\theta|^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\pi mx^2 + 2\pi ix\sqrt{m}z + \frac{\pi}{2}z^2\right) \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{\pi im(x^2\cos\theta - 2xy + y^2\cos\theta)}{-\sin\theta}\right\} f(y)dydx \\
&= \sqrt{i}^{\,\mathrm{sgn}(\sin\theta)} m^{1/2}|-\sin\theta|^{-1/2}\exp\left(\frac{\pi}{2}z^2\right) \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\pi mx^2 + 2\pi ix\sqrt{m}z - \frac{\pi imx^2\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{2\pi imxy}{\sin\theta}\right)dx \\
&\quad\quad \times \exp\left(-\frac{\pi im\cos\theta}{\sin\theta}y^2\right) f(y)dy
\end{aligned}$$

となる. また (6.7) と, 積分の順序交換ができることに注意すると

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\pi mx^2 + 2\pi ix\sqrt{m}z - \frac{\pi imx^2\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{2\pi imxy}{\sin\theta}\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\pi mie^{-i\theta}}{\sin\theta}\left(x - \frac{e^{i\theta}\sin\theta}{\sqrt{m}}\left(z + \frac{\sqrt{m}y}{\sin\theta}\right)\right)^2 + \pi ie^{i\theta}\sin\theta\left(z + \frac{\sqrt{m}y}{\sin\theta}\right)^2\right\}dx \\
&= \sqrt{i}^{\,-\mathrm{sgn}(\sin\theta)} m^{-1/2}|-\sin\theta|^{1/2}e^{i\theta/2}\exp\left\{\pi ie^{i\theta}\sin\theta\left(z + \frac{\sqrt{m}y}{\sin\theta}\right)^2\right\}
\end{aligned}$$

となるので,

$$
\begin{aligned}
&(Ir(k(\theta))f)(z)\\
&= e^{i\theta/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\pi i e^{i\theta}\sin\theta\left(z+\frac{\sqrt{m}y}{\sin\theta}\right)^2-\frac{\pi i m\cos\theta}{\sin\theta}y^2+\frac{\pi}{2}z^2\right\}f(y)dy\\
&= e^{i\theta/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi m y^2)\exp(2\pi i y\sqrt{m}e^{i\theta}z)\exp\left(\frac{\pi}{2}e^{2i\theta}z^2\right)f(y)dy\\
&= (\cos\theta+i\sin\theta)^{1/2}(If)(e^{i\theta}z)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. □

補題 6.12 より, $(If_{1,\epsilon})(z)$ が $z^\epsilon$ の定数倍となる $f_{1,\epsilon}$ を見つければ,

$$e^{-i\theta/2}(Ir(k(\theta)f_{1,\epsilon})(z) = e^{i\epsilon\theta}(If_{1,\epsilon})(z)$$

となるので $r(k(\theta))f_{1,\epsilon} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{(2\epsilon+1)/2}f_{1,\epsilon}$ を満たすことがわかる. すなわち

$$H_\epsilon(x) = (-1)^\epsilon\exp(x^2/2)\frac{d^\epsilon}{dx^\epsilon}\exp(-x^2/2) \tag{6.14}$$

としたとき, 補題 6.11 より

$$f_{1,\epsilon}(x) = H_\epsilon(2\sqrt{\pi m}x)\exp(-\pi m x^2)$$

とできる.

再び $m = 2/N$, $L = N\mathbb{Z}$ とする. $\theta_{1,\epsilon}(z) = \theta(z, f_{1,\epsilon}, 0)$ とすると,

$$
\begin{aligned}
\theta_{1,\epsilon}(z) &= v^{-(2\epsilon+1)/4}\theta(r_0(\sigma_z)f_{1,\epsilon}, 0)\\
&= v^{-\epsilon/2}\sum_{x=-\infty}^{\infty}\exp(2\pi i N u x^2)f_{1,\epsilon}(\sqrt{v}Nx)\\
&= v^{-\epsilon/2}\sum_{x=-\infty}^{\infty}H_\epsilon(2\sqrt{2N\pi v}x)\exp(2\pi i N z x^2)
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

が成り立つ.

$$\theta_\epsilon(z) = (2v)^{-\epsilon/2}\sum_{x=-\infty}^{\infty}\exp(2\pi i z x^2)H_\epsilon(2\sqrt{2\pi v}x) \tag{6.16}$$

とすると, $\theta_{1,\epsilon}$ の関して次の命題が成り立つ.

**命題 6.17.** 任意の $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4N)$ に対して, 次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) $\theta_{1,\epsilon}(\gamma z) = \left(\dfrac{N}{d}\right) j(\gamma, z)(cz+d)^\epsilon\theta_{1,\epsilon}(z)$.

(ii) $\theta_{1,\epsilon}\left(-\dfrac{1}{4Nz}\right) = i^{\epsilon}(2N)^{\epsilon/2}(-2iz)^{(2\epsilon+1)/2}\theta_{\epsilon}(z)$.

証明. (i) $c(h,k)_\gamma$ は $f$ に依存しないことから, 系 6.4, (6.8) より

$$\begin{aligned}\theta_{1,\epsilon}(\gamma z) &= (\sqrt{i})^{-\operatorname{sgn}(c)}(cz+d)^{(2\epsilon+1)/2}c(0,0)_\gamma\theta_{1,\epsilon}(z)\\ &= \left(\frac{N}{d}\right)j(\gamma,z)(cz+d)^{\epsilon}\theta_{1,\epsilon}(z)\end{aligned}$$

が成り立つ.

(ii) $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると系 6.4 より

$$\sqrt{i}z^{-(2\epsilon+1)/2}\theta\left(-\frac{1}{z}, f_{1,\epsilon}, 0\right) = \sum_{k\in L^*/L} c(0,k)_\gamma\theta(z, f_{1,\epsilon}, k) \tag{6.18}$$

が成り立つ. 命題 6.2(i) より, 任意の $k \in L^*/L$ に対し $c(0,k)_\gamma = (2N)^{-1/2}$ となることに注意すると, (6.18) より

$$\begin{aligned}\theta_{1,\epsilon}\left(-\frac{1}{z}\right) &= \sqrt{i}^{-1}z^{(2\epsilon+1)/2}(2N)^{-1/2}\sum_{k\in L^*/L}\theta(z, f_{1,\epsilon}, k)\\ &= \sqrt{i}^{-1}z^{(2\epsilon+1)/2}(2N)^{-1/2}\sum_{k\in L^*/L}v^{-(2\epsilon+1)/4}\sum_{x\in L}r_0(\sigma_z)f_{1,\epsilon}(k+x)\\ &= \sqrt{i}^{-1}z^{(2\epsilon+1)/2}(2N)^{-1/2}v^{-(2\epsilon+1)/4}\sum_{x\in L^*}r_0(\sigma_z)f_{1,\epsilon}(x)\\ &= \sqrt{i}^{-1}z^{(2\epsilon+1)/2}(2N)^{-1/2}v^{-(2\epsilon+1)/4}\\ &\qquad\times\sum_{x\in\mathbb{Z}/2}v^{1/4}\exp\left(\frac{2\pi iu}{N}x^2\right)H_\epsilon\left(2\sqrt{\frac{2\pi v}{N}}x\right)\exp\left(-\frac{2\pi v}{N}x^2\right)\\ &= \sqrt{i}^{-1}z^{(2\epsilon+1)/2}(2N)^{-1/2}v^{-\epsilon/2}\sum_{x\in\mathbb{Z}/2}\exp\left(\frac{2\pi iz}{N}x^2\right)H_\epsilon\left(2\sqrt{\frac{2\pi v}{N}}x\right)\end{aligned}$$

となる. したがって,

$$\begin{aligned}\theta_{1,\epsilon}\left(-\frac{1}{4Nz}\right) &= \sqrt{i}^{-1}(4Nz)^{(2\epsilon+1)/2}(2N)^{-1/2}(4Nv)^{-\epsilon/2}\sum_{x\in\mathbb{Z}/2}\exp(8\pi izx^2)H_\epsilon(4\sqrt{2\pi v}x)\\ &= i^{\epsilon}(2N)^{\epsilon/2}(-2iz)^{(2\epsilon+1)/2}(2v)^{-\epsilon/2}\sum_{x=-\infty}^{\infty}\exp(2\pi izx^2)H_\epsilon(2\sqrt{2\pi v}x)\\ &= i^{\epsilon}(2N)^{\epsilon/2}(-2iz)^{(2\epsilon+1)/2}\theta_\epsilon(z)\end{aligned}$$

が成り立つ. □

これで準備 1 が終わる.

**準備 2.** $n=2$, $Q=\dfrac{2}{N}\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$, $L=4N\mathbb{Z}\oplus(N\mathbb{Z}/4)$ とする. このとき, $q=p=1$, $r=r_0$, $L^*=\mathbb{Z}\oplus(\mathbb{Z}/16)$, $4NL^*=L$, $\langle x,y\rangle=(-4/N)(x_1y_2+x_2y_1)$ であり, 任意の $x\in L$ に対して $\langle x,x\rangle\equiv 0 \mod 4$ であるので命題 6.2(i), (ii) の仮定が満たされる. 上の状況で $L'=\mathbb{Z}\oplus(N\mathbb{Z}/4)$, $h\in L'/L$ とする.

$k\in L^*$, $\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(4N)$ とするとき $c(h,k)_\gamma$ について考える.

(i) $c=0$ のとき, $a=\pm1$ である. 命題 6.2(i) より $h_1,h_2\in\mathbb{Z}$ とし $h=(h_1,Nh_2/4)$ とおくと

$$\begin{aligned}
c(h,k)_\gamma &= \delta_{k,ah}\exp\left\{\frac{2\pi iab\langle h,k\rangle}{2}\right\}\\
&= \delta_{k,\pm h}\exp\left\{\pm\frac{2\pi ib\langle h,\pm h\rangle}{2}\right\}\\
&= \delta_{k,\pm h}\exp\left\{\pm\frac{2\pi ib\cdot(-4/N)(\pm 2h_1Nh_2/4)}{2}\right\}\\
&= \delta_{k,ah}
\end{aligned}$$

である.

