$kM^n + n$ 型の素数の個数について

西尾 優

Contents

1 Introduction

本論文は X.-G. Sun. Primes of the formkM^n+n.Acta Math. Hungar., Vol. 158, No. 1, pp. 100–108,2019.39 , [12] の解説論文である．この論文の中では以下の定理が示されている．

定理 1.1. M を正の整数として, x を十分大きな正の実数とする．このとき M と互いに素な正の整数 k であって, kM^n+n が素数になるような $k \le x$ の個数は, ある M にのみ依存する正定数 $C_0(M)$ が存在して, 下から $xC_0(M)$ で抑えることができる．つまり以下の評価が成立する．

$$|\{k|0<k\le x,(k,M)=1, \text{ある } n\in\mathbb{N} \text{ が存在して } kM^n+n \text{ は素数}\}| \gg C_0(M)x.$$

この研究は先行研究である $k2^n+1$ 型の素数についての研究の類似の研究である．そこでまず $k2^n+1$ 型の素数の研究について簡単に紹介を行う．まず有名な物としては Sierpiński の研究 [11] があげられる．この論文では以下の定理が示されている．

定理 1.2 (Sierpinski)**.** 正の整数 k であって, 任意の正の整数 n に対して $k2^n+1$ が合成数になるようなものが無限に存在する．

また本論文の証明のアイディアの元になった Erdős と Odlyzko の論文 [7] も有名である．Erdős らの論文の中では以下の定理が示された．

定理 1.3 (Erdős, Odlyzko)**.** 実数 x に対して, $N(x)$ で $k\le x$ なる正の整数 k に対して $k2^n+1$ が素数になるようなものの個数を表すとする．このとき $x\ge 1$ なる x に対してある正の実定数 c_1 が存在して以下の評価が成立する．

$$\frac{N(x)}{x} \ge c_1.$$

この結果は本論文の M が 2 のときのケースと考えることができる．他にも同様な形の素数の研究として, メルセンヌ素数についての研究が挙げられる．メルセンヌ素数の研究は主にはメルセンヌ予想 [8], p.18 と呼ばれる以下の予想に関する研究である．

予想 1.4 (メルセンヌ予想)**.** 自然数 n であって 2^n-1 が素数になるようなものは無限に存在しているか？

すぐに分かるように上記予想の n は素数に限られる．一見すれば扱う素数の型は本論文もメルセンヌ予想も, 同じ指数型の素数であるため, 似ているいるように思われる．しかし問題の難しさはメルセンヌ予想の方がはるかに難しい．その一つの理由として, 本論文では kM^n+n 型の素数を扱っており, 条件を満たす k を探していることが挙げられる．一方でメルセンヌ予想では本論文の主定理の k を固定して n を探している．したがって k が自由に動いて, その中で素数になるものの個数を探しているため, 未解決問題のメルセンヌ予想とは異なって本論文の定理が成立していると考えらえる．

また更に本論文に関連する研究は, Banks, Finch, Luca, Pomerance, Stănică [1]; Chen [2], [3], [4], [5]; Cilleruelo, Luca, Pizarro-Madariaga [6]; 　などが挙げられる．さらにその他数論についての未解決問題のリストについては Guy [8] などの論文や文献を参照頂きたい．本解説論文で解説する [12] の論文では固定された正の整数 k,M,n に対して kM^n+n 型の素数について, Erdős と Odlyzko [7] の論文と, Luca と Stănică [10] の論文で用いられているアイディアや定理を軸とし, さらに [9] で記載されている篩法の評価を用いることによって主定理を証明している．

この論文ではまず 2 節で，証明の大まかな方針やどのように篩法が用いられているのか, また証明のアイディアなどについて解説する．次に 3 節で本論文で用いる一般的な記号などについて約束す

る．その後，4 節で本論文に直接は関係がないことも含めて, 一般的な篩法についての基礎知識を解説する．さらに 5 節で Brun の篩という, 組み合わせ論的な篩で有名な手法について解説する．更に 6 節で Fundamental Lemma と呼ばれる篩法で基礎的な手法について解説する．次に 7 節では主定理の証明に用いる Brun-Titchmarsh Inequality という算術級数中の素数の個数を評価する不等式について紹介する．続いて 8 節でも主定理の証明に用いる, 篩を用いた一次式型の素数の個数を評価する定理について紹介する．最後に 9 節で今までの準備を元に主定理の証明を行う．更に定理の拡張についても言及して本論文を終える．

2 主定理と証明の方針

本節では論文で目標とする主定理と証明方針の紹介を行い, 篩法をどこで用いたのか, 証明のアイディアがどこにあったのかも含めて解説する．まず主定理の主張を確認する．

定理 2.1. $M \in \mathbb{N}$ を正の整数として, $x \in \mathbb{R}$ を十分大きな実数とする．このとき M と互いに素な正の整数 k であって, $kM^n + n$ が素数になるような k の個数は, M にのみ依存する定数 $C_0(M)$ によって下から $xC_0(M)$ で抑えることができる．つまり以下の評価が成立する．

$$\{k|0 < k \leq x, (k, M) = 1, \text{ある } n \in \mathbb{N} \text{ が存在して } kM^n + n \text{ は素数}\} \gg C_0(M)x.$$

下記ではまず主定理の証明の方針を解説する．私は今回, 修士課程において解析数論, その中でも特に篩の理論について学習してきたため, 証明の方針を篩が用いられたポイントに重きを置いて解説する．まず証明の方針の解説に先立ち二つの記号を定義する．

定義 2.2. 自然数 M を固定する．自然数 k, n に対して $r(k, n)$ を $kM^n + n$ が素数のとき 1 となり, そのほかでは 0 になる関数とする．つまり以下のように定義する．

$$r(k,n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & kM^n + n \text{ は素数} \\ 0 & \text{それ以外}. \end{cases}$$

またこの関数 $r(k, n)$ を元に以下の関数 $R(k, x)$ を定義する．

定義 2.3. c_3 を M の素因数にのみ依存するある定数とする (詳細な定義については後ほど解説)．自然数 k と正の実数 x に対して, $R(k, x)$ を

$$R(k,x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \leq c_3 \frac{\log x}{\log M}} r(k,n).$$

と定義する．

以上の準備を元に証明の方針を解説する．まず本論文の最初の着眼点は Erdős の論文 [7, p.3] の Lemma 1 の証明のアイディアにあると考えられる．Erdős らはまず, コーシーシュワルツの不等式を用いることによって, 求めたい集合の個数の評価を実現した．それに倣って本論文でも以下のコーシーシュワルツの不等式の観察が最初のステップである．

$$\left(\sum_{k \leq x, (k,M)=1} R(k,x) \right)^2 \leq |\{k|1 \leq k \leq x, (k,M) = 1, R(k,x) \geq 1\}| \times \sum_{k \leq x, (k,M)=1} R(k,x)^2.$$

この不等式より上式の左辺の下からの評価と, 右辺の第 2 項部分の上からの評価ができれば, 本論文で評価したい集合の個数の下からの評価が得られることがわかる．このアイディアに基づいて, 本論文の証明の流れは式 2.4 の左辺と右辺第 2 項部を評価するために 7 つの補題を示し, それによって所望の結果を得ている．

9 節の補題 9.1 と補題 9.7 は問題の評価を篩の言葉に書き直すために必要な補題である．補題 9.2 は技術的ではあるが, 補題 9.8 において篩の定理を用いるための前提条件を保証している補題である．さらに補題 9.5 と補題 9.6 によって求めたい評価の一つである,

$$\left(\sum_{k\leq x,(k,M)=1} R(k,x)\right)^2, \tag{2.4}$$

についての評価を実現している．

また補題 9.8 によって,

$$\sum_{k\leq x,(k,M)=1} R(k,x)^2. \tag{2.5}$$

の上からの評価を行っている．以上の流れで補題を示し, 最後に観察したコーシーシュワルツの不等式を用いることによって主定理の証明を行う．以上が証明の大まかな流れである．

最後に本論文で篩が用いられているポイントや, kM^n+n という型特有の証明がうまいくポイントについて最後に解説する．

初めに篩の結果が用いられたポイントを二つ紹介する．一つ目は Brun-Titchmarsh Inequality の結果を用いている部分である．補題 9.8 に出てくる以下の項を評価するために用いられる．

$$\sum_{k\leq x,(k,M)=1}\ \sum_{n\leq c_3\frac{\log x}{\log M}} r(k,n).$$

上式を評価する過程で, $|\{p|p\leq xM^n+n, p\equiv jM^n+n \pmod M\}|$ という項を上から評価したくなる．その際に自然に考えつくのが Brun-Titchmarsh Inequality として知られる定理 7.1 である．この定理は算術級数の中の素数の個数の上からの評価を明示的に与える篩の結果であり, これを直接適用することによって．$|\{p|p\leq xM^n+n, p\equiv jM^n+n \pmod M\}|$ の上からの良い評価が得られる．

次に以下の項を評価するために篩の結果が用いられる．

$$\sum_{k\leq x,(k,M)=1}\ \sum_{n_1\neq n_2\leq c_3\frac{\log x}{\log M}} r(k,n_1)r(k,n_2).$$

この部分も上記の項と同様に定義に基づいて計算をすると以下の項を評価したくなる．

$$\sum_{n_1\neq n_2\leq c_3\frac{\log x}{\log M}} \left|\{k\leq x|kM^{n_1}+n_1, kM^{n_2}+n_2 \text{ は素数}, (k,M)=1\}\right|.$$

上記のような一次式型の素数の個数の評価も, よく知られているように篩法の結果が適用できる．自然に思いつく結果としては Selberg の方法として知られる定理 8.1 があげられる．こちらの結果も一定区間内の一次式型の素数の個数を明示的に上から評価する強力な定理である．ただこの定理の適用条件が二つありそれらを満たす必要がある．$|\{k\leq x|kM^{n_1}+n_1, kM^{n_2}+n_2 \text{ は素数}, (k,M)=1\}|$ とい

う集合は $(k,M)=1$ という条件が邪魔で単純にこの定理を適用することができない．またこの条件を外すし, より集合の個数を大きくしようとしても定理 8.1 の適用条件を満たさなくなってしまう．そこで k を M での剰余で考えて以下の評価を行うとうまくいく．

$$\begin{aligned}
&\sum_{n_1\neq n_2\leq c_3\frac{\log x}{\log M}}|\{k\leq x|kM^{n_1}+n_1,kM^{n_2}+n_2\text{ は素数},(k,M)=1\}|\\
=&\sum_{n_1\neq n_2\leq c_3\frac{\log x}{\log M}}\sum_{\substack{1\leq j\leq M\\(j,M)=1}}|\{k\leq x|kM^{n_1}+n_1,kM^{n_2}+n_2\text{ は素数かつ }k\equiv j\pmod M\}|\\
\leq&\sum_{n_1\neq n_2\leq c_3\frac{\log x}{\log M}}\sum_{\substack{1\leq j\leq M\\(j,M)=1}}\left|\left\{l\leq\frac{x}{M}\middle|lM^{n_1+1}+jM^{n_1}+n_1,lM^{n_2+1}+jM^{n_2}+n_2\text{ は素数}\right\}\right|.
\end{aligned}$$

上記のように変形することで, 動く l の部分から互いに素という条件を外すことができ, 定理 8.1 を直接用いることができる．このようにして篩の結果を用いることで 2.5 の上からの良い評価が得られることが一つのポイントと言える．

最後になぜ kM^n+n という指数型の素数を考えるのかについて考察する．この型が重要になるポイントの一つは $n\ll M^n$ の評価を用いる点である．この漸近評価は多くの場面で用いられている．しかしこの他にもう一つ重要なポイントがある．それは補題 9.5 の成立である．この補題は N の素因数にのみ依存する定数を用いて, 明示的な評価が得られることに意義がある．したがってこの N が N の冪乗に変わっても同じ定数を用いて明示的な不等式が得られることになる．このことから今回考察する型の素数である kM^n+n の M の冪が増加しても同様の定数で評価できる．これによって補題 9.5 を用いて良い評価をすることで 9.6 が成立し, 式 2.4 の下からの評価が可能になる．このように本論文は Erdős の論文 [7, p.3] の証明の流れを踏襲しつつ, そこに新たに篩の結果をうまく用い, かつ kM^n+n の型の素数の特性を活かすことによって主定理を導いている．

3 記号と条件のまとめ

本節は論文内で用いる記号について特に本文内で定義しない記号について約束しておく．

$\mathbb{Z},\mathbb{N},\mathbb{R}$ でそれぞれ整数, 自然数, 実数の集合とする．また実数 x に対して $[x]$ で x 以下の最大の整数を表す．また整数 a,b に対して, $(a,b),[a,b]$ でそれぞれ a と b の最大公約数と最小公倍数を表す．また以下本節では n で自然数を表すとする．自然数に対して定義されるメビウス関数を $\mu(d)$ で表す．更に $\Omega(n)$ で重複を込めた n の素因子の個数を表す．また $\phi(n)$ でオイラーのトーシェント関数を表す．更に $\nu(n)$: $\nu(n)$ で整数 n の相異なる素因数の個数を表す．また $\pi(x)$ で $x\in\mathbb{R}$ 以下の素数の個数を表し, $\pi(x;k,l)$ で実数 x 以下の素数であって, $l\pmod k$ となる素数の個数を表す．

4 Sieve の基礎の解説

本節は本論文の主定理とは直接関係はないが,[9] で解説されている篩法の基礎的な事項の解説である．Sieve(篩) の技法は, 古くは Eratosthenes(紀元前 3 世紀) の篩の頃から知られている解析数論の技法である．篩の考え方は $\mathscr{A}$ という整数の有限集合を $\wp$ という素数全体の集合の部分集合で “篩にかける (sift する)” ことによって, $\mathscr{A}$ の中に所望の性質を持つ整数を残して, その個数を数え上げることによって評価していこうという考えに基づいている．

まず篩法でよく用いる記号などの定義を行う．

定義 4.1. $\wp$ で素数全体の集合の部分集合とする．同様に正の整数 k に対して $\wp_k$ で k と互いに素な素数の集合を表す．さらに $\overline{\wp}$ で素数全体の集合の中での $\wp$ の補集合を表す．また正の整数 q に対して,

$$(q, \overline{\wp}) = 1,$$

という記号で q が $\overline{\wp}$ の元と互いに素であることを表す.