(ii) $c\neq 0$ のとき, 命題 6.2(ii) の $D$ は $\lambda_1=(4N,0),\lambda_2=(0,N/4)$ としたとき

$$\begin{aligned}
D &= \det\begin{pmatrix}\langle\lambda_1,\lambda_1\rangle & \langle\lambda_1,\lambda_2\rangle\\ \langle\lambda_2,\lambda_1\rangle & \langle\lambda_2,\lambda_2\rangle\end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix}0 & -4N\\ -4N & 0\end{pmatrix}\\
&= -16N^2
\end{aligned}$$

と計算できる. この $D$ により

$$c(h,k)_\gamma=\begin{cases}\delta_{h,dk}\exp\left\{\dfrac{2\pi iab\langle h,h\rangle}{2}\right\}\epsilon_d^{-2}(-1)\left(\dfrac{D}{-d}\right) & (d<0)\\ \delta_{h,dk}\exp\left\{\dfrac{2\pi iab\langle h,h\rangle}{2}\right\}\epsilon_d^{2}\left(\dfrac{D}{d}\right) & (d>0)\end{cases}$$

である. $ad\equiv 1 \mod 4N$, $k\in L^*/4NL^*$ より $\delta_{h,dk}=\delta_{ah,k}$ であり, $c=0$ のときと同様に $\exp\{2\pi i(ab/2)\langle h,h\rangle\}=1$ である. $d<0$ のとき

$$\begin{aligned}
\epsilon_d^{-2}(-1)\left(\frac{D}{-d}\right) &= -\left(\frac{-1}{d}\right)^{-1}\left(\frac{-16N^2}{-d}\right)\\
&= \left(\frac{-1}{-d}\right)^{-1}\left(\frac{-1}{-d}\right)\\
&= 1
\end{aligned}$$

であり, $d>0$ のとき

$$\begin{aligned}\epsilon_d^2\left(\frac{D}{d}\right) &= \left(\frac{-1}{-d}\right)\left(\frac{-16N^2}{d}\right)\\ &= \left(\frac{-1}{-d}\right)^2\\ &= 1\end{aligned}$$

となる.

つまり任意の $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4N)$ に対して, $c(h,k)_\gamma = \delta_{k,ah}$ であり, 命題 6.2 より

$$\theta(r_0(\gamma)f, h) = \theta(f, ah)$$

が成り立つ.

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ が $r(k(\theta))f = e^{i\epsilon\theta}f$ を満たすとき, 系 6.4 より,

$$\theta(\gamma z, f, h) = (cz+d)^\epsilon \theta(z, f, ah)$$

が成り立つ. ここで $h = (h_1, h_2)$ に対し

$$\theta_{2,\epsilon}(z, f) = \sum_{h \in L'/L} \overline{\chi}_1(h_1)\theta(z, f, h)$$

とする. ただし $\chi_1$ は (5.2) で定義したものである. このとき $\chi_1$ が $4N$ を法とした Dirichlet 指標であり, $ad \equiv 1 \mod 4N$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned}\theta_{2,\epsilon}(\gamma z, f) &= \sum_{h \in L'/L} \overline{\chi}_1(h_1)\theta(\gamma z, f, h)\\ &= (cz+d)^\epsilon \sum_{h \in L'/L} \overline{\chi}_1(h_1)\theta(\gamma z, f, ah)\\ &= \overline{\chi}_1(d)(cz+d)^\epsilon \theta_{2,\epsilon}(z, f)\end{aligned}$$

が成り立つ.

$r(k(\theta))f = e^{i\epsilon\theta}f$ を満たす $f$ を見つける. $m>0$ に対して $Q = m\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ とおき, この $Q$ に対して Weil 表現を考える. ここで部分フーリエ変換とその逆変換を

$$(\mathcal{F}f)(x_1, x_2) = \sqrt{2m}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, t)\exp(4\pi imtx_2)dt,$$

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x_1, x_2) = \sqrt{2m}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, t)\exp(-4\pi imtx_2)dt$$

と定義する. このとき, $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = f$ であることに注意する.

$(R(\sigma)f)(x)=f((x_1,x_2)\sigma)$ とすると, 任意の $\sigma\in SL_2(\mathbb{R})$ に対して

$$r(\sigma)f=\mathcal{F}R(\sigma)\mathcal{F}^{-1}f$$

が成り立つ.

次の補題は [9, p.195] による.

**補題 6.19.** $H_\epsilon$ を (6.14) のものとすると,

$$H_\epsilon(x)=2^{-\epsilon/2}\sum_{k=0}^{[\frac{\epsilon}{2}]}\frac{(-1)^k\epsilon!}{k!(\epsilon-2k)!}(\sqrt{2}x)^{\epsilon-2k} \tag{6.20}$$

が成り立つ.

補題 6.19 より次の補題が成り立つ.

**補題 6.21.**

$$g_\epsilon(x_1,x_2)=(\sqrt{4\pi m})^\epsilon(x_1+ix_2)^\epsilon\exp\left(-2m\pi\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)$$

とし, $f_{2,\epsilon}=\mathcal{F}g_\epsilon$ とすると

$$f_{2,\epsilon}(x_1,x_2)=H_\epsilon\left(\sqrt{4\pi m}(x_1-x_2)\right)\exp\left(-2m\pi\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)$$

となる.

証明. $f_{2,\epsilon}=\mathcal{F}g_\epsilon$ より

$$\begin{aligned}
&f_{2,\epsilon}(x_1,x_2)\\
&=\sqrt{2m}\int_{-\infty}^{\infty}g_\epsilon(x_1,t)\exp(4\pi imtx_2)dt\\
&=\sqrt{2m}\,(\sqrt{4\pi m})^\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}(x_1+it)^\epsilon\exp\left(-2m\pi(x_1^2+t^2)\right)\exp(4\pi imtx_2)dt\\
&=\sqrt{2m}\,(\sqrt{4\pi m})^\epsilon\exp\left(-2m\pi(x_1^2+x_2^2)\right)\int_{-\infty}^{\infty}(x_1+it)^\epsilon\exp\left(-2m\pi(t-ix_2)^2\right)dt\\
&=\sqrt{2m}\,(\sqrt{4\pi m})^\epsilon\exp\left(-2m\pi(x_1^2+x_2^2)\right)\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-x_2+it)^\epsilon\exp(-2m\pi t^2)dt\\
&=\sqrt{2m}\,(\sqrt{4\pi m})^\epsilon\exp\left(-2m\pi(x_1^2+x_2^2)\right)\\
&\qquad\times\sum_{k=0}^{\epsilon}\binom{\epsilon}{k}(x_1-x_2)^{\epsilon-k}\,i^k\int_{-\infty}^{\infty}t^k\exp(-2m\pi t^2)dt
\end{aligned}$$

となる.

ここで, 部分積分を繰り返すことにより

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \exp(-2m\pi t^2)dt = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2m}} & (k=0) \\ 0 & (k\text{ は奇数}) \\ \dfrac{(k-1)!!}{\sqrt{2m}\,(4m\pi)^{k/2}} & (k\text{ は偶数}) \end{cases}$$

がわかる. したがって補題 6.19 より

$$\begin{aligned} & f_{2,\epsilon}(x_1,x_2) \\ &= \sqrt{2m}\,(\sqrt{4\pi m})^{\epsilon} \exp\left(-2m\pi(x_1^2+x_2^2)\right) \sum_{k=0}^{[\frac{\epsilon}{2}]} \binom{\epsilon}{2k} (x_1-x_2)^{\epsilon-2k} i^{2k} \frac{(2k-1)!!}{\sqrt{2m}\,(4m\pi)^k} \\ &= \exp\left(-2m\pi(x_1^2+x_2^2)\right) \sum_{k=0}^{[\frac{\epsilon}{2}]} \frac{(-1)^k \epsilon!}{2^k(\epsilon-2k)!k!} \left(\sqrt{4\pi m}(x_1-x_2)\right)^{\epsilon-2k} \\ &= H_{\epsilon}\left(\sqrt{4\pi m}(x_1-x_2)\right) \exp\left(-2m\pi\left(x_1^2+x_2^2\right)\right) \end{aligned}$$

が成り立つ. □

$$\begin{aligned} (R(k(\theta))g_{\epsilon})(x) &= g_{\epsilon}(x_1\cos\theta - x_2\sin\theta, x_1\sin\theta + x_2\cos\theta) \\ &= (\sqrt{4\pi m})^{\epsilon}\{e^{i\theta}(x_1+ix_2)\}^{\epsilon} \exp\left(-2m\pi(x_1^2+x_2^2)\right) \\ &= e^{i\epsilon\theta} g_{\epsilon}(x) \end{aligned}$$

となるので

$$r(k(\theta))f_{2,\epsilon} = e^{i\epsilon\theta} f_{2,\epsilon}$$

を満たす.

$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f_\eta$ を $f_\eta(x_1,x_2) = f_{2,\epsilon}(\eta^{-1}x_1, \eta x_2)$, $m = 2/N$, $\theta_{2,\epsilon}(z,\eta) = \theta_{2,\epsilon}(z, f_\eta)$ と定義する. $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ とすると,

$$\begin{aligned} \theta_{2,\epsilon}(z,\eta) &= \sum_{h\in L'/L} \overline{\chi}_1(h_1)\theta(z,f_\eta,h) \\ &= \sum_{h\in L'/L} \overline{\chi}_1(h_1) v^{-\epsilon/2}\theta(r_0(\sigma_z)f_\eta,h) \\ &= \sum_{h\in L'/L} \overline{\chi}_1(h_1) v^{-\epsilon/2} \sum_{x\in L} r_0(\sigma_z)f_\eta(h+x) \\ &= \sum_{h\in L'} \overline{\chi}_1(h_1) v^{-\epsilon/2} r_0(\sigma_z)f_\eta(h). \end{aligned}$$

$h$ を $x$ に置き換えると上の計算は,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x\in L'} \overline{\chi}_1(x_1) v^{1/2-\epsilon/2} \exp\left\{\frac{2\pi i u\cdot(-4/N)2x_1x_2}{2}\right\} f_\eta(\sqrt{v}x) \\
&= v^{(1-\epsilon)/2} \sum_{x_1,x_2\in\mathbb{Z}} \overline{\chi}_1(x_1) \exp\left(-2\pi i u x_1 x_2 - \frac{Nv}{4}\eta^2\pi x_2^2 - \frac{4v}{N}\eta^{-2}\pi x_1^2\right) \\
&\times H_\epsilon\left(2\sqrt{\frac{2}{N}\pi v}\left(\eta^{-1}x_1 - \frac{N\eta}{4}x_2\right)\right)
\end{aligned} \tag{6.22}
$$

となる.

また次の補題が成り立つ.

**補題 6.23.**

$$
f(x_1,x_2) = (x_1\overline{z}+x_2)^\epsilon \exp\left(-\frac{4\pi}{N\eta^2 v}|x_1 z + x_2|^2\right)
$$

とする. $x_2$ についてフーリエ逆変換を $\check{f}(x_1,x_2)$ と書く. このとき

$$
\begin{aligned}
&\check{f}(x_1,x_2) \\
&= \left(\sqrt{\frac{8\pi}{N}}\right)^{-\epsilon-1} \sqrt{2\pi}\, i^{-\epsilon}\eta^{\epsilon+1} v^{(1+\epsilon)/2} \\
&\times \exp\left(-2\pi i u x_1 x_2 - \frac{Nv}{4}\eta^2\pi x_2^2 - \frac{4v}{N}\eta^{-2}\pi x_1^2\right) H_\epsilon\left(2\sqrt{\frac{2}{N}\pi v}\left(\eta^{-1}x_1 - \frac{N\eta}{4}x_2\right)\right)
\end{aligned}
$$

となる.

証明. $\check{f}(x_1,x_2)$ を計算すると,

$$
\begin{aligned}
&\check{f}(x_1,x_2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x_1\overline{z}+t)^\epsilon \exp\left(-\frac{4\pi}{N\eta^2 v}|x_1 z + t|^2\right)\exp(2\pi i x_2 t)dt \\
&= \exp\left(-2\pi i u x_1 x_2 - \frac{Nv}{4}\eta^2\pi x_2^2 - \frac{4v}{N}\eta^{-2}\pi x_1^2\right) \\
&\qquad \times \int_{-\infty}^{\infty} (x_1\overline{z}+t)^\epsilon \exp\left\{-\frac{4\pi}{N\eta^2 v}\left(t + \frac{4ux_1 - N\eta^2 v i x_2}{4}\right)^2\right\} dt \\
&= \exp\left(-2\pi i u x_1 x_2 - \frac{Nv}{4}\eta^2\pi x_2^2 - \frac{4v}{N}\eta^{-2}\pi x_1^2\right) \\
&\qquad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left(-vix_1 + \frac{N}{4}\eta^2 v i x_2 + t\right)^\epsilon \exp\left(-\frac{4\pi}{N\eta^2 v}t^2\right) dt
\end{aligned}
$$

となる．ここで補題 6.19 の証明と同様に, 部分積分を繰り返すと

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\left(-vix_1+\frac{N}{4}\eta^2vix_2+t\right)^{\epsilon}\exp\left(-\frac{4\pi}{N\eta^2v}t^2\right)dt\\
&=i^{-\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\left(vx_1-\frac{N}{4}\eta^2vx_2+it\right)^{\epsilon}\exp\left(-\frac{4\pi}{N\eta^2v}t^2\right)dt\\
&=i^{-\epsilon}\sum_{k=0}^{\epsilon}\binom{\epsilon}{k}\left(vx_1-\frac{N}{4}\eta^2vx_2\right)^{\epsilon-k}i^k\int_{-\infty}^{\infty}t^k\exp\left(-\frac{4\pi}{N\eta^2v}t^2\right)dt\\
&=\left(\sqrt{\frac{8\pi}{N}}\right)^{-\epsilon-1}\sqrt{2\pi}\,i^{-\epsilon}\eta^{\epsilon+1}v^{(1+\epsilon)/2}\\
&\times\exp\left(-2\pi iux_1x_2-\frac{Nv}{4}\eta^2\pi x_2^2-\frac{4v}{N}\eta^{-2}\pi x_1^2\right)H_\epsilon\left(2\sqrt{\frac{2}{N}\pi v}\left(\eta^{-1}x_1-\frac{N\eta}{4}x_2\right)\right)
\end{aligned}$$

である． □

補題 6.23 と Poisson 和公式 (命題 3.39) より

$$\begin{aligned}
\theta_{2,\epsilon}(z,\eta)=&\left(\sqrt{\frac{8\pi}{N}}\right)^{\epsilon+1}(\sqrt{2\pi})^{-1}i^{\epsilon}\eta^{-\epsilon-1}v^{-\epsilon}\\
&\times\sum_{x_1,x_2\in\mathbb{Z}}\overline{\chi}_1(x_1)(x_1\overline{z}+x_2)^{\epsilon}\exp\left(-\frac{4\pi}{N\eta^2v}|x_1z+x_2|^2\right)
\end{aligned}\tag{6.24}$$

も成り立つ．これで準備 2 を終わる．

**準備 3.** 準備 1,2 を用いて, $r(k(\theta))f=(\cos\theta+i\sin\theta)^{\kappa/2}f$ を満たす関数 $\mathbb{R}^3$ 上の関数 $f$ を見つける．

$V_i\,(i=1,2,3)$ をベクトル空間とし, $V_i$ における Weil 表現, 格子等を $r_0^{(i)}$, $r^{(i)}$, $L_i$, $L_i^*$, $h_i\in L_i^*$, $c_i(h_i,k_i)_\gamma$ とする．$V_3=V_1\oplus V_2$ のとき, $r_0^{(3)}=r_0^{(1)}\otimes r_0^{(2)}$, $r^{(3)}=r^{(1)}\otimes r^{(2)}$ である．また, $h_3=(h_1,h_2), k_3=(k_1,k_2)$ に対して $c_3(h_3,k_3)_\gamma=c_1(h_1,k_1)_\gamma c_2(h_2,k_2)_\gamma$ である．

$n=3$, $Q=\dfrac{2}{N}\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&1&0\\-2&0&0\end{pmatrix}$, $L=4N\mathbb{Z}\oplus N\mathbb{Z}\oplus(N\mathbb{Z}/4)$ とする．準備 1,2 より $f\in L^2(\mathbb{R}^3)$, $\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(4N)$, $h,k\in L'/L$, $L'=\mathbb{Z}\oplus N\mathbb{Z}\oplus(N\mathbb{Z}/4)$ に対して

$$c(h,k)_\gamma=\delta_{k,ah}(\sqrt{i})^{\mathrm{sgn}(c)}j(\gamma,z)(cz+d)^{-1/2}\left(\frac{N}{d}\right)$$

が成り立つ．

$f$ が $r(k(\theta))f = (\cos\theta + \sin\theta)^{\kappa/2} f$ を満たすとき

$$\theta_\kappa(z, f) = \sum_{h \in L'/L} \overline{\chi}_1(h)\theta(z, f, h)$$

とおく. ただし, $h = (h_1, h_2, h_3)$, $\kappa = 2\lambda + 1$, $\overline{\chi}_1(h) = \overline{\chi}_1(h_1)$ である.

(5.6) の $\theta(z, g)$ に関して次の変換公式が得られることがわかる.

**命題 6.25.** 任意の $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4N)$ に対して,

$$\theta(\gamma z, g) = \overline{\chi}(d) \left(\frac{N}{d}\right) j(\gamma, z)^\kappa \theta(z, g)$$

が成り立つ.

証明. 系 6.4 より

$$\theta(\gamma z, f, h) = \left(\frac{N}{d}\right) j(\gamma, z)(cz + d)^\lambda \theta(z, f, ah)$$

であり, $ad \equiv 1 \mod 4N$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\theta_\kappa(\gamma z, f) &= \sum_{h \in L'/L} \overline{\chi}_1(h)\theta(\gamma z, f, h) \\
&= \sum_{h \in L'/L} \overline{\chi}_1(d)\overline{\chi}_1(ah) \left(\frac{N}{d}\right) j(\gamma, z)(cz + d)^\lambda \theta(z, f, ah) \\
&= \overline{\chi}_1(d) \left(\frac{N}{d}\right) j(\gamma, z)(cz + d)^\lambda \theta_\kappa(z, f)
\end{aligned}$$

が得られる.

$r(k(\theta))f = (\cos\theta + i\sin\theta)^{\kappa/2} f$ を満たす $f(x_1, x_2, x_3)$ として $f_{1,\epsilon}(x_2) f_{2,\lambda-\epsilon}(x_1, x_3)$ $(\epsilon = 1, \ldots, \lambda)$ の任意の一次結合がとれる.

$$\begin{aligned}
f_{1,\epsilon}(x_2) &= H_\epsilon\left(2\sqrt{\pi m} x\right) \exp(-\pi m x_2^2), \\
f_{2,\epsilon}(x_1, x_3) &= H_\epsilon\left(\sqrt{4\pi m}(x_1 - x_3)\right) \exp\left(-2m\pi(x_1^2 + x_3^2)\right)
\end{aligned}$$

であったので

$$\begin{aligned}
f_3(x) = \left(\sqrt{4\pi m}\right)^{-\lambda} \sum_{\epsilon=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\epsilon} H_\epsilon\left(\sqrt{4\pi m} x_2\right) H_{\lambda-\epsilon}\left(\sqrt{4\pi m}(x_1 - x_3)\right)(-i)^\epsilon \\
\times \exp\left(-m\pi(2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2)\right)
\end{aligned}$$

とすると $r(k(\theta))f_3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^{\kappa/2} f_3$ を満たす.

$$(x - iy)^\lambda = \sum_{\epsilon=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\epsilon} H_{\lambda-\epsilon}(x) H_\epsilon(y)(-i)^\epsilon \tag{6.26}$$

が成り立つので

$$f_3(x) = (x_1 - ix_2 - x_3)^{\lambda} \exp\left(-m\pi(2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2)\right)$$

となる.