また以下の形で篩法で興味の対象となる数え上げ関数というものを定義しておく.

定義 4.2. $\mathscr{A}$ を整数の有限集合, z を正の整数として, $\wp$ で素数全体の集合の部分集合とする．また $P(z)$ で z 以下の全ての素数の積表す．このとき以下の形式で数え上げ関数を定義する.

$$S(\mathscr{A}; \wp, z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} |\{a \in \mathscr{A} | (a, P(z) = 1)\}| .$$

さらにより一般化された数え上げ関数を以下の形式で定義しておく.

定義 4.3. z を正の整数として, d を平方因子を持たない正の整数とする．$\mathscr{A}_d$ を,

$$\mathscr{A}_d \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{a | a \in \mathscr{A}, a \equiv 0 \pmod d\},$$

と定義する．また正の整数 q がさらに以下の条件,

$$\mu(q) \neq 0, \qquad (q, P(z)) = 1, \qquad (q, \overline{\wp}) = 1,$$

を満たす整数とする．このとき一般化された篩関数を以下のように定義する.

$$S(\mathscr{A}_q; \wp, z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} |\{a \in \mathscr{A}_q | (a, P(z) = 1)\}| .$$

ふるい法の目的は上記で紹介した各 $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}_d$ の要素の個数を近似することで, 集合 $\mathscr{A}$ の要素の個数の評価を得ることである．その方法として以下のような量たちを定める.

初めに $\mathscr{A}$ の要素の個数を近似するような実数, $X > 1$ が与えられたとする．このときまず全体の誤差項を,

$$R_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} |\mathscr{A}| - X,$$

と定義する．次に平方因子を持たない正の整数 d 上の乗法的関数 $\omega(d)$ を次のように定める.

定義 4.4. 各素数 $p \in \wp$ に対して $\omega(p)$ が定義されているとし, $p \notin \wp$ なる素数に対しては $\omega(p) = 0$ であるとし, $\omega(1) = 1$ と仮定する．このとき平方因子がない自然数 d に対して $\omega(d)$ を以下のように定義する.

$$\omega(d) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \prod_{p|d} \omega(p).$$

上記で定義した乗法的関数を用いることで一般化された数え上げ関数の誤差項を以下の形式で定義する.

$$R_d \stackrel{\mathrm{def}}{=} |\mathscr{A}_d| - \frac{\omega(d)}{d} X.$$

以上で定義してきた量 X や $\omega(p)$ の値については制約を設けていないが, 篩法の技法では上記で定義した誤差項をより小さくするような量を見つけることが重要になる．一見上記のような篩の記法や関

数を導入しても解析数論の問題には何も関係がないように見える．しかし 篩関数を用いて解析数論の重要な問題を篩の言葉で簡明に記述できることを以下で観察する．以下では条件,

$$\sqrt{x} < z \leq x,$$

を仮定して,

$$\mathscr{A} = \{n | n \leq x\}, \qquad \wp = \wp_1,$$

と定義する．このとき数え上げ関数の定義から,

$$S(\mathscr{A}; \wp, z) \stackrel{\text{def}}{=} |\{n | n \leq x, (n, P(z) = 1)\}|,$$

となる．このとき集合 $\{n | n \leq x, (n, P(z) = 1)\}$ には区間 $[z, x]$ の中の素数のみが属する．したがって上記の篩関数は, $|\theta| \leq 1$ を満たす実数を用いて, 以下のように書くことができる．

$$S(\mathscr{A}; \wp, z) = 1 + |\{p \colon z \leq p \leq x\}| = \pi(x) + \theta z.$$

上式の左辺と右辺を見比べることで $S(\mathscr{A}; \wp, z)$ という篩関数と, π という素数の個数に関係する重要な関数が密接に関係することがわかる．

次に篩関数を用いて Eratosthenes-Legendre の公式と呼ばれる, 篩法の分野で基礎的な定理を紹介する．まず定理に用いる条件を定義する．

条件 4.5. 本定義番号で素数 p と正の実数 A_0 に対して, 乗法敵関数 ω が以下の不等式,

$$\omega(p) \leq A_0,$$

を満たすという条件を表す．

またさらにもう一つ技術的な条件を以下のように定義する．

条件 4.6. 正の整数 d であって以下の条件,

$$\mu(d) \neq 0 \text{ かつ}, (d, \overline{\wp}) = 1,$$

を満たすものに対して, 誤差項 R_d に対して以下の不等式,

$$|R_d| \leq \omega(d),$$

が成立するという条件を表す．

最後に Eratosthenes-Legendre の公式と呼ばれている定理 [9, p.31] を以下で紹介する．

定理 4.7 (Eratosthenes-Legendre の公式)**.** q を $(q, P(z)) = 1$, かつ $\mu(q) \neq 0$ なる正の整数とする．このとき篩関数について以下の評価式が成立する．

$$S(\mathscr{A}_q; \wp, z) = \frac{\omega(q)}{q} XW(z) + \theta \sum_{d | P(z)} |R_{qd}|.$$

さらに条件 4.6, 4.5 が満たされている場合, 以下の評価が成立する．

$$S(\mathscr{A}; \wp, z) = XW(z) + \theta(1 + A_0)^z.$$

ただし θ は $|\theta| \leq 1$ を満たす実数とする．

証明. $(q, P(z)) = 1$ であることに注意すると以下の式を得る.

$$S(\mathscr{A}_q; \wp, z) = \sum_{a \in \mathscr{A}_q} \sum_{\substack{d|a \\ d|P(z)}} \mu(d) = \sum_{d|P(z)} \mu(d) \sum_{\substack{a \in \mathscr{A} \\ a \equiv 0 \pmod{q)d}}} 1 = \sum_{d|P(z)} \mu(d)|\mathscr{A}_{qd}|.$$

ここで q が平方因子を持たない整数であることから, 上式をさらに以下のように書き直すことができる.

$$S(\mathscr{A}_q; \wp, z) = \sum_{d|P(z)} \mu(d) \left\{ \frac{\omega(qd)}{qd} X + R_{qd} \right\}.$$

ここでさらに ω が乗法的関数であることを考慮すると以下が成立する.

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d) \frac{\omega(d)}{d} = \prod_{\substack{p<z \\ p \in \wp}} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) = \prod_{p<z} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right).$$

これによって定理の前半部分が示された. またこの結果に $q = 1$ を代入して, 条件 4.6, 4.5 を課すことによって以下の評価を得る.

$$\sum_{d|P(z)} |R_d| \le \sum_{d|P(z)} A_0{}^{v(d)} = \prod_{d|P(d)} (1 + A_0) \le (1 + A_0)^{\pi(z)} \le (1 + A_0)^z.$$

この結果を代入することによって所望の定理の結果を得る. □

5 Brun の篩

この節では本論文の主定理とは直接関係はないが, 篩の手法として重要である Brun の篩について [9] で説明されている事項の解説である.

4 節で考察した Eratosthenes-Legendre の公式と呼ばれる篩では剰余項は以下の式であった.

$$\sum_{d|P(z)} |R_d|.$$

しかし上式の項の数は z が大きければ大きいほど組み合わせ論的に爆発的に増えることになる. そのため剰余項が増加し, 評価したい集合の個数がうまく評価出来そうにない. ここで登場するのが組み合わせ論的な篩と言われる篩法の考え方である. 組み合わせ論的篩では, Eratosthenes-Legendre の公式で考察した,

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d),$$

の形の式の代わりに, 上式に $\chi(d)$ をかけた以下の式を用いる.

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi(d).$$

直接集合の大きさを等式で評価することを諦め, この χ という関数をうまく選択することによって誤差項を統制し, 数え上げ関数を不等式で評価しようという考え方が組み合わせ論的な篩の基礎的な考

え方である．Brun が実際に考えた篩この χ を二つうまくとってきて, 数え上げ関数を等式で評価することを捨て, 上からと下からの評価で挟むことが基本的なアイディアである．以上のことを念頭において Brun の篩について解説する．

まず本節で示す定理の説明の前によく用いる仮定となる条件について定義しておく．

条件 5.1. A_1 を正の実数とする．このとき以下の不等式が成立している．

$$0 \leq \frac{\omega(p)}{p} \leq 1 - \frac{1}{A_1}.$$

条件 5.2. z, w, κ, A_2 を正の実数とする． また関数 χ_1, χ_2 は，正の整数 d であって，$p < q(d)$ かつ $pd \mid P(z)$ を満たす素数に対してのみ以下の不等式を満たす関数とする．

$$(-1)^{\nu-1}\mu(d)\left\{\chi_\nu(d) - \chi_\nu(pd)\right\} \geq 0 \quad (\nu = 1, 2).$$

このとき以下の不等式が成立している．

$$\sum_{w \leq p < z} \frac{\omega(p)\log p}{p} \leq \kappa \log \frac{z}{w} + A_2, \qquad 2 \leq w \leq z.$$

またここで出てくる κ のことを篩の次元という．

さらに証明なしで重要になる補題を四つ述べる．

補題 5.3 ([9, p.40], (1.16))**.** 篩の数え上げ関数について以下の評価が成立する．

$$\begin{aligned} & X \sum_{d \mid P(d)} \mu(d)\chi_2(d)\frac{\omega(d)}{d} - \sum_{d \mid P(d)} |\chi_2(d)|\,|R_d| \\ \leq\quad & S\left(\mathscr{A}; \wp, z\right) \leq X \sum_{d \mid P(d)} \mu(d)\chi_1(d)\frac{\omega(d)}{d} - \sum_{d \mid P(d)} |\chi_1(d)|\,|R_d|. \end{aligned}$$

補題 5.4 ([9, p.44], (1.26))**.** 条件 *5.1* を仮定する．このとき以下の式が成立する．

$$\sum_{d \mid P(z)} \mu(d)\chi_v(d)\frac{\omega(d)}{d} = W(z)\left\{1 + (-1)^{v-1}\sum_{p<z}\frac{\omega(p)}{p}\frac{W(p)}{W(z)}\sum_{t \mid P_{p^+,z}} \frac{\chi_v(t)(1-\chi_v(pt))}{t}\omega(t)\right\} \qquad (v = 1, 2).$$

補題 5.5 ([9, p.55], (3.14))**.** 条件 4.6 を仮定する．また，$A \overset{\text{def}}{=} \max(\kappa, A_2)$ と定義する．また Li で対数積分を表す．このとき以下の式が成立する．

$$S\left(\mathscr{A}; \wp, z\right) = XW(z) + \theta e^{A(\mathrm{Li}z+3)}.$$

補題 5.6 ([9, p.54], (3.12))**.** 条件 5.1, 5.2 が満たされているとする．さらに A_1, A_2 をそれぞれ条件 5.1, 5.2 に出てくる定数とする．このとき以下の不等式が成立する．

$$\frac{W(w)}{W(z)} \leq \exp\left\{\kappa \log \frac{\log z}{\log w} + \frac{A_2}{\log w}\left(1 + A_1\kappa + \frac{A_1 A_2}{\log 2}\right)\right\}.$$

以上の条件と補題の準備の元で Brun の篩として知られる定理の解説を行う.

定理 5.7. 条件 5.1, 5.2, 4.6 が満たされているとする. b を正の整数, λ を以下の条件を満たす実数とする. さらに A_1, A_2 をそれぞれ条件 5.1, 5.2 に出てくる定数とする. そして $c_1 \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{A_2}{2}\left\{1+A_1\left(\kappa+\frac{A_2}{\log 2}\right)\right\}$ とする.

$$0<\lambda e^{1+\lambda}<1.$$

このとき以下の評価が成立する.

$$S(\mathscr{A};\wp,z) \le XW(z)\left\{1+2\frac{\lambda^{2b+1}e^{2\lambda}}{1-\lambda^2 e^{2+2\lambda}}\exp\left((2b+3)\frac{c_1}{\lambda\log z}\right)\right\}+O\left(z^{2b+2.01/(e^{2\lambda/\kappa}-1)}\right).$$

$$S(\mathscr{A};\wp,z) \ge XW(z)\left\{1+2\frac{\lambda^{2b+1}e^{2\lambda}}{1-\lambda^2 e^{2+2\lambda}}\exp\left((2b+2)\frac{c_1}{\lambda\log z}\right)\right\}+O\left(z^{2b-1+2.01/(e^{2\lambda/\kappa}-1)}\right).$$

証明. ここでまず z が十分大きいと仮定して良いことに注意する. そうでない場合は補題 5.5 から定理は直ちに従う. 補題 5.4 から以下の評価が成立することに注意する.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{W(z)}\sum_{d|P(z)}\mu(d)\chi_v(d)\frac{\omega(d)}{d}\\ =\ & 1+(-1)^{v-1}\sum_{p<z}\frac{\omega(p)}{p}\frac{W(p)}{W(z)}\sum_{t|P_{p^+,z}}\frac{\chi_v(t)(1-\chi_v(pt))}{t}\omega(t) \qquad (v=1,2).\end{aligned}$$

ここで以下のように正の整数 r と数列 $z_n, n\in\{1,\cdots,r\}$ を以下のように定める. 後々これは $\log z_n$ が等比級数になるように構成する.

$$2=z_r<z_{r-1}<\cdots<z_1<z_0=z.$$

ここでさらに, 上記の評価を実現するために, χ_v, $(v=1,2)$ を以下で実際に構成する. 実際には以下の形で与えられる.

$$\chi_v(d)=1 \qquad \nu((d,P_{z_n,z}))\le 2b-v+2n-1, \qquad n=1,\cdots,r.$$

そしてそれ以外の $d\mid P(z)$ については $\chi_\nu(d)=0$ と定義する. 詳細な確認については省略するが, この χ_v は以下の条件を満たしている.

$$\begin{aligned}&\chi_\nu(d)=0,1 \quad (d\mid P(z)\text{ のとき})\\ &\chi_\nu(1)=1\\ &\chi_\nu(d)=1\text{ であるとき, 全ての } t\mid d, d\mid P(z)\text{ に対して}\chi_\nu(t)=1\\ &\chi_\nu(t)=1,\mu(t)=(-1)^\nu\text{のとき, 全ての } p\mid q(t), pt\mid P(z)\text{ に対して}\chi_\nu(pt)=1.\end{aligned}$$

したがってこのとき上式の右辺の第二項部分は, $z_n\le p<z_{n-1}$ である場合 $W(p)\le W(z_n)$ が成立することに注意すると,

$$\begin{aligned}&\sum_{p<z}\frac{\omega(p)}{p}\frac{W(p)}{W(z)}\sum_{t|P_{p^+,z}}\frac{\chi_v(t)(1-\chi_v(pt))}{t}\omega(t) \qquad (v=1,2)\\ \le\ & \sum_{n=1}^{r}\frac{W(z_n)}{z}\sum_{z_n\le p<z_n-1}\frac{\omega(p)}{p}\sum_{t|P_{p^+,z}}\frac{\chi_v(t)(1-\chi_v(pt))}{t}\omega(t) \qquad (v=1,2).\end{aligned}$$

というように評価できる. ここで, 以下の項以外の項は消えることに注意する.

$$\chi_v(t) \le 1, \quad 0 < \chi(pt).$$

すると, この条件は $\nu(t) = 2b - v + 2n - 1$ を意味しているので, 以下の評価を得る.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{r} \frac{W(z_n)}{z} \sum_{z_n \le p < z_n - 1} \frac{\omega(p)}{p} \sum_{t | P_{p^+, z}} \frac{\chi_v(t)(1 - \chi_v(pt))}{t} \omega(t) \qquad (v = 1, 2) \\
\le\ &\sum_{n=1}^{r} \frac{W(z_n)}{W(z)} \sum_{\substack{d | P_{z_n, z} \\ \nu(d) = 2b - v + 2n}} \frac{\omega(d)}{d} \qquad (v = 1, 2).
\end{aligned}$$

したがって最終的に以下の形の評価を得る.

$$\begin{aligned}
&\sum_{p < z} \frac{\omega(p)}{p} \frac{W(p)}{W(z)} \sum_{t | P_{p^+, z}} \frac{\chi_v(t)(1 - \chi_v(pt))}{t} \omega(t) \qquad (v = 1, 2) \\
\le\ &\sum_{n=1}^{r} \frac{W(z_n)}{W(z)} \frac{1}{(2b - n + 2n)!} \left(\sum_{z_n \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} \right) \qquad (v = 1, 2).
\end{aligned}$$

ある実定数 c_1 が存在して, 以下の不等式が成立することを仮定する.

$$\frac{W(z_n)}{W(z)} \le e^{2(n\lambda + c)} \qquad n = 1, \cdots, r, \qquad c = \frac{c_1}{\log z}.$$

すると上記不等式から以下の評価が従う.

$$\sum_{z_n \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} \le \sum_{z_n \le p < z} \log \frac{1}{1 - \omega(p)/p} = \log \frac{W(z_n)}{W(z)} < 2(n\lambda + c).$$

したがって注目している不等式は, $(2b - v + 2n)! \le (2n)!(2n)^{2b-v}$ であることを考えると以下のように評価される.

$$\sum_{n=1}^{r} e^{2n\lambda + 2c} \frac{(2n\lambda + 2c)^{2b - v + 2n}}{(2b - v + 2n)!} \le e^{2c} (\lambda + C)^{2b - v} \sum_{n=1}^{r} \frac{(2ne^{-1})^{2n}}{(2n)!} \left(\left(1 + \frac{c}{n\lambda}\right)^{2n} \left(\lambda e^{1+\lambda}\right)^{2n} \right).$$

またここで $(ne^{-1})^n / n!$ は単調減少関数であり, 不等式 $(1 + c/n\lambda)^{2n} \le e^{2c/\lambda}$ が成立することを観察しておく. したがって今考えている和は以下のように評価される.

$$\begin{aligned}
&e^{2c} (\lambda + C)^{2b - v} \sum_{n=1}^{r} \frac{(2ne^{-1})^{2n}}{(2n)!} \left(\left(1 + \frac{c}{n\lambda}\right)^{2n} \left(\lambda e^{1+\lambda}\right)^{2n} \right) \\
\le\ &e^{2c} (\lambda + c)^{2b - v} 2e{-}2e^{2c/\lambda} \sum_{n=1}^{r} (\lambda e^{1+\lambda})^{2n} \\
=\ &\frac{2\lambda^{2b - v + 2} e^{2\lambda}}{1 - \lambda^2 e^{2 + 2\lambda}} \left(1 + \frac{c}{\lambda}\right)^{2b - v} e^{2c(1 + 1/\lambda)} \le \frac{2\lambda^{2b - v + 2} e^{2\lambda}}{1 - \lambda^2 e^{2 + 2\lambda}} e^{(2b - v + 4)c/\lambda}.
\end{aligned}$$

したがって以上の議論から, $|\theta| \le 1$ とおいて

$$\frac{1}{W(z)}\sum_{d|P(z)}\mu(d)\chi_v(d)\frac{\omega(d)}{d} = 1+\theta 2\frac{2\lambda^{2b-v+2}e^{2\lambda}}{1-\lambda^2e^{2+2\lambda}}e^{(2b-v+4)c/\lambda} \qquad (v=1,2).$$

という形で表すことができる.

次に最初の式の誤差項にあたる部分について評価を行っていく. 条件 4.6, 5.2 の仮定と χ_v の定義, そして補題 5.6 を用いることで以下の評価を得る.

$$\begin{aligned}
&\sum_{d|P(z)}\mu(d)\chi_v(d)|R_d| \le \sum_{d|P(z)}\chi_v(d)\omega(d)\\
\le\ & \left(1+\sum_{p<z}\omega(p)\right)^{2b-v+1}\prod_{n=1}^{r-1}\left(1+\sum_{p<z_n}\omega(p)\right)^2.\\
\le\ & (1+\mathscr{A}(2\mathrm{Li}z+3))^{2b-v+1}\prod_{n=1}^{r-1}(1+\mathscr{A}(2\mathrm{Li}z_n+3))^2 \qquad (v=1,2).
\end{aligned}$$

また Λ を正の実数とし, 以下のように数列 z_n を定義する.

$$\log z_n = e^{-n\Lambda}\log z \qquad (n=1,\cdots,r-1,\ z_r=2).$$

さらに r を以下を満たすように定める.

$$\log z_{r-1} = e^{-(r-1)\Lambda}\log z > \log 2, \qquad e^{-r\Lambda}\log z \le \log 2.$$

すると以下の不等式が成立する.

$$e^{-(r-1)\Lambda} \le \frac{\log 2}{\log z} \le e^{-(r)\Lambda}.$$

したがってある定数 B_4 が存在していて, 先の結果である

$$\sum_{d|P(z)}\mu(d)\chi_v(d)|R_d| \le (1+\mathscr{A}(2\mathrm{Li}z+3))^{2b-v+1}\prod_{n=1}^{r-1}(1+\mathscr{A}(2\mathrm{Li}z_n+3))^2 \qquad (v=1,2).$$

という評価と合わせると,

$$\sum_{d|P(z)}\mu(d)\chi_v(d)|R_d| \le \left(\frac{B_4z}{\log z}\right)^{2b-v+1}\prod_{n=1}^{r-1}\left(\frac{B_4z_ne^{n\Lambda}}{\log z}\right) \qquad (v=1,2).$$

という評価を得る.

ここで,

$$\prod_{n=1}^{r-1}\left(\frac{B_4z_ne^{n\Lambda}}{\log z}\right) = \left(\frac{B_4z_ne^{\frac{1}{2}r\Lambda}}{\log z}\right)^{r-1}.$$

であることと, r の定義と B_4 が十分に大きいことから以下の不等式を得る

$$\left(\frac{B_4 z_n e^{\frac{1}{2}r\Lambda}}{\log z}\right) \leq \left(\frac{B_4 z_n e^{\frac{1}{2}\Lambda}}{\log z}\right)\sqrt{\frac{\log z}{\log 2}} < 1.$$

さらに z_n の定義から以下の評価を得る.

$$\prod_{n=1}^{r-1} z_n^2 = \exp\left\{2\log z \sum_{n=1}^{r-1} e^{-n\Lambda}\right\} \leq z^{2/e^{\Lambda}-1}.$$

これらの評価を前述の,

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_v(d)|R_d| \leq \left(\frac{B_4 z}{\log z}\right)^{2b-v+1} \prod_{n=1}^{r-1}\left(\frac{B_4 z_n e^{n\Lambda}}{\log z}\right). \qquad (v=1,2),$$

という評価と合わせることで以下の誤差項の部分の評価が得られる.

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_v(d)|R_d| = O\left(z^{2b-v+1+2/e^{\Lambda}-1}\right).$$

したがって定理が示される.

最後に仮定して話を進めていた以下の主張を証明する.

主張 5.8. ある実定数 c_1 が存在して以下の不等式が成立する.

$$\frac{W(z_n)}{W(z)} \leq e^{2(n\lambda+c)} \qquad n=1,\cdots,r, \qquad c=\frac{c_1}{\log z}.$$

証明. まず補題 5.6 から以下の評価が成立している.

$$\frac{W(z_n)}{W(z)} \leq \exp\left\{n\Lambda\kappa + \frac{2c_1 e^{n\Lambda}}{\log z}\right\} = e^{2c}\exp\left\{n\left(\Lambda\kappa + \frac{e^{n\Lambda}-1}{n}\frac{2c_1}{\log z}\right)\right\} \qquad n=1,\cdots,r.$$

ただしここで $c_1 = \frac{A_2}{2}\left(1 + A_1\kappa + \frac{A_1 A_2}{\log 2}\right)$ と置いている. $\Lambda > 0$ であるので

$$\frac{e^{n\Lambda}-1}{n} \leq \frac{e^{r\Lambda}-1}{r},$$

が成立している. これにより r の定義の不等式は以下のように書き換えることができる.

$$\Lambda\frac{e^{r\Lambda}}{r\Lambda} \leq \Lambda\frac{e^{\Lambda}}{\log 2}\frac{\log z}{\log(\log z/\log 2)}.$$

上式を用いることで最終的に $\frac{W(z_n)}{W(z)}$ に関する評価は以下のように書き換えることができる.

$$\frac{W(z_n)}{W(z)} \leq e^{2c}\exp\left\{n\Lambda\kappa\left(1 + \frac{2c_1 e^{\Lambda}}{\kappa\log 2}\frac{1}{\log(\log z/\log 2)}\right)\right\} \qquad n=1,\cdots,r.$$

最後に $\Lambda = \frac{2\lambda}{\kappa}\frac{1}{1+\epsilon}$, $\epsilon = \frac{1}{200e^{1/\kappa}}$ ととれば主張 5.8 の不等式が導かれることを確認する．この Λ, ϵ のもとで, 以下の不等式

$$e^{2\lambda/\kappa} - e^{\Lambda} \leq \left(\frac{2\lambda}{\kappa} - \Lambda\right) e^{2\lambda/\kappa} \leq \Lambda\epsilon e^{1/\kappa},$$

が成立することと, $\frac{e^{\Lambda}-1}{\Lambda} \leq 1$ であることを合わせると,

$$\frac{e^{2\lambda/\kappa}-1}{e^{\lambda}-1} \leq 1 + \frac{\epsilon\Lambda e^{1/\kappa}}{e^{\Lambda}-1} \leq 1 + \epsilon e^{1/\kappa} = \frac{2.01}{2},$$