$g \in SL_2(\mathbb{R})$ に対して $L^2(\mathbb{R}^3)$ への作用を $(gf)(x) = f(g^{-1}x)$ と定める. $f_3$ において $m = 2/N$ とおくと (5.3) の $f$ と一致する. また

$$\begin{aligned}
\theta_\kappa(z, gf_3) &= \sum_{h \in L'/L} \overline{\chi}_1(h)\theta(z, gf_3, h) \\
&= \sum_{h \in L'/L} \overline{\chi}_1(h) v^{-\kappa/4} \theta(r_0(\sigma_z) gf_3, h) \\
&= \sum_{h \in L'/L} \overline{\chi}_1(h) v^{-\kappa/4} \sum_{x \in L} v^{3/4} \exp\left\{\frac{2\pi i u}{N}(x_2^2 - 4x_1x_3)\right\} f_3(\sqrt{v} g^{-1}(h + x)) \\
&= \sum_{x \in L'} \overline{\chi}_1(x) v^{(3-\kappa)/4} \exp\left\{\frac{2\pi i u}{N}(x_2^2 - 4x_1x_3)\right\} f_3(\sqrt{v} g^{-1}x) \\
&= \theta(z, g)
\end{aligned}$$

となることから,

$$\begin{aligned}
\theta(\gamma z, g) &= \theta_\kappa(\gamma z, gf_3) \\
&= \overline{\chi}_1(d) \left(\frac{N}{d}\right) j(\gamma, z)(cz + d)^{\lambda} \theta_\kappa(z, gf_3) \\
&= \overline{\chi}(d) \left(\frac{N}{d}\right) j(\gamma, z)^{\kappa} \theta_\kappa(z, gf_3) \\
&= \overline{\chi}(d) \left(\frac{N}{d}\right) j(\gamma, z)^{\kappa} \theta(z, g)
\end{aligned}$$

がわかる. □

また, 定義 6.1, (5.5) から明らかなように, $r_0(k(\theta))$ は $g$ による作用と可換であるから

$$r(k(\theta))(gf_3) = (\cos\theta + i \sin\theta)^{\kappa/2}(gf_3)$$

が成り立つ.

**注 6.27.** $k(\theta)x = (x_1', x_2', x_3')$ とすると

$$\begin{cases}
x_1' &= x_1 \cos^2\theta + x_2 \sin\theta\cos\theta + x_3 \sin^2\theta, \\
x_2' &= -2x_1 \sin\theta\cos\theta + x_2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2x_3 \sin\theta\cos\theta, \\
x_3' &= x_1 \sin^2\theta - x_2 \sin\theta\cos\theta + x_3 \cos^2\theta
\end{cases}$$

であるから，これを代入することにより $f_3(k(\theta)x) = e^{2\lambda i\theta} f_3(x)$ が成り立つことがわかる．また

$$
\begin{aligned}
\theta(z, gk(\theta)) &= \theta_\kappa(z, gk(\theta) f_3) \\
&= \sum_{h \in L'/L} \overline{\chi}_1(h) \theta(z, gk(\theta) f_3, h) \\
&= \sum_{h \in L'/L} \overline{\chi}_1(h) v^{-\kappa/4} \theta(r_0(\sigma_z) gk(\theta) f_3, h) \\
&= \sum_{h \in L'/L} \overline{\chi}_1(h) v^{-\kappa/4} \sum_{x \in L} e^{-2\lambda i\theta} r_0(\sigma_z) g f_3(x+h) \\
&= e^{-2\lambda i\theta} \theta(z, g)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

# 7　定理 5.8 の証明

この章では定理 5.8 の証明を行う．以下，$u, v, \xi, \eta \in \mathbb{R}$，$z = u + iv, w = \xi + i\eta$ とする．$F(z) \in S_{\kappa/2}\left(4N, \overline{\chi}\left(\frac{N}{*}\right)\right)$ とする．

$$
\Psi(w) = (4\eta)^{-\lambda} \int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathbb{H}} v^{\kappa/2} \overline{\theta}(z, \sigma_{4w}) F(z) \frac{dudv}{v^2} \tag{7.1}
$$

とする．ただし，$\theta(z, g)$ は (5.6) のものとする．(7.1) の積分は $F(z) \in S_{\kappa/2}\left(4N, \overline{\chi}\left(\frac{N}{*}\right)\right)$ であることから well-defined である．定理の記号と同様に

$$
\Phi(w) = \Psi\left(-\frac{1}{2Nw}\right)(2N)^\lambda(-2Nw)^{-2\lambda}
$$

とおく．

まず $\Phi(w)$ の保型性について述べる．

**命題 7.2.** 任意の $\gamma = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2N)$ に対して

$$
\Psi(\gamma w) = \overline{\chi}^2(d')(c'w + d')^{2\lambda} \Psi(w) \tag{7.3}
$$

が成り立つ．

*証明*. $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$，$x = (x_1, x_2, x_3)$ に対して $gx = (x_1', x_2', x_3')$ は

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2/2 \\ x_2/2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' & x_2'/2 \\ x_2'/2 & x_3' \end{pmatrix}
$$

で与えられるので,

$$\begin{cases} x_1' &= a^2x_1 + abx_2 + b^2x_3, \\ x_2' &= 2cax_1 + (ad+cb)x_2 + 2bdx_3, \\ x_3' &= c^2x_1 + cdx_2 + d^2x_3 \end{cases}$$

である. このことから

$$\tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Gamma_0(2N) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

とすると, $\tilde{\gamma}$ は $L = 4N\mathbb{Z} \oplus N\mathbb{Z} \oplus (N\mathbb{Z}/4), L' = \mathbb{Z} \oplus N\mathbb{Z} \oplus (N\mathbb{Z}/4)$ を固定する. また, $x = (x_1, x_2, x_3) \in L'$, $\tilde{\gamma}x = (x_1', x_2', x_3')$ に対して $x_1' \equiv a^2x_1 \mod 4N$ である. $d$ は奇数であることに注意すると

$$\begin{aligned} \chi_1(d^2) &= \chi(d^2)\left(\frac{-1}{d^2}\right) \\ &= \chi^2(d) \end{aligned}$$

である.

$\tilde{\gamma}^{-1}x = x' = (x_1', x_2', x_3')$ とおくと, $\widetilde{\gamma}^{-1}$ の $(1, 1)$ 成分は $d$ であることから $\overline{\chi}_1(d^2x_1) = \overline{\chi}_1(x_1')$ である. さらに $x_2^2 - 4x_1x_3 = {x_2'}^2 - 4x_1'x_3'$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} \theta(z, \tilde{\gamma}g) &= \sum_{x \in L'} \overline{\chi}_1(x_1) v^{(3-\kappa)/4} \exp\left\{\frac{2\pi i u}{N}(x_2^2 - 4x_1x_3)\right\} f(\sqrt{v}g^{-1}\tilde{\gamma}^{-1}x) \\ &= \sum_{x' \in L'} \chi_1(d^2)\overline{\chi}_1(d^2x_1) v^{(3-\kappa)/4} \exp\left\{\frac{2\pi i u}{N}({x_2'}^2 - 4x_1'x_3')\right\} f(\sqrt{v}g^{-1}x') \\ &= \chi_1(d^2)\theta(z, g) \\ &= \chi^2(d)\theta(z, g) \end{aligned} \tag{7.4}$$

である. さらに $\gamma = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2N)$ に対して $e^{i\theta} = (c'w + d')/|c'w + d'|$ とする. $\sigma_{4w} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \sigma_w$ であることに注意すると, 補題 6.6 より

$$\sigma_{4\gamma w} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^{1/2} & \xi\eta^{-1/2} \\ 0 & \eta^{-1/2} \end{pmatrix} k(\theta)$$

となる. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ の $(2, 2)$ 成分は $d'$ であることから (7.4), 注意 6.27 より

$$\theta(z, \sigma_{4\gamma w}) = \chi^2(d')e^{-2\lambda i\theta}\theta(z, \sigma_{4w})$$

となるので,

$$\begin{aligned}\Psi(\gamma w) &= \left(\frac{4\eta}{|c'w+d'|^2}\right)^{-\lambda}\int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathbb{H}} v^{\kappa/2}\overline{\theta}(z,\sigma_{4\gamma w})F(z)\frac{dudv}{v^2}\\ &= \overline{\chi}^2(d')(c'w+d')^{2\lambda}\Psi(w)\end{aligned}$$

が成り立つ. □

したがって, もし $\Psi$ または $\Phi$ が $\mathbb{H}$ で正則で, 全てのカスプで零点を持つなら $\Psi \in S_{\kappa-1}(2N,\overline{\chi}^2)$ が成り立つ. さらに命題 3.17 より $\Phi \in S_{\kappa-1}(2N,\chi^2)$ となる.

正則性については後に証明することにし, 先に $\Phi(w)$ のフーリエ級数展開の係数を求める. そのために $\Phi(i\eta)$ の Mellin 変換 $\Omega(s)$ を考え, Mellin 変換の反転公式 (3.35) を用いることで係数を計算する.

$G(z) = F(-1/4Nz)(4N)^{-\kappa/4}(-iz)^{-\kappa/2}$ とするとき

$$\begin{aligned}G(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} a(k)\exp(2\pi ikz),\\ D(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} a(k^2)k^{-s}\end{aligned}$$

と定義する.

**命題 7.5.** $C = (-1)^{\lambda}2^{(-4\lambda+5)/2}N^{\kappa/2}$ としたとき

$$\Omega(s) = C(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s-\lambda+1,\chi_1)D(s) \tag{7.6}$$

となる.

証明. まず $\eta \to 0,\infty$ のときの $\Phi(i\eta)$ の増大度について確認し, $\Omega(s)$ が収束することを示す.

$$F_\epsilon(z,\eta) = \sum{}' |x_1z+x_2|^{\lambda-\epsilon}\exp\left(-\frac{4\pi}{N\eta^2 v}|x_1z+x_2|^2\right)$$

とする. ただし, $\sum'$ は $(0,0) \neq (x_1,x_2) \in \mathbb{Z}^2$ となる $(x_1,x_2)$ 全体をわたる和とする. $\beta$ を $\beta \geqq (\lambda-\epsilon)/2$ となる最小の整数とする. このとき [5, p.463] と同様の議論により $v > c > 0, \quad c < \sqrt{3}/2$ となる定数 $c$ に対し

$$F_\epsilon(z,\eta) \leqq \begin{cases} lv^{\beta+1}e^{-\pi h/v\eta^2}, & \eta < 1,\\ l'\eta^{2(\lambda-\epsilon+1)}v^{\beta+1}e^{-\pi\eta^2 h/v}, & \eta > 1\end{cases}$$

となる. ただし $l, l', h, h'$ は $\epsilon, c$ にのみ依存する正の定数である.