という評価を得る． □

最終的にはこの結果を誤差項の評価の式に代入することで定理の評価を得る．以上で定理 5.7 の証明を完了する． □

上記で定理 5.7 の証明自体は完了したが, このままでは定理 5.7 の結果の強さがわからないので, 双子素数問題に本定理を適用することでその威力を確認する．既に示されている篩法を用いた双子素数問題に関する定式化は以下のものである．

$$S\left(\{n(n+2) : n \leq x; \wp, z\}\right) = \left|\left\{n \middle| n \leq x, \left(n, \prod_{p<z} p\right) = 1, \left(n+2, \prod_{p<z} p\right) = 1\right\}\right|.$$

ここで $X = x$, $\omega(2) = 1$, $\omega(p) = 2$, $p > 2$ とする．また条件 5.2 を $\kappa = A_2 = A_0 = 2$ として適用し, 定理 5.7 と併せて, $b = 1$ とすることで以下の評価を得る．

$$\begin{aligned} S\left(\{n(n+2) : n \leq x; \wp, z\}\right) &= \left|\left\{n \middle| n \leq x, \left(n, \prod_{p<z} p\right) = 1, \left(n+2, \prod_{p<z} p\right) = 1\right\}\right| \\ &\geq \frac{1}{2}\prod_{2<p<z}\left(1 - \frac{2}{p}\right)\left\{1 - \frac{2\lambda^2 e^{2\lambda}}{1-\lambda^2 e^{2\lambda+2}}\exp\left(\frac{4c_1}{\lambda\log z}\right) + O\left(\frac{\log^2 z z^{1+2.01/e^{\lambda}-1}}{x}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

さらに条件にあう λ と u を以下を満たすようにとってくる．

$$1 - \frac{2\lambda^2 e^{2\lambda}}{1-\lambda^2 e^{2+2\lambda}} > 0,\ 1 + \frac{2.01}{e^{\lambda}-1} < u < 8.$$

すると, $z = x^{\frac{1}{u}}$ とすると上式 5.9 の右辺は, $x \to \infty$ のとき

$$\exp\left(\frac{4c_1}{\lambda\log z}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right).$$

という評価を得る．したがって $\Omega(n)$ で n の素因子の個数を表すとすると, 上式 5.9 に現れる n の素因数は全て z 以上であるので以下の不等式が成立する．

$$x \geq z^{\Omega(n)} = x^{\Omega(n)/u}, \qquad x \geq x^{\Omega(n+2)/u}.$$

したがって λ, u のとりかたから $u < 8$ 以下, つまり 7 以下であることが分かる．

以上の議論から“n と $n+2$ が 7 個以下の素因子を持つような自然数 n は無限に存在している”ということがわかる．これは双子素数予想の類似の結果．しかしこのままではまだ結果としては弱く，後にのべる定理 5.12 を同様に適用することによって“p と $p+2$ が 7 個以下の素因子を持つような素数 p は無限に存在している”という事実がわかる．以下で早速定理 5.12 について述べる．

まず準備として以下 2 つの条件を定義する．

条件 5.10. 剰余項 R_d に対して以下の評価が成立する．

$$|R_d| \le L\left(\frac{X\log X}{d}+1\right){A_0'}^{\nu(d)}, \qquad \mu(d)\ne 0, \qquad (d,\overline{\wp})=1.$$

条件 5.11. ある正の定数 $0<\alpha<1$ と，それに依存する正の定数 $1\le U$ と C_0 が存在して，以下の評価が成立する．

$$\sum_{d<X^{\alpha}\log^{-C_0}X(d,\overline{\wp})=1}\mu^2(d)|R_d| = O\left(\frac{X}{\log^{\kappa+U}}X\right).$$

以上の準備のもと，定理 5.12 は以下の主張である．この定理の証明は定理 5.12 の証明と同様に行われるため省略する．

定理 5.12. 条件 5.1, 5.2, 5.10, 5.11 を仮定する．また b を正の整数，λ を以下の条件を満たす実数とする．

$$0<\lambda e^{1+\lambda}<1.$$

また c_1 を定理 5.7 の証明のように $c_1=\frac{A_2}{2}\left(1+A_1\kappa+\frac{A_1A_2}{\log 2}\right)$ と置く．そしてさらに u を以下のように定義する．

$$u=\frac{\log X}{\log z}.$$

また U を条件 5.11 の定数とする．このとき以下の 2 つの上からと下からの評価が成立する．

$$\begin{aligned} S(\mathscr{A};\wp,z) &\le XW(z)\left\{1+2\frac{\lambda^{2b+1}e^{2\lambda}}{1-\lambda^2e^{2+2\lambda}}\exp\left((2b+3)\frac{c_1}{\lambda\log z}\right)\right\}\\ &+\quad XW(z)\left\{O\left(Lz^{-\alpha u+2b+2.01/e^{2\lambda\kappa}-1}u^{C_0+1}\log^{C_0+\kappa+1}z\right)+O_U\left(u^{-\kappa}\log^{-U}X\right)\right\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(\mathscr{A};\wp,z) &\ge XW(z)\left\{1+2\frac{\lambda^{2b+1}e^{2\lambda}}{1-\lambda^2e^{2+2\lambda}}\exp\left((2b+2)\frac{c_1}{\lambda\log z}\right)\right\}\\ &+\quad XW(z)\left\{O\left(Lz^{-\alpha u+2b+2.01/e^{2\lambda\kappa}-1}u^{C_0+1}\log^{C_0+\kappa+1}z\right)+O_U\left(u^{-\kappa}\log^{-U}X\right)\right\}.\end{aligned}$$

先ほども言及したが，この定理 5.12 を用いると双子素数予想と類似した (より弱い結果である) 以下の主張が示される．

主張 5.13. p と $p+2$ が 7 個以下の素因子を持つような素数 p が無限に存在している．

このようにして組み合わせ論的篩の手法，特に Brun の篩は解析数論に貢献した．現在では篩法を用いて更に良い結果が知られている．その中でも有名なものは Jing-run Chen によって発見された，以下の定理 [9], p.320, Theorem 11.1 である．この結果は Selberg の方法や weighted sieve, large sieve などさまざまな手法を使って証明された．

定理 5.14 (Chen)**.** ある絶対定数 N_0 が存在して, N_0 以上の偶数 N について以下の不等式が成立する. ただし P_2 は高々二つの素因子をもつある整数を表す.

$$|p|p \leq N, N-p = P_2| > 0.67 \prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{2<p|N} \frac{p-1}{p-2} \frac{N}{\log^2 N}.$$

この定理は N が十分大きいときを考えると素数 p であって, $p+2$ が高々二つの素因子しか持たないもの (これは準素数と呼ばれることもある) が無限に存在していることを示している. この結果は双子素数予想に迫る篩の結果として有名なものである.

6 Fundamental Lemma

この節では本論文の主定理とは直接関係はないが, 一般に Fundamental Lemma と呼ばれる二つの定理について解説する. また以下で述べる定理については簡単のため (また応用上重要である)$z \ll X$ である状況についてのみ言及する. まず本節の定理について述べる前に, 証明に必要な補題 6.1[[9, p.56], (3.17)] を証明なしで紹介する.

補題 6.1. 条件 5.1, 5.2, 4.6 を仮定する. このとき X は十分大きく, $\log z \leq \sqrt{\log X}$ を仮定し. θ, θ' は絶対値が 1 以下の実数とする. このとき以下の式が成立する.

$$S\left(\mathscr{A}; \wp, z\right) = XW(z)\left\{1 + \theta e^{-\sqrt{\log X}}\right\} + \theta' X^{\frac{1}{2}}. \tag{6.2}$$

以上の準備の元で Fundamental Lemma と呼ばれる篩法で重要な定理を紹介する.

定理 6.3 (Fundamental Lemma)**.** 条件 5.1, 5.2, 4.6 を仮定する. また X, z を $X \geq z$ を満たす正の実数として,

$$u \overset{\text{def}}{=} \frac{\log X}{\log z},$$

と定義する. このとき以下の式が成立する.

$$S(\mathscr{A}; \wp, z) = XW(z)\left\{1 + O\left(\exp\left(-u\left(\log u - \log\log 3u - \log\kappa - 2\right)\right)\right) + O\left(\exp\left(-\sqrt{\log X}\right)\right)\right\}.$$

証明. 今 X が z よりも十分大きいと仮定していることに注意すると, これは u が十分大きいことを意味している. またここで $\log \leq u$ の場合, 定理は先の補題 6.1 から従う.

したがって以下では,

$$\log z > u,$$

の場合のみを考える. ここで定理 5.7 において b, λ を以下のように選択する.

$$b = \left[\frac{u}{2} - \frac{u}{2\log u}\right], \lambda = \frac{e\kappa \log u}{u}.$$

したがって定理 5.7 より以下の評価を得る.

$$\begin{aligned} S(\mathscr{A}; \wp, z) &= XW(z)\left\{1 + O\left(\exp\left(-2b\log\frac{1}{\lambda} + 2b\frac{c_1}{\lambda\log z}\right)\right)\right\} \\ &+ O\left(\exp\left\{-\log z\left(u - 2b - \frac{e\kappa}{2\lambda}\right) + \kappa\log\log z\right\}\right). \end{aligned}$$

ここで上式の誤差項の部分について上述の b, λ の値を代入して計算すると以下の評価を得る.

$$
\begin{aligned}
& O\left(\exp\left\{-\left(u-\frac{u}{\log u}\right)\log\left(\frac{u}{e\kappa\log u}\right)+O\left(\frac{u}{\log u}\right)\right\}\right)+O\left(\exp\left\{-\log z\frac{u}{2\log u}+\kappa\log\log z\right\}\right)\\
= \; & O\left(\exp\left\{-u\left(\log u-\log\log u-\log\kappa-2\right)\right\}\right)+O\left(\exp\left(-\sqrt{\log X}\right)\right).
\end{aligned}
$$

したがって所望の定理を得る. $\square$

また同様の議論を適用することで以下の定理も示される.

定理 6.4. 条件 5.1, 5.2, 5.10, 5.11 を仮定する. また X, z を $X \geq z$ を満たす正の実数として, u を以下のように定義する.

$$
u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\log X}{\log z}.
$$

また U を条件 5.11 の定数とする. このとき以下の式が成立する.

$$
S(\mathscr{A};\wp,z)=XW(z)\left\{1+O\left(\exp\left(-\alpha u\left(\log u-\log\log 3u-\log\left(\frac{x}{\alpha}\right)-2\right)\right)\right)+O_U\left(L\log^{-U}X\right)\right\}.
$$

証明. 以下二つの場合に分けて証明を進める.

まず, $u \geq \log z$ である場合について考えていく.

$$
S(\mathscr{A};\wp,z)=XW(z)\left\{1+O(\exp(-\alpha u(\log u-\log\log 3u-\log\left(\frac{x}{\alpha}\right)-2)))\right\}.
$$

$(\omega_2(\kappa))$ の仮定のもとで $W(z)=O(\log^{\kappa} z)$ が成立することを考慮すると,

$$
S(\mathscr{A};\wp,z)=XW(z)\left\{1+O\left(\frac{\log^{\kappa}(z)}{X}\sum_{d|P(d)}|R_d|\right))\right\}.
$$

となる. 上式の誤差項の部分のみを取り出して,

$$
\begin{aligned}
O\left(\frac{\log^{\kappa}(z)}{X}\sum_{d|P(d)}|R_d|\right) &\leq O\left(\frac{\log^{\kappa}(z)}{X}\left\{\sum_{\substack{d<X^{\alpha}\log^{-C_0}X\\(d,\wp)=1}}|R_d|+\sum_{d\geq X^{\alpha}\log^{-C_0}X}|R_d|\right\}\right)\\
&\leq O_U\left(\frac{\log^{\kappa}(z)}{X}\frac{X}{\log^{\kappa+U}X}+\frac{\log^{\kappa}(z)}{X}\sum_{d\geq X^{\alpha}\log^{-C_0}X}|R_d|\right)\\
&\leq O_U\left(\frac{\log^{\kappa}(z)}{X}\frac{X}{\log^{\kappa+U}X}+\frac{\log^{\kappa}(z)}{X}2LX^{1-\alpha}\log^{C_0+1}X\sum_{d\geq X^{\alpha}\log^{-C_0}X}{A_0}^{v(d)}\right).
\end{aligned}
$$

2,3 行目の式変形は [9, p.65] の式変形を用いている．したがって

$$
\begin{aligned}
& O_U\left(\frac{\log^{\kappa}(z)}{X}\frac{X}{\log^{\kappa+U}X}+\frac{\log^{\kappa}(z)}{X}2LX^{1-\alpha}\log^{C_0+1}X\sum_{d\geq X^{\alpha}\log^{-C_0}X}{A_0}^{v(d)}\right)\\
= \;& O_U\left(\log^{-U}X\right)+O_U\left(LX^{-\alpha}\log^{C_0+1+\kappa}X\sum_{d\geq X^{\alpha}\log^{-C_0}X}{A_0}^{\nu(d)}\right)\\
\leq \;& O_U\left(\log^{-U}X\right)+O_U\left(LX^{-\alpha}\log^{C_0+1+\kappa}X\sum_{d\geq X^{\alpha}\log^{-C_0}X}{A_0}^{\nu(d)}\right)\\
\leq \;& O_U\left(\log^{-U}X\right)+O_U\left(LX^{-\alpha}\log^{C_0+1+\kappa}X\,(1+A_0)^{\pi(z)}\right).
\end{aligned}
$$

上式の式変形は [9, p.31] の議論を用いている．したがって以下の評価を得る．

$$
S(\mathscr{A};\wp,z)=XW(z)\left\{1+O_U\left(\log^{-U}X\right)\right\}+O\left(LX^{-\frac{1}{2}\alpha}\log^{C_0}X\right).
$$

したがって $u\geq\log z$ の場合の証明を終える．

次に $u\leq\log z$ の場合について考える．この場合は,

$$
b=\left[\frac{\alpha}{2}u-\frac{\alpha}{2}\frac{u}{\log u}\right],\quad \lambda=\frac{e\kappa\log u}{\alpha u},
$$

と置いて, 定理 6.3 と同様に定理 5.12 を用いて計算をすると定理の結果を得る． □

7 Brun-Titchmarsh Inequality

この節では論文の主定理の証明用いる式 2.5 の下からの評価のために重要な, 篩法の結果である Brun-Titchmarsh Inequality について紹介する．この定理は篩の技法を用いて, 算術級数中の素数の個数を明示的に与える強い結果である．定理の主張は以下の通りである．

定理 7.1 (Brun-Titchmarsh Inequality, [9], p.110)**.** $1\leq k\leq x$, とし, $(k,l)=1$ とする．このとき以下の評価が成立する．

$$
\pi(x;k,l)\leq\frac{x}{\phi(k)\log(\sqrt{x/k})}\left(1+\frac{4}{\log(\sqrt{x/k})}\right).
$$

さらに以下の評価も成立する．

$$
\pi(x;k,l)\leq\frac{3x}{\phi(k)\log(x/k)}.
$$

この不等式は通常 Brun-Titchmarsh Inequality と呼ばれている．この定理の証明のために以下では二つの定理を解説する．

まず初めに定理 7.2 について紹介する．詳細な証明については言及せず, [9, p.106] を参照とする．

定理 7.2. K を偶数とし, 実数 y, x は以下の不等式を満たしているとする.

$$K < y \leq x.$$

このとき実数 $z \geq 2$ に対して, $z \geq 9$ の範囲で以下の不等式

$$\Sigma_2 \leq \left(\frac{z-1}{2}\right)^2.$$

を満たす実数 Σ_2 が存在していて, 以下の評価が成立する.

$$|\{n | x-y < n \leq x, n \equiv l_1 \pmod{K}, (n, P(z)) = 1\}| \leq \frac{y}{\phi(K)\log z} + \Sigma_2.$$

またさらに $z \geq e^6$ の範囲では Σ_2 に対して以下の不等式が成立する.

$$\Sigma_2 \leq 24\frac{K}{\phi(K)}\frac{z^2}{\log^2 z}.$$

以上の準備を元に次の定理について紹介する. 定理の詳細な証明は省略するが, Brun-Titchmarsh Inequality はこの定理から直ちに従う.

定理 7.3. x, y を実数とする. また k, l を以下を満たす正の実数とする.

$$1 \leq k < y \leq x, \qquad (k, l) = 1.$$

このとき以下の不等式が成立している.

$$\pi(x; k, l) - \pi(x-y; k, l) < \frac{2y}{\phi(k)\log\left(\frac{y}{k}\right)}\left(1 + \frac{8}{\log\left(\frac{y}{k}\right)}\right).$$

またさらに以下の評価も成立する.

$$\pi(x; k, l) - \pi(x-y; k, l) < \frac{3y}{\phi(k)\log\left(\frac{y}{k}\right)}.$$

8 一次式型の素数の個数の評価定理

本論文は主定理の証明に必要な式 2.4 の評価に用いる篩の結果の紹介である. 本節で扱う定理 8.1 について詳細な証明は [9, p.172] を参照とする. この節で紹介する定理は Selberg upper bound method という篩法で重要になる手法の応用でもある. この手法は様々な応用を持っているが, 今回のように多項式型の素数の集合をふるう際にも威力を発揮する. またこの定理は一次型の素数の個数を明示的な不等式で評価できる点が有用である.

定理 8.1 (Selberg method)**.** g を自然数として, $a_i, b_i, \qquad (i = 1, \cdots, g)$ を整数として以下の式を満たすとする.

$$E \overset{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{g} a_i \prod_{1 \leq r < s \leq g} (a_r b_s - a_s b_r) \neq 0.$$

そして $\rho(p)$ によって以下の合同式の解の個数を表すことにする．

$$\prod_{1\leq i\leq g}(a_in+b_i)\equiv 0 \pmod p.$$

そしてさらに $\rho(p)<p$ が全ての素数 p について成立すると仮定する．実数 y,x を $1<y\leq x$ を満たす実数とする．このとき以下の評価が成立する．

$$\begin{aligned} &|\{n : x-y<n\leq x, a_in+b_i \text{は素数}, i=1,\cdots,g\}| \\ \leq\ & 2^g g!\prod_p\left(1-\frac{\rho(p)-1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-g+1}\frac{y}{\log^g y}\left\{1+O\left(\frac{\log\log 3y+\log\log 3|E|}{\log y}\right)\right\}. \end{aligned}$$

上記定理は篩の多項式型をした素数の個数についての評価の応用例の一つである．

9 主定理の証明

以下では Introduction でも言及したように 7 つの補題を用いて主定理を証明する．同じく 2 節での観察により，主定理の証明のためには以下の二つの項の評価が重要である．

$$\left(\sum_{k\leq x,(k,M)=1}R(k,x)\right)^2, \qquad \sum_{k\leq x,(k,M)=1}R(k,x)^2.$$

補題 9.6 は上式左の項を評価し，補題 9.8 は上式右側の項を評価する補題である．篩法の結果は主に補題 9.8 で用いられている．早速上記主定理の証明に必要な 7 つの補題を証明していく．

補題 9.1. *$M\geq 2$ を整数，$p\leq x$ を $(p,M)=1$ であるような素数とする．また $k(p)$ によって $\{n(M^n)^{-1}\}_{n\geq 1}$ なる数列の $\pmod p$ での周期を表す．さらに $l(p)$ によって $\pmod p$ における乗法的な M の周期 (つまり $M^n\equiv 1 \pmod p$ となる最小の正の整数 n のこと) とする．このとき $k(p)$ は well-defined であり，$k(p)=pl(p)$ が成り立つ．*

証明. まず考える数列に周期があることを示す．簡単に確認できるように，全ての正の整数 n に対して以下の式が成立している．

$$n(M^n)^{-1}\equiv(n+pl(p))\left(M^{n+pl(p)}\right)^{-1} \pmod p.$$

ここで k_1,k_2 が周期であるとき，$\gcd(k_1,k_2)$ もまた周期であることに注意すると，$k(p)$ は $pl(p)$ の約数であることがわかる．

次に周期の定義から，全ての正の整数 n に対して

$$n(M^n)^{-1}\equiv(n+k(p))\left(M^{n+k(p)}\right)^{-1} \pmod p.$$

が成立する．したがって $nM^{n+k(p)}\equiv(n+k(p))M^n \pmod p$ が全ての自然数 n で成立している．ここで $n\equiv 0 \pmod p$ とすると，$0\equiv k(p)M^n \pmod p$ であり，$k(p)\equiv 0 \pmod p$ を得る．さらに $n\equiv 1 \pmod p$ とし，$k(p)\equiv 0 \pmod p$ と合わせると，

$$M^{n+k(p)}\equiv M^n \pmod p.$$

を得て，$M^{k(p)}\equiv 1 \pmod p$ を得る．したがって $l(p)\mid k(p)$ となる．したがって先ほどの結果と合わせると $k(p)=pl(p)$ を得る． □

次に以下の補題は補題 9.8 で篩の定理を適用するための前提条件を保証する補題である.

補題 9.2. $x_2 > x_1$ を 0 でない実数とし, $M > 0$ を 1 ではない実数とする. このとき以下が成立する.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x_1 & M^{x_1} & 1 \\ x_2 & M^{x_2} & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

証明.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x_1 & M^{x_1} & 1 \\ x_2 & M^{x_2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

と仮定すると, 行基本変形と列の基本変形を 2 回ずつ繰り返すことにより, 以下の式を得る.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x_1 & 0 & 0 \\ 0 & M^{x_2} - \frac{x_2}{x_1}M^{x_1} & 1 - \frac{x_2}{x_1} \end{vmatrix} = 0.$$

上式は

$$M^{x_2} - 1 = \frac{x_2}{x_1}M^{x_1} - \frac{x_2}{x_1}.$$

と同値であり, したがって

$$\frac{M^{x_2} - 1}{x_2 - 0} = \frac{M^{x_1} - 1}{x_1 - 0}.$$

と同値. しかしここで関数 $y = \frac{M^x - 1}{x}$ の導関数は

$$\frac{\log M M^x x - M^x + 1}{x^2}.$$

であることに注意すると, この評価を得るためには $x > 0$ の範囲において

$$M^x (x \log M - 1) + 1 > 0.$$

であれば良いことがわかる. さらにこの部分の関数の導関数を計算すると

$$M^x x \log^2 M \geq 0.$$

が成立していることから所望の評価を得る. □

次に以下必要となる記号などを定義する.

定義 9.3. M を 2 以上の整数とする. また p を M と互いに素な素数とする. 自然数 y に対して $\nu(p, y)$ を以下のように定義する.

$$\nu(p, y) \overset{\text{def}}{=} \left| \left\{ 1 \leq n \leq \middle| \, n(M^n)^{-1} \equiv y \pmod{p} \right\} \right|.$$

また $\nu(p)$ を以下で定義する.

$$\nu(p) \overset{\text{def}}{=} \max \nu(p, y) | 1 \leq y \leq p.$$

またこれらの記号を用いて素数 p が悪いとは以下の不等式が成立していることと定義する.

$$\nu(p) > 2[p^{\frac{6}{7}}] + 2.$$

また P^* で悪い素数全体の集合を表す. さらに実数 x に対して $P^*(x)$ を以下で定義する.

$$P^*(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} P^* \cap [1, x].$$

準備の元で補題 9.4, 9.5 について述べる. これらの補題は補題 9.8 の式を評価するのに用いられる. この補題は" ある程度悪い素数の個数が少ない "ということを主張している. またこの補題については紹介に留め詳細な証明は補題に記載の参考文献 [10], p.42, Lemma2.3 を参照とする.

補題 9.4 ([10], p.42, Lemma2.3)**.** *悪い素数の個数について以下の評価が成立する.*

$$P^*(x) \ll x^{\frac{6}{7}}.$$

かつ以下の評価も成立する.

$$\sum_{n \in P^*} \frac{\log(p)}{p} < \infty.$$

次の補題 9.5 は 9.6 を証明するために用いられる. 補題 9.5 の意義は, 漸近評価ではなく明示的な不等式で評価できていることと, N の (重複度によらず) 素因数のみに依存する定数を用いて評価できていることにある. またこの定理についても紹介に留め, 詳細な証明は参考文献 [7], p.258, Theorem 2 を参照とする.

補題 9.5 ([7], p.258, Theorem 2)**.** *$p_1, ...p_t$, を与えられた素数 t 個の組として, N を素因数が $p_1, ..., p_t$ であるような自然数とする. このときある, 与えられた t 個の素数にのみ依存する正の定数 c_1, c_2 が存在して, $x \geq N^{c_2}$ なる実数 x に対して以下の不等式が満たされる.*

$$\pi(x; N, b) \geq \frac{c_1 x}{N \log x}.$$

ただし c_2 は, その取り方から, 1 より大きい定数としても定理の成立に問題はないことに注意しておく.

ここで以下では c_1, c_2 を, 補題 9.5 の与えられた素数の組を M の素因子の集合としたときに定まる定数として, c_3 を以下で定義する.

$$c_3 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2c_2 - 1}.$$

ここで $n \leq c_3 \frac{\log x}{\log M}$, $M \geq 2$ の範囲において以下の不等式が成立することを説明する.

$$xM^n \geq (M^{n+1})^{c_2}$$

まず $n \leq c_3 \frac{\log x}{\log M}$ という式は以下の式と同値である.

$$M^n \leq x^{c_3}.$$

さらに $c_3 = \frac{1}{2c_2 - 1}$ であることから, 上式を変形することで更に以下が成立している.

$$M^n \leq x^{c_3} = x^{\frac{1}{2c_2 - 1}} \Leftrightarrow M^{2nc_2 - n} \leq x.$$

また上記の不等式と, $2nc_2 - n \geq nc_2 - n + c_2$ である事実を用いると,

$$xM^n \geq (M^{n+1})^{c_2} \Leftrightarrow x \geq M^{nc_2+c_2-n},$$

であることから,

$$x \geq M^{2nc_2-n} \geq M^{nc_2+c_2-n},$$

となり求める不等式を得る.