$U = \{z = u+iv \in \mathbb{H} \mid |u| \leqq \frac{1}{2}, |z| \geqq 1\}$, $\mathcal{D}$ を $\Gamma_0(4N)$ による $\mathbb{H}$ の基本領域とする. このとき $\gamma_i \in SL_2(\mathbb{Z})$ を $\bigcup_{i=1}^{k}\gamma_i U = \mathcal{D}$ となるように選ぶことができる.

$$T(z) = v^{\kappa/2}\overline{\theta}_{1,\epsilon}(z)F(z)$$

とおくと, 各 $i$ に対し急減少関数 $g_i$ が存在し $T(\gamma_i z) = O(g_i(v))$ $(z \in U)$ が成り立つ.

$$F'_\epsilon(z,\eta) = \eta^{-\lambda+\epsilon-1} v^{-\lambda+\epsilon} F_\epsilon(z,\eta)$$

とおく. $\eta > 1$ に対しある定数 $c_i, e_i, \nu_i, \alpha$ により

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathbb{H}} |T(z)\overline{\theta}_{2,\lambda-\epsilon}(z,\eta^{-1})| d_0 z &\leqq \sum_{i=1}^{k} c_i \int_U |T(\gamma_i z) F'_\epsilon(\gamma_i z, \eta^{-1})| d_0 z \\ &\leqq \sum_{i=1}^{k} e_i \int_c^\infty v^{\nu_i} \eta^\alpha g_i(v) \exp(-\pi\eta^2 h v^{-1}) dv\end{aligned}$$

とできる.

$\mu > 0$ のとき定数 $C_\mu$ があり

$$\eta^{2\mu} v^{-\mu} \exp(-\pi\eta^2 h v^{-1}) < C_\mu$$

とできる. さらに定数 $C'_\mu$ があり

$$\eta^{2\mu-\alpha} \int_c^\infty v^{\nu_i} \eta^\alpha g_i(v) \exp(-\pi\eta^2 h v^{-1}) dv < C_\mu \int_c^\infty v^{\nu_i+\mu} g_i(v) dv = C'_\mu$$

とできる. したがって $\eta > 1$ のとき任意の $\mu > 0$ に対し

$$\int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathbb{H}} |T(z)\overline{\theta}_{2,\lambda-\epsilon}(z,\eta^{-1})| d_0 z = O(\eta^{-\mu}) \tag{7.7}$$

となる. 同様に $\mu > 0$, $\eta < 1$ に対し

$$\int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathbb{H}} |T(z)\overline{\theta}_{2,\lambda-\epsilon}(z,\eta^{-1})| d_0 z = O(\eta^{\mu}) \tag{7.8}$$

となる. ゆえに $\Omega(s)$ は収束する.

$d_0 z = \dfrac{du dv}{v^2}$ として, $\Omega(s)$ の計算をすると

$$\begin{aligned}\Omega(s) &= \int_0^\infty \Phi(i\eta)\eta^s d^\times\eta \\ &= (2N)^\lambda (-2N)^{-2\lambda} \int_0^\infty \Psi\left(-\frac{1}{2Ni\eta}\right)(i\eta)^{-2\lambda}\eta^s d^\times\eta \\ &= (-1)^\lambda (2N)^{-\lambda} \int_0^\infty \Psi\left(\frac{i}{2N\eta}\right)\eta^{s-2\lambda} d^\times\eta \\ &= (-1)^\lambda (2N)^{-\lambda}(2N)^{-s+2\lambda} \int_0^\infty \Psi\left(\frac{i}{\eta}\right)\eta^{s-2\lambda} d^\times\eta \\ &= (-1)^\lambda (2N)^{\lambda-s} \int_0^\infty \eta^{s-2\lambda}\left(\frac{4}{\eta}\right)^{-\lambda} \int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathbb{H}} v^{\kappa/2}\overline{\theta}(z,\sigma_{4i\eta^{-1}})F(z) d_0 z d^\times\eta \\ &= (-1)^\lambda (2N)^{\lambda-s} 4^{-\lambda} \int_0^\infty \eta^{s-\lambda} \int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathbb{H}} v^{\kappa/2}\overline{\theta}(z,\sigma_{4i\eta^{-1}})F(z) d_0 z d^\times\eta\end{aligned} \tag{7.9}$$

となる. (5.3), 定義 5.7, (6.15), (6.22), (6.26) より

(7.10)

$$
\begin{aligned}
\theta(z,\sigma_{i\eta}) &= \sum_{x\in L'} \overline{\chi}_1(x_1) v^{(3-\kappa)/4} \exp\left\{\frac{2\pi i u(x_2^2-4x_1x_3)}{N}\right\} f(\sqrt{v}\sigma_{i\eta}^{-1}x) \\
&= \sum_{x\in L'} \overline{\chi}_1(x_1) v^{(3-\kappa)/4} \exp\left\{\frac{2\pi i u(x_2^2-4x_1x_3)}{N}\right\} (\sqrt{v}\eta^{-1}x_1 - i\sqrt{v}x_2 - \sqrt{v}\eta x_3)^{\lambda} \\
&\qquad \times \exp\left\{-\frac{2\pi v(2\eta^{-2}x_1^2 + x_2^2 + 2\eta^2 x_3^2)}{N}\right\} \\
&= \left(2\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\right)^{-\lambda} \sum_{x\in L'} \overline{\chi}_1(x_1) v^{(1-\lambda)/2} \\
&\times \sum_{\epsilon=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\epsilon} H_{\lambda-\epsilon}\left(2\sqrt{\frac{2\pi v}{N}}(\eta^{-1}x_1 - \eta x_3)\right) H_{\epsilon}\left(2\sqrt{\frac{2\pi v}{N}}x_2\right)(-i)^{\epsilon} \\
&\qquad \times \exp\left(\frac{2\pi i z x_2^2}{N}\right) \exp\left\{-\frac{2\pi i u\cdot 4x_1x_3}{N} - \frac{2\pi v(2\eta^{-2}x_1^2 + 2\eta^2 x_3^2)}{N}\right\} \\
&= \left(2\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\right)^{-\lambda} \sum_{x_1,x_2,x_3\in\mathbb{Z}} \overline{\chi}_1(x_1) v^{(-\epsilon+1-\lambda+\epsilon)/2} \\
&\qquad \times \sum_{\epsilon=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\epsilon} H_{\lambda-\epsilon}\left(2\sqrt{\frac{2\pi v}{N}}\left(\eta^{-1}x_1 - \frac{N\eta}{4}x_3\right)\right) H_{\epsilon}(2\sqrt{2\pi N v}x_2)(-i)^{\epsilon} \\
&\qquad \times \exp(2\pi i N z x_2^2) \exp\left\{-2\pi i u x_1 x_3 - \frac{Nv}{4}\pi x_3^2\eta^2 - \frac{4v}{N}\pi x_1^2\eta^{-2}\right\} \\
&= \left(2\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\right)^{-\lambda} \sum_{\epsilon=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\epsilon} (-i)^{\epsilon}\theta_{2,\lambda-\epsilon}(z,\eta)\theta_{1,\epsilon}(z)
\end{aligned}
$$

を得る.

$c_1(s) = (-1)^{\lambda}(2N)^{\lambda-s}4^{s-2\lambda}(2\sqrt{2\pi/N})^{-\lambda}$ とし, (7.9) の積分の順序交換ができるこ

とに注意すると, (7.9), (7.10) より

(7.11)

$$
\begin{aligned}
\Omega(s) &= c_1(s)4^{-s+\lambda}\int_0^\infty \eta^{s-\lambda} \\
&\quad\times\left(\int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathbb{H}} v^{\kappa/2}\sum_{\epsilon=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\epsilon}\overline{(-i)}^{\epsilon}\overline{\theta}_{2,\lambda-\epsilon}(z,4\eta^{-1})\overline{\theta}_{1,\epsilon}(z)F(z)d_0z\right)d^\times\eta \\
&= c_1(s)4^{-s+\lambda}\sum_{\epsilon=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\epsilon}i^\epsilon \\
&\quad\times\int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathbb{H}} v^{\kappa/2}F(z)\overline{\theta}_{1,\epsilon}(z)\left(\int_0^\infty \overline{\theta}_{2,\lambda-\epsilon}(z,4\eta^{-1})\eta^{s-\lambda}d^\times\eta\right)d_0z \\
&= c_1(s)\sum_{\epsilon=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\epsilon}i^\epsilon\int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathbb{H}} v^{\kappa/2}F(z)\overline{\theta}_{1,\epsilon}(z)\left(\int_0^\infty \overline{\theta}_{2,\lambda-\epsilon}(z,\eta^{-1})\eta^{s-\lambda}d^\times\eta\right)d_0z
\end{aligned}
$$

が成り立つ. また (6.24) より

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \overline{\theta}_{2,\lambda-\epsilon}(z,\eta^{-1})\eta^{s-\lambda}d^\times\eta \\
&= \int_0^\infty \left(\sqrt{\frac{8\pi}{N}}\right)^{\lambda-\epsilon+1}\sqrt{2\pi}^{-1}(-i)^{\lambda-\epsilon}\eta^{\lambda-\epsilon+1}v^{-\lambda+\epsilon}\sum_{x_1,x_2\in\mathbb{Z}}\chi_1(x_1)(x_1z+x_2)^{\lambda-\epsilon} \\
&\qquad\times\exp\left(-\frac{4\pi}{Nv}\eta^2|x_1z+x_2|^2\right)\eta^{s-\lambda}d^\times\eta \\
&= \left(\sqrt{\frac{8\pi}{N}}\right)^{\lambda-\epsilon+1}\sqrt{2\pi}^{-1}(-i)^{\lambda-\epsilon}v^{-\lambda+\epsilon}\sum_{x_1,x_2\in\mathbb{Z}}\chi_1(x_1)(x_1z+x_2)^{\lambda-\epsilon} \qquad (7.12)\\
&\qquad\times\int_0^\infty \eta^{s-\epsilon+1}\exp\left(-\frac{4\pi}{Nv}\eta^2|x_1z+x_2|^2\right)d^\times\eta \\
&= \left(\sqrt{\frac{8\pi}{N}}\right)^{\lambda-\epsilon+1}\sqrt{2\pi}^{-1}(-i)^{\lambda-\epsilon}v^{-\lambda+\epsilon}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{Nv}{4\pi}\right)^{(s-\epsilon+1)/2} \\
&\qquad\times\Gamma\left(\frac{s-\epsilon+1}{2}\right)\sum_{x_1,x_2\in\mathbb{Z}}\chi_1(x_1)(x_1z+x_2)^{\lambda-\epsilon}|x_1z+x_2|^{-s+\epsilon-1}
\end{aligned}
$$

となる.