次に以下では主定理の結果の評価に必要な以下の項の下からの評価についての補題を証明する.

$$\left(\sum_{k \leq x, (k,M)=1} R(k,x) \right)^2 .$$

補題 9.6. M を 2 以上の整数とする. このとき十分大きな実数 x に対して以下の評価が成立する.

$$\sum_{k \leq x, (k,M)=1} R(k,x) \gg \frac{c_1 x \phi(M)}{c_2 M^2 \log M}.$$

証明. まず $r(k,n)$ の定義から直ちに,

$$\begin{aligned}
\sum_{k \leq x, (k,M)=1} R(k,x) &= \sum_{k \leq x, (k,M)=1} \sum_{n \leq \frac{c_3 x}{\log M}} r(k,n) \\
&= \sum_{n \leq \frac{c_3 x}{\log M}} \sum_{k \leq x, (k,M)=1} r(k,n) \\
&= \sum_{n \leq \frac{c_3 x}{\log M}} \left| \{k | kM^n + n \text{ は素数}, (k,M)=1, k \leq x\} \right| .
\end{aligned}$$

なる等式が成立する. また $kM^n + n$ 型の素数の中で

$$rM^{n+1} + (M^n + n) = M^n(rM+1) + n.$$

の形だけ抜き出して総和を取ることによって以下の不等式が成立する.

$$\sum_{n \leq \frac{c_3 x}{\log M}} \left| \{k | kM^n + n \text{ は素数}, (k,M)=1, k \leq x\} \right| \geq \sum_{n \leq \frac{c_3 x}{\log M}, (n,M)=1} \pi \left(xM^n + n, M^{n+1}, M^n + n \right) .$$

ここでさらに, 簡略化のために以下の n についての条件を (A) という記号で表すこととする.

$$n \leq \frac{c_3 \log x}{\log M}, (n,M) = 1$$

すると $xM^n \geq (M^{n+1})^{c_2}$ が成立しているため, 補題 9.5 が適用でき,

$$\sum_{(\mathrm{A})} \pi \left(xM^n + n, M^{n+1}, M^n + n \right) \geq c_1 \sum_{(\mathrm{A})} \frac{xM^n + n}{M^{n+1} \log(xM^n + n)}.$$

なる不等式が得られる．ここで c_1, c_2 は補題 4 から M の素因数にのみ依存する定数であることに注意する．上記評価が成立しているのは補題 9.5 で M の素因数にのにみ依存する定数で下から評価できることが効いている．

さらにここで,

$$\frac{xM^n+n}{M^{n+1}\log(xM^n+n)}\times\frac{M\log x}{x}=(M^n+\frac{n}{x})\times M^n\times\frac{\log x}{\log(xM^n+n)}.$$

であることに注意する．さらにこれは x が十分大きいときには正の定数で下から抑えられるため以下の評価が成立する

$$c_1\sum_{(\mathrm{A})}\frac{xM^n+n}{M^{n+1}\log(xM^n+n)}\gg c_1\sum_{(\mathrm{A})}\frac{x}{M\log x}.$$

したがって (A) の条件を満たす n の個数を考えると以下の式を得る．

$$c_1\sum_{(\mathrm{A})}\frac{x}{M\log x}\gg c_1\left(c_3\frac{\log x}{\log M}\right)\frac{\phi(M)}{M}\times\frac{x}{M\log x}=c_1c_3\frac{x\phi(M)}{M^2\log M}.$$

さらに補題 9.5 から c_2 は構成から 1 より大と仮定しても問題ないので, $c_3c_2=\frac{1}{2-\frac{1}{c_2}}\geq 1$ である．このことを用いると以下の評価が成立する．

$$c_1c_3\frac{x\phi(M)}{M^2\log M}\gg c_1(c_2)^{-1}\frac{x\phi(M)}{M^2\log M}.$$

が成立している．したがって最終的に以下の評価が成立する．

$$\sum_{k\leq x,(k,M)=1}R(k,x)\gg\frac{c_1x\phi(M)}{c_2M^2\log M}.$$

よって補題が示される． □

以下の補題は主定理の証明で補題 9.8 で用いられる技術的な補題である．しかし篩法の結果を用いる上での前提条件を保証する重要な補題となっている．

補題 9.7. M を 2 以上の整数, $(n_1n_2,M)=1$, p を素数とするとき, $\rho(p)$ によって以下の l についての合同式の解の個数を表す．また j は任意の整数とする．

$$(lM^{n_1+1}+jM^{n_1}+n_1)(lM^{n_2+1}+jM^{n_2}+n_2)\equiv 0 \pmod p.$$

このとき $\rho(p)$ について以下が成立する．

$$\rho(p)=\begin{cases}2 & ((p,n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})=1)\\ 1 & ((p,M)=1,p\mid(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1}))\\ 0 & (p\mid M).\end{cases}$$

証明. $p|M$ と仮定すると, $(n_1n_2, M)=1$ という条件から合同式に解は存在せず, $\rho(p)=0$. 次に以下 $(p,M)=1$ の場合を考えるが, このとき補題の合同式の解の個数は高々2個であることに注意する. l_1, l_2 をそれぞれ, 以下の合同式の解とする.

$$(lM^{n_1+1}+jM^{n_1}+n_1)\equiv 0 \pmod p, \qquad (lM^{n_2+1}+jM^{n_2}+n_2)\equiv 0 \pmod p.$$

それぞれの合同式に M^{n_2} と M^{n_1} を掛けて引くことによって, 以下の合同式を得る.

$$(l_1-l_2)M^{n_1+n_2+1}+n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1}\equiv 0 \pmod p.$$

したがって $(p,M)=1$ に注意すると以下の式が成立する.

$$l_1-l_2\equiv 0 \pmod p \leftrightarrow n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1}\equiv 0 \pmod p.$$

したがって題意が示される. □

最後に主定理の証明のために必要な項である式 2.5 を評価するための補題を示す. 本補題のなかで篩の結果である補題 7.1 と補題 8.1 が用いられている.

補題 9.8. *M を 2 以上の自然数とするとき以下の評価が成立する.*

$$\sum_{k\le x,(k,M)=1} R(k,x)^2 \ll \frac{x\phi(M)}{c_2M\log M}+\frac{x}{(c_2)^2\log^2(M)}.$$

証明. この定理の証明には [9] にも登場する篩の定理である, 定理 7.1 と定理 8.1 を用いる. 補題の不等式の左辺は以下のように書き直すことができる.

$$\sum_{k\le x,(k,M)=1}\ \sum_{n\le c_3\frac{\log x}{\log M}} r(k,n)+\sum_{k\le x,(k,M)=1}\ \sum_{n_1\ne n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}} r(k,n_1)r(k,n_2).$$

上式の前半部分をパート ①, 後半部分を ② とする.

まずパート ① について考える.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\le x,(k,M)=1}\ \sum_{n\le c_3\frac{\log x}{\log M}} r(k,n) = \sum_{n\le c_3\frac{\log x}{\log M}}\ \sum_{k\le x,(k,M)=1} r(k,n)\\
=&\sum_{n\le c_3\frac{\log x}{\log M}} |\{k\le x | kM^n+n \text{ は素数}, (k,M)=1\}|\\
=&\sum_{n\le c_3\frac{\log x}{\log M}}\ \sum_{1\le j\le M,(j,M)=1} |\{k\le x | kM^n+n \text{ は素数}, k\equiv j \pmod M\}|\\
=&\sum_{n\le c_3\frac{\log x}{\log M}}\ \sum_{1\le j\le M,(j,M)=1} \left|\{p\le xM^n+n \middle| p\equiv jM^n+n \pmod{M^{n+1}}\}\right|.
\end{aligned}$$

ここで定理 7.1 を x を xM^n+n として, k を M^{n+1} として, l を jM^n+n として適用し, 同じものを $\phi(M)$ 個まとめあげることで以下の評価を得る.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le c_3\frac{\log x}{\log M}}\ \sum_{1\le j\le M,(j,M)=1}\left|\{p\le xM^n+n \middle| p\equiv jM^n+n \pmod{M^{n+1}}\}\right| \\
\le\ & \sum_{n\le c_3\frac{\log x}{\log M},(n.M)=1}\frac{3(xM^n+n)\phi(M)}{\phi(M^{n+1})\log\left(\frac{xM^n+n}{M^{n+1}}\right)}.
\end{aligned}$$

またさらに以下で

$$\sum_{n\le c_3\frac{\log x}{\log M},(n.M)=1}\frac{3(xM^n+n)\phi(M)}{\phi(M^{n+1})\log\left(\frac{xM^n+n}{M^{n+1}}\right)}\ll(c_2)^{-1}\frac{x\phi(M)}{M\log M},$$

という評価を示す. 以下では $C_1(M),C_2(M),C_3(M)$ で M にのみ依存する定数を表すとする. すると以下のように式を書き換えることができる.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le c_3\frac{\log x}{\log M},(n.M)=1}\frac{3(xM^n+n)\phi(M)}{\phi(M^{n+1})\log\left(\frac{xM^n+n}{M^{n+1}}\right)}((c_2)^{-1}\frac{x\phi(M)}{M\log M})^{-1} \\
=\ & \sum_{n\le c_3\frac{\log x}{\log M},(n.M)=1}\frac{xM^n+n}{x(M^n\log\left(\frac{xM^n+n}{M^{n+1}}\right))}\times C_1(M) \\
=\ & \sum_{n\le c_3\frac{\log x}{\log M},(n.M)=1}\left(\frac{1}{\log\left(\frac{x}{M}+\frac{n}{M^{n+1}}\right)}+\frac{n}{xM^n\log\left(\frac{x}{M}+\frac{n}{M^{n+1}}\right)}\right)\times C_1(M).
\end{aligned}$$

さらに総和を n の個数分まとめあげることで以下の評価を得る.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le c_3\frac{\log x}{\log M},(n.M)=1}\left(\frac{1}{\log\left(\frac{x}{M}+\frac{n}{M^{n+1}}\right)}+\frac{n}{xM^n\log\left(\frac{x}{M}+\frac{n}{M^{n+1}}\right)}\right)\times C_1(M) \\
\le\ & C_2(M)\times\frac{c_3\log x}{\log M}\times\left(\frac{1}{\log\frac{x}{M}}+\frac{1}{\log\frac{x}{M}}\right).
\end{aligned}$$

またここで x が十分大きいことに注意すると以下の評価を得る.

$$\begin{aligned}
&C_2(M)\times\frac{c_3\log x}{\log M}\times\left(\frac{1}{\log\frac{x}{M}}+\frac{1}{\log\frac{x}{M}}\right) \\
=\ & \frac{C_3(M)}{1-\frac{\log M}{\log x}} \\
\le\ & C_3(M).
\end{aligned}$$

したがって求める評価を得る. 最後の行の c_3 の評価については補題 9.6 の証明の最後の部分と全く同様である. これで ① の評価を終える.

以下では二つ目の部分についての評価を行う.

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k\le x,(k,M)=1} \sum_{n_1\ne n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}} r(k,n_1)r(k,n_2) \\
\le & \sum_{n_1\ne n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}} \sum_{k\le x,(k,M)=1} r(k,n_1)r(k,n_2) \\
= & \sum_{n_1\ne n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}} |\{k\le x | kM^{n_1}+n_1, kM^{n_2}+n_2 \text{ は素数}, (k,M)=1\}| \\
= & \sum_{n_1\ne n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}} \sum_{\substack{1\le j\le M\\(j,M)=1}} |\{k\le x | kM^{n_1}+n_1, kM^{n_2}+n_2 \text{ は素数かつ } k\equiv j \pmod M\}| \\
\le & \sum_{n_1\ne n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}} \sum_{\substack{1\le j\le M\\(j,M)=1}} \left|\left\{l\le \frac{x}{M}\middle| lM^{n_1+1}+jM^{n_1}+n_1, lM^{n_2+1}+jM^{n_2}+n_2 \text{ は素数}\right\}\right|.
\end{aligned}
$$

さらに定理 8.1 に $x=y=\frac{x}{M}$, $g=2$, $a_i=M^{n_i}$, $b_i=jM^{n_i}+n_i$ として (8.3) の式に代入することによって以下の式を得る.

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n_1\ne n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}} \sum_{\substack{1\le j\le M\\(j,M)=1}} \left|\left\{l\le \frac{x}{M}\middle| lM^{n_1}+jM^{n_1}+n_1, lM^{n_2}+jM^{n_2}+n_1 \text{ は素数}\right\}\right| \\
\ll & \frac{x\phi(M)}{M\log^2 x} \sum_{\substack{n_1\ne n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1\\2|(n_1-n_2)}} \prod_{p>2}\left(1-\frac{\rho(p)-1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

ここで $E=M^{n_1+n_2}(n_2M^{n_1}-n_1M^{n_2})$ であることから, 定理 8.1 において上式のオーダーの部分の中括弧は,

$$
\begin{aligned}
& \frac{\log\log 3(\frac{x}{M})+\log\log 3|E|}{\log(\frac{x}{M})} \\
= & \frac{\log\log 3(\frac{x}{M})}{\log(\frac{x}{M})}+\frac{\log\log 3|E|}{\log(\frac{x}{M})},
\end{aligned}
$$

となり, x が十分大きいときにはどちらも 1 で抑えられるため, 定数で抑えることができる. $2\mid(n_1-n_2)$ という条件は, それを満たしていないと $lM^{n_1}+jM^{n_1}+n_1, lM^{n_2}+jM^{n_2}+n_1$ が共に素数になりえないためである.

ここでさらに ρ の値で場合分けをすると

$$
\begin{aligned}
&\frac{x\phi(M)}{M\log^2 x}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\leq c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1\\2|(n_1-n_2)}}\prod_{p>2}\left(1-\frac{\rho(p)-1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\\
=&\frac{x\phi(M)}{M\log^2 x}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\leq c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1\\2|(n_1-n_2)}}\prod_{p|M}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2}\prod_{\substack{p\nmid M\\p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\\
\times&\prod_{p\nmid(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1},
\end{aligned}
$$

という評価を得る. ここで上式に

$$
\prod_{\substack{p\nmid M\\p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1},
$$

を掛けて割ることによって以下の式を得る.

$$
\frac{x\phi(M)}{M\log^2 x}\prod_{p|M}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\leq c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1\\2|(n_1-n_2)}}\prod_{\substack{p\nmid M\\p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)^{-1}\prod_{p\nmid M}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.
$$

また以下の等式を上式に適用し, 以下の式を得る.

$$
\begin{aligned}
&\prod_{\substack{p\nmid M\\p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)^{-1}\prod_{p\nmid M}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\\
=&\prod_{\substack{p\nmid M\\p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1+\frac{1}{p-2}\right)\prod_{p\nmid M}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

さらに,

$$
\left(1+\frac{1}{p-2}\right)=\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{p(p-2)}}{1-\frac{1}{p^2}}\right),
$$

という等式を適用すると, 以下のように式を書き換えることができる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{x\phi(M)}{M\log^2 x}\prod_{p|M}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1\\2|(n_1-n_2)}}\prod_{\substack{p\nmid M\\p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)^{-1}\prod_{p\nmid M}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\\
=\;&\frac{x\phi(M)}{M\log^2 x}\prod_{p|M}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1\\2|(n_1-n_2)}}\prod_{\substack{p\nmid M\\p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1+\frac{1}{p-2}\right)\prod_{p\nmid M}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\\
=\;&\frac{x\phi(M)}{M\log^2 x}\prod_{p|M}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1\\2|(n_1-n_2)}}\prod_{\substack{p\nmid M\\p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{p(p-2)}}{1-\frac{1}{p^2}}\right)\\
\times\;&\prod_{p\nmid M}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.
\end{aligned}
\tag{9.9}
$$

また以下の等式が成立していることに注意する.

$$
\phi(M)=M\prod_{p|M}\left(1-\frac{1}{p}\right).
$$

したがって式 9.9 は以下のように書き換えることができる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{x\phi(M)}{M\log^2 x}\prod_{p|M}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1\\2|(n_1-n_2)}}\prod_{\substack{p\nmid M\\p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{p(p-2)}}{1-\frac{1}{p^2}}\right)\\
\times\;&\prod_{p\nmid M}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\\
=\;&\frac{xM}{\phi(M)\log^2 x}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1\\2|(n_1-n_2)}}\prod_{\substack{p\nmid M\\p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{p(p-2)}}{1-\frac{1}{p^2}}\right)\prod_{p\nmid M}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

さらに以下の等式が成立することに注意する.

$$\begin{aligned}
&\prod_{\substack{p\nmid M\\ p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{p(p-2)}}{1-\frac{1}{p^2}}\right)\prod_{p\nmid M}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\\
=&\prod_{\substack{p\nmid M\\ p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{p(p-2)}}{1-\frac{1}{p^2}}\right)\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\\
\times&\prod_{\substack{p\nmid M\\ p\nmid(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

ここで上式に

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{p(p-2)}}{1-\frac{1}{p^2}}\right)\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\\
=&\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}\left(\frac{p-2}{p-1}\right)\left(\frac{p}{p-1}\right)\\
=&\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1},
\end{aligned}$$

という等式を用いることで, 結果的に以下の式を得る.

$$\begin{aligned}
&\frac{xM}{\phi(M)\log^2 x}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}\\ (n_1n_2,M)=1\\ 2|(n_1-n_2)}}\prod_{\substack{p\nmid M\\ p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{p(p-2)}}{1-\frac{1}{p^2}}\right)\prod_{p\nmid M}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\\
=&\frac{xM}{\phi(M)\log^2 x}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}\\ (n_1n_2,M)=1\\ 2|(n_1-n_2)}}\prod_{\substack{p\nmid M\\ p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1+\frac{1}{p}\right)\prod_{\substack{p\nmid M\\ p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}\\
\times&\prod_{\substack{p\nmid M\\ p\nmid(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).
\end{aligned}$$

さらに,

$$\prod_{\substack{p\nmid M\\ p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}\le\zeta(2),$$

という評価を用いることによって以下の評価を得る．

$$
\begin{aligned}
&\frac{xM}{\phi(M)\log^2 x}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1\\2|(n_1-n_2)}}\prod_{\substack{p\nmid M\\p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1+\frac{1}{p}\right)\prod_{\substack{p\nmid M\\p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}\\
\times&\prod_{\substack{p\nmid M\\p\nmid(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\\
\le&\frac{\zeta(2)xM}{\phi(M)\log^2 x}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1\\2|(n_1-n_2)}}\prod_{\substack{p\nmid M\\p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1+\frac{1}{p}\right)\prod_{\substack{p\nmid M\\p\nmid(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).
\end{aligned}
$$

ここでまた以下の評価が成立している．

$$
\begin{aligned}
\prod_{\substack{p\nmid M\\p\nmid(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)&\le\prod_{\substack{p\nmid M\\p\nmid(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\\
&=\frac{1}{\zeta(2)}\prod_{\substack{p|M\\p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\le\frac{1}{\zeta(2)}\prod_{p|M}\left(1-\frac{1}{p^2}\right).
\end{aligned}
$$

上式右辺は絶対定数である．

したがって以下の評価が成立する．

$$
\begin{aligned}
&\frac{x\phi(M)}{M\log^2 x}\prod_{p|M}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1\\2|(n_1-n_2)}}\prod_{\substack{p\nmid M\\p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1+\frac{1}{p-2}\right)\prod_{p\nmid M}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\\
\ll&\frac{xM}{\phi(M)\log^2 x}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1\\2|(n_1-n_2)}}\prod_{\substack{p\nmid M\\p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1+\frac{1}{p}\right).
\end{aligned}
$$

またここでメビウス関数の性質から

$$
\prod_{\substack{p\nmid M\\p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1+\frac{1}{p}\right)=\sum_{\substack{d|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})\\(d,M)=1}}\frac{\mu^2(d)}{d},
$$

という等式が成立するので, 最終的には以下のように変形できる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{x\phi(M)}{M\log^2 x}\prod_{p|M}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\leq c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1\\2|(n_1-n_2)}}\prod_{\substack{p\nmid M\\p|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}\left(1+\frac{1}{p-2}\right)\prod_{p\nmid M}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\\
\ll\ &\frac{xM}{\phi(M)\log^2 x}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\leq c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1}}\ \sum_{\substack{d|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})\\(d,M)=1}}\frac{\mu^2(d)}{d}.
\end{aligned}
$$

ここで $P(n)$ で n の最大の素因子を表すとする. またさらに $d \mid (n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})$ という条件を $P(d) \mid (n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})$ という条件に緩めてまとめることによって以下の評価を得る.

$$
\begin{aligned}
&\frac{xM}{\phi(M)\log^2 x}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\leq c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1}}\ \sum_{\substack{d|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})\\(d,M)=1}}\frac{\mu^2(d)}{d}\\
\leq\ &\frac{xM}{\phi(M)\log^2 x}\sum_{d=1,(d,M)=1}^{\infty}\frac{\mu^2(d)}{d}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\leq c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1\\P(d)|(n_1M^{n_2}-n_2M^{n_1})}}1.
\end{aligned}
$$

また n_1, n_2 に関する制約を緩めることによって以下の不等式

$$
\sum_{\substack{n_1\neq n_2\leq c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1\\P(d)|(n_1(M^{n_1})^{-1}-n_2(M^{n_2})^{-1})}}1\leq\sum_{\substack{n_1\leq c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1,M)=1}}\ \sum_{\substack{n_2\leq c_3\frac{\log x}{\log M}\\P(d)|(n_1(M^{n_1})^{-1}-n_2(M^{n_2})^{-1})}}1,
$$

が成立していることを用いると, 以下のように式変形できる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{xM}{\phi(M)\log^2 x}\sum_{d=1,(d,M)=1}^{\infty}\frac{\mu^2(d)}{d}\sum_{\substack{n_1\neq n_2\leq c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1n_2,M)=1\\P(d)|(n_1(M^{n_1})^{-1}-n_2(M^{n_2})^{-1})}}1\\
\leq\ &\frac{xM}{\phi(M)\log^2 x}\sum_{d=1,(d,M)=1}^{\infty}\frac{\mu^2(d)}{d}\sum_{\substack{n_1\leq c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1,M)=1}}\ \sum_{\substack{n_2\leq c_3\frac{\log x}{\log M}\\P(d)|(n_1(M^{n_1})^{-1}-n_2(M^{n_2})^{-1})}}1.
\end{aligned}
$$

ここで上式の

$$
\sum_{\substack{n_2\leq c_3\frac{\log x}{\log M}\\P(d)|(n_1(M^{n_1})^{-1}-n_2(M^{n_2})^{-1})}}1,
$$

の部分については, $n_2 \le c_3 \frac{\log x}{\log M}$ であって, $\pmod{p(d)}$ で $n_2(M^{n_2})^{-1} \equiv n_1(M^{n_1})^{-1}$ となるような n_2 の個数を求めれば良い. ここで素数 p と正の整数 y に対して

$$\nu(p,y) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{n \middle| 1 \le n \le k(p), n(M^n)^{-1} \equiv y \pmod{p}\right\},$$

という定義であったことを思い出すと,

$$\sum_{\substack{n_2 \le c_3 \frac{\log x}{\log M} \\ P(d)|(n_1(M^{n_1})^{-1} - n_2(M^{n_2})^{-1})}} 1 \le c_3 \frac{\nu(P(d), n_1(M^{n_1})^{-1})\log x}{k(P(d))\log M},$$

という評価を得る. また $\nu(p) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\nu(p,y)|1 \le y \le p\}$ という定義から以下の式を得る.

$$c_3 \frac{\nu(P(d), n_1(M^{n_1})^{-1})\log x}{k(P(d))\log M} \le c_3 \frac{\nu(P(d))\log x}{k(P(d))\log M}.$$

さらに c_2 が 1 より十分大きいとして良いことから $c_3 \le (c_2)^{-1}$ であるので, 最終的に以下の評価を得る.

$$\sum_{\substack{n_2 \le c_3 \frac{\log x}{\log M} \\ P(d)|(n_1(M^{n_1})^{-1} - n_2(M^{n_2})^{-1})}} 1 \ll (c_2)^{-1} \frac{v(P(d))\log x}{k(P(d))\log M}.$$

したがって以上の議論から以下の式を得る.

$$\begin{aligned}
& \frac{xM}{\phi(M)\log^2 x} \sum_{d=1,(d,M)=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d)}{d} \sum_{\substack{n_1 \le c_3 \frac{\log x}{\log M} \\ (n_1,M)=1}} \sum_{\substack{n_2 \le c_3 \frac{\log x}{\log M} \\ P(d)|(n_1(M^{n_2})^{-1} - n_2(M^{n_1})^{-1})}} 1 \\
\ll \quad & (c_2)^{-1} \frac{xM}{\phi(M)\log^2 x} \sum_{d=1,(d,M)=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d)}{d} \sum_{\substack{n_1 \le c_3 \frac{\log x}{\log M} \\ (n_1,M)=1}} \frac{v(P(d))\log x}{k(P(d))\log M} \\
\le \quad & (c_2)^{-2} \frac{xM}{\phi(M)\log^2 x} \sum_{d=1,(d,M)=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d)}{d} \frac{\nu(P(d))\log^2 x\phi(M)}{k(P(d))M\log^2 M} \\
= \quad & (c_2)^{-2} \frac{x}{\log^2 M} \sum_{d=1,(d,M)=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d)\nu(P(d))}{k(P(d))d}.
\end{aligned}$$

さらに上式の

$$\sum_{\substack{n_1 \le c_3 \frac{\log x}{\log M} \\ (n_1,M)=1}} \frac{\nu(P(d))\log x}{k(P(d))\log M},$$

の部分の和をとることによって以下の評価を得る.

$$\begin{aligned}
& (c_2)^{-1}\frac{xM}{\phi(M)\log^2 x}\sum_{d=1,(d,M)=1}^{\infty}\frac{\mu^2(d)}{d}\sum_{\substack{n_1\le c_3\frac{\log x}{\log M}\\(n_1,M)=1}}\frac{\nu(P(d))\log x}{k(P(d))\log M}\\
\le\ & (c_2)^{-2}\frac{xM}{\phi(M)\log^2 x}\sum_{d=1,(d,M)=1}^{\infty}\frac{\mu^2(d)}{d}\frac{\nu(P(d))\log^2 x\phi(M)}{k(P(d))M\log^2 M}\\
=\ & (c_2)^{-2}\frac{x}{\log^2 M}\sum_{d=1,(d,M)=1}^{\infty}\frac{\mu^2(d)\nu(P(d))}{k(P(d))d}.
\end{aligned}$$

ここから以下で素数全体の集合を悪い素数とそうでない素数 (便宜上良い素数と呼ぶことにする) に分けて評価をする. したがって以下のように二つに分けて各々の項の評価を行う.

$$\begin{aligned}
& (c_2)^{-2}\frac{x}{\log^2 M}\sum_{d=1,(d,M)=1}^{\infty}\frac{\mu^2(d)\nu(P(d))}{k(P(d))d}\\
=\ & (c_2)^{-2}\frac{x}{\log^2 M}\sum_{\substack{d=1,(d,M)=1\\P(d)\in P*}}^{\infty}\frac{\mu^2(d)\nu(P(d))}{k(P(d))d}+(c_2)^{-2}\frac{x}{\log^2 M}\sum_{\substack{d=1,(d,M)=1\\P(d)\notin P*}}^{\infty}\frac{\mu^2(d)\nu(P(d))}{k(P(d))d}.
\end{aligned}$$

まず上式の第一項について以下の主張を示する.