変数変換 $z\mapsto -1/4Nz$ をする.

$$
\begin{aligned}
I_\epsilon(s) = \int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathbb{H}} & G(z)\overline{\theta}_\epsilon(z)v^{(s+\epsilon+2)/2}\pi^{-(s-\epsilon+1)/2}\Gamma\left(\frac{s-\epsilon+1}{2}\right) \\
&\times\sum_{x_1,x_2\in\mathbb{Z}}\chi_1(x_1)(4Nx_2z+x_1)^{\lambda-\epsilon}|4Nx_2z+x_1|^{-s+\epsilon-1}d_0z
\end{aligned}
$$

とすると (7.11), (7.12), 命題 6.17(ii) より

$$\begin{aligned}\Omega(s) &= c_1(s)\sum_{\epsilon=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\epsilon} i^{\epsilon}\left(\sqrt{\frac{8\pi}{N}}\right)^{\lambda-\epsilon+1}\sqrt{2\pi}^{-1}(-i)^{\lambda-\epsilon}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{N}{4}\right)^{(s-\epsilon+1)/2}\\ &\quad\times\int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathbb{H}} F(z)\overline{\theta}_{1,\epsilon}(z)v^{\kappa/2}v^{-\lambda+\epsilon}v^{(s-\epsilon+1)/2}\pi^{-(s-\epsilon+1)/2}\Gamma\left(\frac{s-\epsilon+1}{2}\right)\\ &\quad\quad\times\sum_{x_1,x_2\in\mathbb{Z}}\chi_1(x_1)(x_1z+x_2)^{\lambda-\epsilon}|x_1z+x_2|^{-s+\epsilon-1}d_0z\\ &=\sum_{\epsilon=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\epsilon}(-1)^{\lambda}2^{(2s-6\lambda+1)/2}N^{\kappa/2}\pi^{-\epsilon/2}I_{\epsilon}(z)\end{aligned}$$

となる. [1, p.61, Theorem 1.10] より $\gamma\in\Gamma_0(4N)$ に対して

$$\theta_{\epsilon}(\gamma z)=\left(\frac{-1}{d}\right)^{\epsilon}j(\gamma,z)^{2\epsilon+1}\theta_{\epsilon}(z)$$

が成り立つので $R$ を $\Gamma_{\infty}\backslash\Gamma_0(4N)$ の代表元全体の集合, $B(z)=G(z)\overline{\theta}_{\epsilon}(z)v^{(s+\epsilon+2)/2}$ とすると [5, p.467] と同様の議論により

$$\begin{aligned}I_{\epsilon}(s) &= \pi^{-(s-\epsilon+1)/2}\Gamma\left(\frac{s-\epsilon+1}{2}\right)L(s-\lambda+1,\chi_1)\int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathbb{H}} G(z)\overline{\theta}_{\epsilon}(z)v^{(s+\epsilon+2)/2}\\ &\quad\times\sum_{(4Nx_2,x_1)=1}\chi_1(x_1)(4Nx_2z+x_1)^{\lambda-\epsilon}|4Nx_2z+x_1|^{-s+\epsilon-1}d_0z\\ &=\pi^{-(s-\epsilon+1)/2}\Gamma\left(\frac{s-\epsilon+1}{2}\right)L(s-\lambda+1,\chi_1)\int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathbb{H}}\sum_{\sigma\in R}B(\sigma z)d_0z\\ &=\pi^{-(s-\epsilon+1)/2}\Gamma\left(\frac{s-\epsilon+1}{2}\right)L(s-\lambda+1,\chi_1)\int_0^{\infty}\left(\int_0^1 G(z)\overline{\theta}_{\epsilon}(z)v^{(s+\epsilon+2)/2}du\right)\frac{dv}{v^2}\end{aligned}$$

となる. $\theta_{\epsilon}(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(2v)^{-\epsilon/2}H_{\epsilon}\left(2\sqrt{2\pi v}k\right)\exp(2\pi k^2z)$ より $\epsilon$ が奇数のとき $\theta_{\epsilon}(z)=0$ である. したがって, $\epsilon$ は偶数であるとする. この和が絶対収束することに注意すると,

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\left(\int_0^1 G(z)\overline{\theta}_{\epsilon}(z)v^{(s+\epsilon+2)/2}du\right)dv\\ &=\int_0^{\infty}\left\{\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{\infty}a(k)\exp(2\pi ikz)\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}(2v)^{-\epsilon/2}H_{\epsilon}(2\sqrt{2\pi v}k)\exp(-2\pi k^2\overline{z})\right)du\right\}\\ &\qquad\times v^{(s+\epsilon)/2}d^{\times}v\\ &=2^{-\epsilon/2}\int_0^{\infty}\left\{\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{\infty}a(k)\exp(2\pi ikz)\right)\left(H_{\epsilon}(0)+2\sum_{k=1}^{\infty}H_{\epsilon}(2\sqrt{2\pi v}k)\exp(-2\pi k^2\overline{z})\right)du\right\}\\ &\qquad\times v^{s/2}d^{\times}v\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{-\epsilon/2}\int_0^\infty H_\epsilon(0)\left\{\int_0^1 \sum_{k=1}^\infty a(k)\exp(-2\pi kv)\exp(2\pi iku)du\right\} v^{s/2}d^\times v \\
&\quad + 2^{1-\epsilon/2}\int_0^\infty \left\{\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^\infty a(k)\exp(2\pi ikz)\right)\left(\sum_{k=1}^\infty H_\epsilon(2\sqrt{2\pi v}k)\exp(-2\pi k^2\overline{z})\right)du\right\} \\
&\qquad\qquad \times v^{s/2}d^\times v \\
&= 2^{1-\epsilon/2}\int_0^\infty \left\{\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^\infty a(k)\exp(2\pi ikz)\right)\left(\sum_{k=1}^\infty H_\epsilon(2\sqrt{2\pi v}k)\exp(-2\pi k^2\overline{z})\right)du\right\} v^{s/2}d^\times v \\
&= 2^{1-\epsilon/2}\int_0^\infty \left\{\int_0^1 \sum_{m,n>0} a(m)H_\epsilon(2\sqrt{2\pi v}n)\exp\left(2\pi i(mz-n^2\overline{z})\right)du\right\} v^{s/2}d^\times v \\
&= 2^{1-\epsilon/2}\sum_{m,n>0} a(m)\left(\int_0^1 \exp\left(2\pi i(m-n^2)u\right)du\right) \\
&\qquad\qquad \times \left(\int_0^\infty H_\epsilon(2\sqrt{2\pi v}n)\exp\left(-2\pi(m+n^2)v\right)v^{s/2}d^\times v\right) \\
&= 2^{1-\epsilon/2}\sum_{n=1}^\infty a(n^2)\int_0^\infty H_\epsilon(2\sqrt{2\pi v}n)\exp(-4\pi n^2 v)v^{s/2}d^\times v \\
&= 2^{1-\epsilon/2}\sum_{n=1}^\infty a(n^2)\int_0^\infty \exp(4\pi vn^2)\left.\frac{d^\epsilon}{dx^\epsilon}\right|_{2\sqrt{2\pi v}n}\exp(-x^2/2)\exp(-4\pi n^2 v)v^{s/2}d^\times v \\
&= 2^{1-\epsilon/2}\sum_{n=1}^\infty a(n^2)\int_0^\infty v^{s/2}\left.\frac{d^\epsilon}{dx^\epsilon}\right|_{2\sqrt{2\pi v}n}\exp(-x^2/2)d^\times v
\end{aligned}
$$

となる.

ここで $\eta = 2\sqrt{2\pi v}n$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left(\int_0^1 G(z)\overline{\theta}_\epsilon(z)v^{(s+\epsilon+2)/2}du\right)\frac{dv}{v^2} \\
&= 2^{2-\epsilon/2}\sum_{n=1}^\infty a(n^2)\int_0^\infty \left(\frac{1}{8\pi n^2}\eta^2\right)^{s/2}\left.\frac{d^\epsilon}{dx^\epsilon}\right|_\eta \exp(-x^2/2)d^\times\eta \\
&= 2^{2-\epsilon/2-s/2}\sum_{n=1}^\infty a(n^2)(4\pi)^{-s/2}n^{-s}\int_0^\infty \eta^s\left.\frac{d^\epsilon}{dx^\epsilon}\right|_\eta \exp(-x^2/2)d^\times\eta \\
&= 2^{2-\epsilon/2-s/2}\sum_{n=1}^\infty a(n^2)(4\pi)^{-s/2}n^{-s}(s-1)\cdots(s-\epsilon)\int_0^\infty \eta^{s-\epsilon}\exp(-\eta^2/2)d^\times\eta \\
&= 2^{1-\epsilon/2-s/2}\sum_{n=1}^\infty a(n^2)(4\pi)^{-s/2}n^{-s}(s-1)\cdots(s-\epsilon)\int_0^\infty 2^{(s-\epsilon)/2}\eta^{(s-\epsilon)/2}\exp(-\eta)d^\times\eta \\
&= 2^{1-\epsilon}(4\pi)^{-s/2}(s-1)\cdots(s-\epsilon)\Gamma\left(\frac{s-\epsilon}{2}\right)D(s)
\end{aligned}
$$

となる.