主張 9.10. 以下の評価が成立する.

$$(c_2)^{-2}\frac{x}{\log^2 M}\sum_{\substack{d=1,(d,M)=1\\P(d)\in P*}}^{\infty}\frac{\mu^2(d)\nu(P(d))}{k(P(d))d}\ll(c_2)^{-2}\frac{x}{\log^2 M}.$$

証明. まず $\nu(P(d))$ の定義から $\nu(P(d))\le k(P(d))$ であることから,

$$\sum_{\substack{d=1,(d,M)=1\\P(d)\in P*}}^{\infty}\frac{\mu^2(d)\nu(P(d))}{k(P(d))d}\le\sum_{\substack{d=1\\P(d)\in P*}}^{\infty}\frac{\mu^2(d)}{d},$$

という評価が成立する. また $P(d)=p$ を固定して, その後 p をくくり出すことによって以下の評価を得る.

$$\sum_{\substack{d=1\\P(d)\in P*}}^{\infty}\frac{\mu^2(d)}{d}\le\sum_{p\in P*}\frac{1}{p}\sum_{\substack{n=1\\P(n)<p}}^{\infty}\frac{\mu^2(n)}{n}.$$

また以下の不等式

$$\sum_{\substack{n=1\\P(n)<p}}^{\infty}\frac{\mu^2(n)}{n}\le\prod_{q<p}\left(1+\frac{1}{q}\right),$$

が, 右辺の積を展開することで従う．したがって以下の評価が成立している．

$$\sum_{p\in P*}\frac{1}{p}\sum_{\substack{n=1\\P(n)<p}}^{\infty}\frac{\mu^2(n)}{n}\leq\sum_{p\in P*}\frac{1}{p}\prod_{q<p}\left(1+\frac{1}{q}\right).$$

またここで以下の主張を示す．

主張 9.11.

$$\prod_{q<p}\left(1+\frac{1}{q}\right)\ll \mathrm{log}p.$$

証明. 以下では対数をとって評価する．まず $\log\left(1+\frac{1}{q}\right)$ をテイラー展開することによって以下の式が成立する．

$$\begin{aligned}\log\left(\prod_{q<p}\left(1+\frac{1}{q}\right)\right)&=\sum_{q<p}\log\left(1+\frac{1}{q}\right)\\ &=\sum_{q<p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}q^n}{n}\\ &=\sum_{q<p}\frac{1}{q}+\sum_{q<p}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{nq^n}.\end{aligned}$$

ここで上式の $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{nq^n}$ の部分は収束し，$\sum_{q<p}\frac{1}{q}$ の部分については $\log p$ で評価されることから最終的に以下の評価が成立する．

$$\begin{aligned}&\log\left(\prod_{q<p}\left(1+\frac{1}{q}\right)\right)\\ =\ &\sum_{q<p}\frac{1}{q}+\sum_{q<p}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{nq^n}\\ \ll\ &\mathrm{log}p.\end{aligned}$$

したがって求める評価を得る． □

この主張 9.11 を用いることによって以下の評価を得る．

$$\sum_{p\in P*}\frac{1}{p}\prod_{q<p}\left(1+\frac{1}{q}\right)\ll\sum_{p\in P*}\frac{\mathrm{log}p}{p}.$$

また補題 9.4 を用いることによって以下が成立する．

$$\sum_{p\in P*}\frac{\mathrm{log}p}{p}\ll 1.$$

最終的に以下の評価が成立する.

$$(c_2)^{-2}\frac{x}{\log^2 M}\sum_{\substack{d=1,(d,M)=1\\P(d)\in P*}}^{\infty}\frac{\mu^2(d)\nu(P(d))}{k(P(d))d}\ll (c_2)^{-2}\frac{x}{\log^2 M}.$$

次に第二項について評価をする.

主張 9.12. 以下の評価が成立する.

$$\sum_{k\le x,(k,M)=1}\sum_{n_1\ne n_2\le c_3\frac{\log x}{\log M}} r(k,n_1)r(k,n_2)\ll\frac{x}{(c_2)^2\log^2(M)}.$$

以下で上記の主張 9.12 を証明する. $P(d)\notin P^*$ であるので, 悪い素数の定義から

$$\nu(P(d))\le 2[(k(P(d)))^{\frac{6}{7}}]+2\le 2(k(P(d)))^{\frac{6}{7}}+2,$$

であることに注意する. すると以下の評価が成立する.

$$\sum_{\substack{d=1,(d,M)=1\\P(d)\notin P*}}^{\infty}\frac{\mu^2(d)\nu(P(d))}{k(P(d))d}\le\sum_{\substack{d=1,(d,M)=1\\P(d)\notin P*}}^{\infty}\left(\frac{\mu^2(d)(k(P(d)))^{\frac{6}{7}}}{k(P(d))d}+\frac{2\mu^2(d)}{k(P(d))d}\right).$$

また $k(P(d))\ge 1$ であるので

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d=1,(d,M)=1\\P(d)\notin P*}}^{\infty}\left(\frac{\mu^2(d)(k(P(d)))^{\frac{6}{7}}}{k(P(d))d}+\frac{2\mu^2(d)}{k(P(d))d}\right)&\ll\sum_{\substack{d=1,(d,M)=1\\P(d)\notin P*}}^{\infty}\frac{\mu^2(d)(k(P(d)))^{\frac{6}{7}}}{k(P(d))d}\\&=\sum_{\substack{d=1,(d,M)=1\\P(d)\notin P*}}^{\infty}\frac{\mu^2(d)}{k(P(d))^{\frac{1}{7}}d},\end{aligned}$$

という評価が成立している.

さらに $P(d)\notin P*$ という和の条件と $(d,M)=1$ という条件を外すことによってさらに総和が大きくなり, 以下の評価が成立する.

$$\sum_{\substack{d=1,(d,M)=1\\P(d)\notin P*}}^{\infty}\frac{\mu^2(d)}{k(P(d))^{\frac{1}{7}}d}\le\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu^2(d)}{k(P(d))^{\frac{1}{7}}d}.$$

ここで 9.1 から $k(P(d))=pl(P(d))\ge p$ が成立しているので以下の式が成立する.

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu^2(d)}{k(P(d))^{\frac{1}{7}}d}\le\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu^2(d)}{P(d)^{\frac{1}{7}}d}.$$

以降は第一項の評価 9.10 と同様な手法の評価になるが, $P(d)=p$ を固定して, その後 p をくくり出すことによって以下の不等式が成立する.

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu^2(d)}{P(d)^{\frac{1}{7}}d}\leq\sum_{p\geq 2}\frac{1}{p^{\frac{8}{7}}}\sum_{\substack{n=1\\P(n)<p}}^{\infty}\frac{\mu^2(n)}{n}.$$

また以下の不等式,

$$\sum_{\substack{n=1\\P(n)<p}}^{\infty}\frac{\mu^2(n)}{n}\leq\prod_{q<p}\left(1+\frac{1}{q}\right),$$

の成立から,

$$\sum_{p\geq 2}\frac{1}{p^{\frac{8}{7}}}\sum_{\substack{n=1\\P(n)<p}}^{\infty}\frac{\mu^2(n)}{n}\leq\sum_{p\geq 2}\frac{1}{p^{\frac{8}{7}}}\prod_{q<p}\left(1+\frac{1}{q}\right),$$

が成立している. さらに主張 9.11 を用いることで以下の評価が成立する.

$$\sum_{p\geq 2}\frac{1}{p^{\frac{8}{7}}}\prod_{q<p}\left(1+\frac{1}{q}\right)\ll\sum_{p\geq 2}\frac{\log p}{p^{\frac{8}{7}}}.$$

ここで上式の $\sum_{p\geq 2}\frac{\log p}{p^{\frac{8}{7}}}$ の部分は収束するので

$$\sum_{p\geq 2}\frac{\log p}{p^{\frac{8}{7}}}\ll 1,$$

となる. □

以上二つの第一項の評価 9.10 と第二項の評価 9.12 を合わせることで所望の評価である,

$$\sum_{k\leq x,(k,M)=1}R(k,x)^2\ll\frac{x\phi(M)}{c_2M\log M}+\frac{x}{(c_2)^2\log^2(M)},$$

を得て補題が示される. □

以上の 7 個の補題の準備を元に主定理の証明を行う. 再度主定理の主張を確認しておく.

定理. M を正の整数として, x を十分大きな正の実数とする. このとき M と互いに素な正の整数 k であって, kM^n+n が素数になるような k の個数は, ある M にのみ依存する正定数 $C_0(M)$ が存在して, 下から $xC_0(M)$ で抑えることができる. つまり以下の評価が成立する.

$$|\{k|0<k\leq x,(k,M)=1,\text{ある }n\in\mathbb{N}\text{ が存在して }kM^n+n\text{ は素数}\}|\gg C_0(M)x.$$

証明. まずコーシーシュワルツの不等式と補題 9.8 から以下が成立する.

$$\left(\sum_{k\le x,(k,M)=1} R(k,x)\right)^2 \le |\{k|1\le k\le x,(k,M)=1,R(k,x)\ge 1\}| \sum_{k\le x,(k,M)=1} R(k,x)^2$$
$$\ll \quad |\{k|1\le k\le x,(k,M)=1,R(k,x)\ge 1\}| \left(\frac{x\phi(M)}{c_2M\log M}+\frac{x}{(c_2)^2\log^2(M)}\right).$$

ここでさらに補題 9.6 を左辺に用いることで $|\{k|1\le k\le x,(k,M)=1,R(k,x)\ge 1\}|$ に対する以下の評価を得る.

$$|\{k|1\le k\le x,(k,M)=1,R(k,x)\ge 1\}|$$
$$\gg x\left(\frac{c_1x\phi(M)}{c_2M^2\log M}\right)\left(\frac{\phi(M)}{c_2M\log M}+\frac{1}{(c_2)^2\log^2(M)}\right)^{-1}.$$

この式の右辺は c_1, c_2 が M にのみ依存している定数であることから, M にのみ依存する定数の形で書くことができ, 主定理が示される. □

注意 9.13. 最後に本論文の結果の拡張について言及する. 本論文で解説した主定理は kM^n+n という型の素数であったが, 本論文の手法を用いることで, a を M と互いに素な正の整数としたときに kM^n+an 型の素数についても同様の主張が成立する. 証明については記号を変更するだけで殆ど同様の議論のため, 証明については省略する. またそれでも評価がうまくいく理由としては, $an\ll M^n$ という漸近評価が変わらず成立していることと補題 9.1 から 9.7 が変わらず成立しているため, 補題 9.8 の拡張版がうまくいくということが挙げられる.

References

[1] William Banks, Carrie Finch, Florian Luca, Carl Pomerance, and Pantelimon Stănică. Sierpiński and Carmichael numbers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 367, No. 1, pp. 355–376, 2015.

[2] Yong-Gao Chen. On integers of the form $k2^n+1$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 129, No. 2, pp. 355–361, 2001.

[3] Yong-Gao Chen. On integers of the forms $k-2^n$ and $k2^n+1$. *J. Number Theory*, Vol. 89, No. 1, pp. 121–125, 2001.

[4] Yong-Gao Chen. On integers of the forms k^r-2^n and k^r2^n+1. *J. Number Theory*, Vol. 98, No. 2, pp. 310–319, 2003.

[5] Yong-Gao Chen. On integers of the forms $k\pm 2^n$ and $k2^n\pm 1$. *J. Number Theory*, Vol. 125, No. 1, pp. 14–25, 2007.

[6] Javier Cilleruelo, Florian Luca, and Amalia Pizarro-Madariaga. Carmichael numbers in the sequence $(2^nk+1)_{n\ge 1}$. *Math. Comp.*, Vol. 85, No. 297, pp. 357–377, 2016.

[7] P. Erdős and A. M. Odlyzko. On the density of odd integers of the form $(p-1)2^{-n}$ and related questions. *J. Number Theory*, Vol. 11, No. 2, pp. 257–263, 1979.

[8] Richard K. Guy. *Unsolved problems in number theory.* Problem Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, third edition, 2004.

[9] H. Halberstam and H.-E. Richert. *Sieve methods.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1974. London Mathematical Society Monographs, No. 4.

[10] Florian Luca and Pantelimon Stănică. On numbers of the form $p + 2^n - n$. *J. Comb. Number Theory*, Vol. 6, No. 3, pp. 157–162, 2014.

[11] W. Sierpiński. Sur un problème concernant les nombres $k \cdot 2^n + 1$. *Elem. Math.*, Vol. 15, pp. 73–74, 1960.

[12] X.-G. Sun. Primes of the form $kM^n + n$. *Acta Math. Hungar.*, Vol. 158, No. 1, pp. 100–108, 2019.