(3.36), (3.38) より

$$\Gamma\left(\frac{s-\epsilon+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\epsilon}{2}\right)=\pi^{1/2}2^{1-(s-\epsilon)}\Gamma(s-\epsilon)$$
$$=\pi^{1/2}2^{1-(s-\epsilon)}\frac{1}{(s-\epsilon)\cdots(s-1)}\Gamma(s)$$

となることに注意すると,

$$I_\epsilon(s)=2^{2-2s}\pi^{-s+\epsilon/2}\Gamma(s)L(s-\lambda+1,\chi_1)D(s)$$

が成り立つ. 以上より $C=(-1)^\lambda 2^{(-4\lambda+5)/2}N^{\kappa/2}$ としたとき

$$\Omega(s)=C(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s-\lambda+1,\chi_1)D(s) \tag{7.13}$$

となる. □

(7.7), (7.8) より, 任意の $\mu>0$ に対し

$$\Phi(i\eta)=\begin{cases}O(\eta^{-\mu}) & \eta\to+\infty\\ O(\eta^{\mu}) & \eta\to 0\end{cases} \tag{7.14}$$

となる. (7.14) より十分大きな $l$ に対して $\Phi(i\eta)\eta^{l-1}\in L_1(\mathbb{R}^+)$ が成り立つ. $\Phi(i\eta)$ は $\mathbb{R}^+$ の任意のコンパクト部分集合上で有界かつ $\mathbb{R}^+$ 上で連続なので (3.35) より,

$$\Phi(i\eta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty}\Omega(s)\eta^{-s}ds$$

が得られる. (7.13) より

$$\Phi(i\eta)=C\sum_{n=1}^{\infty}A_1(n)\exp(-2\pi n\eta) \tag{7.15}$$

となるので, $\Psi$ が $\mathbb{H}$ 上で正則であれば

$$\Phi(w)=C\sum_{n=1}^{\infty}A_1(n)\exp(2\pi inw) \tag{7.16}$$

が得られる. これは定理 5.1 の $t=1$ の場合に一致する. つまり $\Phi$ が $\mathbb{H}$ 上で正則なら $\Phi\in S_{\kappa-1}(N,\chi^2)$ である.

$\Phi$ が $\mathbb{H}$ 上で正則であることを示す. 証明は [3, pp.116-119] を参考にした. $D_g$ を $SL_2(\mathbb{R})$ のカシミール作用素とする. すなわち,

$$D_g=\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}^2+2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)$$

とすると
$$\left\{\eta^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)-2i\eta\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right\}\Phi(w)=0$$
を満たす. $\Phi(w)$ は $\infty$ で
$$\Phi(w)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m(\eta)\exp(2\pi im\xi)$$
という形のフーリエ級数展開をもつ. このとき $a_m(\eta)$ は微分方程式
$$\left\{\frac{d^2}{d\eta^2}+\frac{2}{\eta}\frac{d}{d\eta}+\left(-4\pi^2m^2+\frac{4\pi m}{\eta}\right)\right\}a_m(\eta)=0 \tag{7.17}$$
を満たす. ここで補題を述べる.

**補題 7.18.**
$$u_m(\eta)=\begin{cases}\exp(-2\pi m\eta)\displaystyle\int_1^{\eta}x^{-2}\exp(4\pi mx)dx, & m>0\\ \exp(-2\pi m\eta)\displaystyle\int_{\eta}^{\infty}x^{-2}\exp(4\pi mx)dx, & m<0\end{cases} \tag{7.19}$$
とするとき,(7.17) の解はある定数 $b_m, c_m$ により
$$a_m(\eta)=\begin{cases}b_m\exp(-2\pi m\eta)+c_mu_m(\eta), & m\neq 0\\ b_0+c_0\eta^{-1}, & m=0\end{cases}$$
と書ける.

証明. (i) $m=0$ のとき,
$$\frac{d}{d\eta}a_0(\eta)=f(\eta)$$
とおく. すると (7.17) は
$$\frac{d}{d\eta}f(\eta)+\frac{2}{\eta}f(\eta)=0$$
と書ける. したがって,
$$\int\frac{f'(\eta)}{f(\eta)}d\eta=-\int\frac{2}{\eta}d\eta$$
となるので, 定数 $C$ により
$$\log|f(\eta)|=-2\log|\eta|+C$$
とできる. よって, 定数 $C'$ により
$$f(\eta)=C'\eta^{-2}$$

と書ける.

すなわち,

$$a_0'(\eta) = C' \int \eta^{-2} d\eta$$

より, 定数 $b_0, c_0$ により

$$a_0(\eta) = b_0 + c_0\eta^{-1}$$

と書ける.

(ii) $m \neq 0$ のとき, (7.17) は

$$\left(\frac{d}{d\eta} - 2\pi m + \frac{2}{\eta}\right)\left(\frac{d}{d\eta} + 2\pi m\right) a_m(\eta) = 0$$

と表すことができる. 関数 $f(\eta)$ により

$$a_m(\eta) = \exp(-2\pi m\eta) f(\eta)$$

とおく.

$$\left(\frac{d}{d\eta} + 2\pi m\right) a_m(\eta) = \exp(-2\pi m\eta) f'(\eta)$$

となるので $g(\eta) = \exp(-2\pi m\eta) f'(\eta)$ とおくと,

$$\left(\frac{d}{d\eta} - 2\pi m + \frac{2}{\eta}\right) g(\eta) = 0$$

である.

すなわち,

$$\int \frac{g'(\eta)}{g(\eta)} d\eta = \int \left(2\pi m - \frac{2}{\eta}\right) d\eta$$

なので, 定数 $C$ で

$$\log|g(\eta)| = 2\pi m\eta - 2\log|\eta| + C$$

となる. したがって, 定数 $C'$ で

$$g(\eta) = C'\eta^{-2} \exp(2\pi m\eta)$$

と書ける. よって,

$$f'(\eta) = C'\eta^{-2} \exp(4\pi m\eta)$$

より, 定数 $C''$ と (7.19) により

$$f(\eta) = C' u_m(\eta) + C''$$

と書ける. したがって $a_m(\eta)$ は, ある定数 $b_m, c_m$ により

$$a_m(\eta) = b_m \exp(-2\pi m\eta) + c_m u_m(\eta)$$

と書ける. □

$u_m(\eta)$ に関して考える. $m>0$ のとき, $\eta>0$ であることから $\eta^{-2} \geqq \exp(-\pi\eta)$ がわかるので

$$
\begin{aligned}
|u_m(\eta)| &\geqq \exp(-2\pi m\eta)\left|\int_1^\eta \exp\left((4\pi m-\pi)x\right)dx\right| \\
&= (4\pi m-\pi)^{-1}\exp(-2\pi m\eta)|\exp\left((4\pi m-\pi)\eta\right)-\exp(4\pi m-\pi)|
\end{aligned} \tag{7.20}
$$

であり, $m<0$ のとき

$$
u_m(\eta) = -\exp(2\pi m\eta)/4\pi m\eta^2 + \alpha_m(\eta) \tag{7.21}
$$

という式が成り立つ. ただし

$$
\alpha_m(\eta) = \frac{1}{2\pi m}\exp(-2\pi m\eta)\int_\eta^\infty x^{-3}\exp(4\pi mx)dx
$$

であり

$$
|\alpha_m(\eta)| \leqq \exp(2\pi m\eta)(1/8\pi^2|m^2|\eta^3 + 15/32\pi^3|m^3|\eta^4) \tag{7.22}
$$

が成り立つ. $\eta^\lambda\Psi(w) = O(\eta+\eta^{-1})$ が成り立つことを認めると

$$
\eta\Phi(w) = O(\eta+\eta^{-1}) \quad (\eta\to 0, \eta\to\infty) \tag{7.23}
$$

となる.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \eta^2|\Phi(w)|^2 d\xi \\
&= \eta^2\int_0^1\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(\eta)\exp(2\pi im\xi)\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{a_n(\eta)}\exp(-2\pi in\xi)\right)d\xi \\
&= \eta^2\int_0^1\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}|a_m(\eta)|^2 + \sum_{m\neq n} a_m(\eta)\overline{a_n(\eta)}\exp\left(2\pi i(m-n)\xi\right)\right)d\xi \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty}|a_m(\eta)|^2\eta^2
\end{aligned}
$$

となるので, (7.23) より $m, \eta$ に依存しない定数 $M$ で

$$
|a_m(\eta)| \leqq M((\eta+\eta^{-1})\eta^{-1}) \tag{7.24}
$$

とできる. $\eta\to\infty$ のときを考えると (7.20), (7.21), (7.22) より, $c_m = 0 \quad (m>0)$, $b_m = 0 \quad (m<0)$ が成り立つ. (7.24) より $|a_m(1/|m|)| \leqq M(1+m^2)$ が成り立つ. ゆえに, ある $\nu>0$ で $b_m = O(m^\nu) \quad (m\to\infty)$, $c_{-m} = O(m^\nu) \quad (m\to\infty)$ が成り立つ. 特に $a_0(\eta) = 0$ が成り立つので

$$
\Phi(w) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m\exp(-2\pi m\eta)\exp(2\pi im\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m}u_{-m}(\eta)\exp(-2\pi im\xi) \tag{7.25}
$$

となる．

$CA_1(n) = a'_n$ とする．$\Phi(w)$ が正則であるためには $c_{-m} = 0 \quad (m \geqq 1)$ を示せばよい．$c_{-m_0} \neq 0$ となる $m_0$ があると仮定し矛盾を導く．任意の $m < m_0$ に対し $c_{-m} = 0$ とする．(7.25), (7.15) より $H_{m_0}(\eta) = \exp(-2\pi m_0\eta)/4\pi m_0 \eta^2$ とすると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m > m_0} c_{-m} u_{-m}(\eta)/H_{m_0}(\eta) + c_{-m_0} u_{-m_0}(\eta)/H_{m_0}(\eta) \\
&\qquad = \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n - b_n) \exp(-2\pi n\eta)/H_{m_0}(\eta)
\end{aligned} \tag{7.26}
$$

となる．(7.26) の両辺は $[1, \infty)$ で一様に収束する．$t = \exp(-2\pi\eta) \quad (\eta > 0)$ とすると (7.26) の右辺は

$$
\frac{m_0}{\pi}(\log t)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n - b_n) t^{(n-m_0)}
$$

に等しく (7.21) より左辺は $\eta \to +\infty$ のとき $-c_{-m_0}$ に収束する．右辺は

$$
\lim_{t \to +0} \left\{ \frac{m_0}{\pi}(\log t)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n - b_n) t^{(n-m_0)} \right\} = \infty
$$

となりこれは矛盾である．

最後に $\eta^\lambda \Psi(w) = O(\eta + \eta^{-1})$ を示す．ここで

$$
|\theta(z, \sigma_{4w})| \leqq v^{(3-\kappa)/4} \sum_{x \in L'} |f(\sqrt{v}\sigma_{4w}^{-1} x)|
$$

である．$M = \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/4$ とすると，$\{\sigma_{4w}^{-1} x | x \in L'\} \subset \{\sigma_w^{-1} x | x \in M\}$ であり任意の $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して $\theta = \mathrm{Arg}(cw + d)$ とすると $\sigma_{\gamma w} = \gamma \sigma_w k(\theta)$ が成り立つことに注意すると

$$
\begin{aligned}
\sum_{x \in L'} |f(\sqrt{v}\sigma_{4w}^{-1} x)| &\leqq \sum_{x \in M} |f(\sqrt{v}\sigma_w^{-1} x)| \\
&= \sum_{x \in M} |f(\sqrt{v}\sigma_{\gamma w}^{-1} x)|
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ であるから，$x = (x_1, x_2, x_3)$ とするとき [7, p.26, Lemma 1.2.5] より $\eta > c_1 > 0$, $|\xi| < c_2$ のとき各変数 $x_j$ $(j = 1, 2, 3)$ ごとに $0 < h_j(x_j) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $(j = 1, 2, 3)$ で

$$
\left| \begin{pmatrix} 1 & \xi/\eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f(x) \right| \leqq h_1(x_1) h_2(x_2) h_3(x_3)
$$

となるものが存在する．ゆえに $\alpha = \begin{pmatrix} \sqrt{\eta} & 0 \\ 0 & \sqrt{\eta}^{-1} \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in M} \left| f(\sqrt{v}\sigma_w^{-1}x) \right| &= \sum_{x \in M} \left| \alpha \begin{pmatrix} 1 & \xi/\eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f(\sqrt{v}x) \right| \\
&= \sum_{x \in M} \left| \begin{pmatrix} 1 & \xi/\eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f(\sqrt{v}\alpha^{-1}x) \right| \\
&\leqq \left( \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}/4} h_1(\sqrt{v}\eta^{-1}x_1) \right) \left( \sum_{x_2 \in \mathbb{Z}/4} h_2(\sqrt{v}x_2) \right) \left( \sum_{x_3 \in \mathbb{Z}/4} h_3(\sqrt{v}\eta x_3) \right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって $w = \xi + i\eta$, $|\xi| < c_2$, $\eta < c_1 < 0$ に対して

$$\sum_{x \in M} |f(\sqrt{v}\sigma_w^{-1}x)| = O((\sqrt{v}^{-1} + 1)^2(\sqrt{v}^{-1}\eta + 1))$$

が成り立つ．$U = \{w = \xi + i\eta | |\xi| \leqq \frac{1}{2}, \eta < 0, |w| \geqq 1\}$, $c_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $c_2 > \frac{1}{2}$ とし $w \in \mathbb{H}$ に対して $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ を $\gamma w \in U$ となるように選ぶ．このとき,

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in L'} |f(\sqrt{v}\sigma_{4w}^{-1}x)| &\leqq \sum_{x \in M} |f(\sqrt{v}\sigma_{\gamma w}^{-1}x)| \\
&= O((\sqrt{v}^{-1} + 1)^3(\mathrm{Im}\gamma w + 1)) \\
&= O((v^{-3/2} + 1)(\eta + \eta^{-1}))
\end{aligned}$$

である．ゆえに任意の $w, z \in \mathbb{H}$ に対して

$$|\theta(z, \sigma_{4w})| = O(v^{(3-\kappa)/4}(v^{-3/2} + 1)(\eta + \eta^{-1}))$$

が成り立つので $\eta^\lambda \Psi(w) = O(\eta + \eta^{-1})$ である．以上より $\Phi(w) \in S_{\kappa-1}(2N, \chi^2)$ がわかる．

以上より定理 5.8 が示された．

# 8　系 5.9 の証明

定理5.8を用いて, 系5.9を証明する．定理5.1の条件で $f(tz) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\exp(2\pi i n z) \in S_{\kappa/2}\left(4tN, \chi\left(\frac{t}{*}\right)\right)$ とする．定理 5.8 より

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_1(n)n^{-s} = \left( \sum_{m=1}^{\infty} \chi_t(m)m^{\lambda-1-s} \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} b(m^2)m^{-s} \right)$$

により $\psi(w)=\sum_{n=1}^{\infty}B_1(n)\exp(2\pi inw)\in S_{\kappa-1}(2tN,\chi^2)$ となる．$t|m$ のとき $m=tk$ とすると

$$b(m^2)=\begin{cases}a(tk^2) & t|m\\ 0 & t\nmid m\end{cases}$$

と表せるので

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}B_1(n)n^{-s}&=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\chi_t(m)m^{\lambda-1-s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}a(tm^2)(tm)^{-s}\right)\\&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_t(m)m^{-s}\right)t^{-s}\end{aligned}$$

となる．よって

$$B_1(n)=\begin{cases}A_t(n/t) & t|n\\ 0 & t\nmid n\end{cases}$$

がわかるので $\psi(w)=F_t(tw)$ である．

$$\Gamma_0^t(2N)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(2N)\ \middle|\ b\equiv 0 \mod t\right\},\ \Gamma_\infty=\left\{\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}\middle| b\in\mathbb{Z}\right\}$$

とする．このとき, 次の補題が成り立つ．

**補題 8.1.** 平方因子をもたない正の整数 $t$ に対し $\Gamma_0(2N)$ は $\Gamma_0^t(2N)$ と $\Gamma_\infty$ で生成される．

証明．任意の $\alpha=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(2N)$ とする．$\alpha$ に対して $\alpha\beta_1\cdots\beta_n\in\Gamma_0^t(2N)$ となる $\beta_i\in\Gamma_0^t(2N)\cup\Gamma_\infty\,(i=1,\dots n)$ が存在することを示せばよい．

(i) $(a,t)=1$ のとき, $\overline{a}^{-1}\in\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ が存在する．したがって, $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ で考えると

$$\begin{pmatrix}\overline{a}&\overline{b}\\\overline{c}&\overline{d}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{1}&-\overline{b}\overline{a}^{-1}\\\overline{0}&\overline{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{a}&\overline{0}\\\overline{c}&-\overline{b}\overline{a}^{-1}\overline{c}+\overline{d}\end{pmatrix}$$

となることから, うまく $\beta\in\Gamma_\infty$ を選び $\alpha\beta\in\Gamma_0^t(2N)$ とできる．

(ii) $(a,t)\neq 1$ のとき, $m\in\mathbb{Z}$ により $\begin{pmatrix}1&0\\2Nm&1\end{pmatrix}\in\Gamma_0^t(2N)$ とすると,

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2Nm&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2Nbm&b\\c+2Ndm&d\end{pmatrix}$$

となることから, もし $(a+2Nbm,t)=1$ となる $m$ があれば (i) より主張が成り立つ．$p_i\,(i=1,\dots r)$ を相異なる素数, $q\in\mathbb{Z}$ を各 $p_i$ と互いに素とし, $(a,t)=p_1\cdots p_r$, $t=$

$p_1 \cdots p_r q$ とする．このとき各 $p_i$ に対して $p_i | a$, $p_i \nmid 2Nb$ であるから，$a + 2Nbm_i \equiv 1 \mod p_i$ となる整数 $m_i$ が存在する．中国式剰余定理より

$$\mathbb{Z}/t\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$$

が成り立ので，$(m_1, \cdots, m_r, 0) \in \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ を考えると，これに対応する $m \in \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ が存在する．このことから $(a + 2Nbm, t) = 1$ となる $m$ が存在する． $\square$

任意の $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると，$\sigma' \in \Gamma_0^t(2N)$ に対して $\sigma' = \begin{pmatrix} a & b/t \\ ct & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2tN)$ であるから

$$\begin{aligned} F_t(\sigma w) &= \psi\left(\frac{\sigma w}{t}\right) \\ &= \psi\left(\frac{aw+b}{t(cw+d)}\right) \\ &= \psi\left(\sigma' \frac{w}{t}\right) \\ &= (cw+d)^{2\lambda}\chi^2(d)F_t(w) \end{aligned}$$

が成り立つ．補題 8.1 より，$F_t \in S_{\kappa-1}(2N, \chi^2)$ である．以上で系 5.9 が示された．

# 参考文献


[1] Barry A. Cipra. On the Niwa-Shintani theta-kernel lifting of modular forms. *Nagoya Math. J.*, 91:49–117, 1983.

[2] Neal Koblitz. *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms.* Springer, 1993'.

[3] Hisashi Kojima. Cusp forms of weight 3/2. *Nagoya Math. J.*, 79:111–122, 1980.

[4] Shinji Niwa. Modular forms of half integral weight and the integral of certain theta-functions. *Nagoya Math. J.*, 56:147–161, 1975.

[5] Goro Shimura. On modular forms of half integral weight. *Ann. of Math. (2)*, 97:440–481, 1973.

[6] Takuro Shintani. On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight. *Nagoya Math. J.*, 58:83–126, 1975.

[7] Akihiko Yukie. *Shintani Zeta Functions.* Cambridge University Press, 1993.

[8] 新井 仁之. 新・フーリエ解析と関数解析学. 培風館, 2010.

[9] 金子 尚武, 松本 道男. 特殊関数. 培風館, 1984.

[10] 宮島 静雄. 関数解析. 横浜図書, 2005.

[11] 森口 繁一 他. 数学公式 II -級数・フーリエ解析-. 岩波全書, 1957.

[12] 雪江 明彦. 整数論 3 解析的整数論への誘い. 日本評論社, 2014.