# 篩法の指数混合型の Waring-Goldbach problem への応用

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻
修士課程 2 年
学籍番号：0530-31-6450
中居昂大

2021 年 1 月 19 日

## 概 要

この論文は次の論文, On the Waring-Goldbach Problem for Six Cubes and Two Biquadrates (Shi-Liu [16]) の解説論文である. その主定理は, 十分大きな偶数は素因数を高々6 つしか持たない数の 3 乗と 5 つの素数の 3 乗と 2 つの素数の 4 乗の和に書けることを示したものである.

# 第1章　はじめに

この論文では, 第 1 章で主定理の説明, 第 2 章で篩法の基本的な解説, 第 3 章で Brun の篩の解説, 第 4 章で Rosser の篩の解説, 第 5 章で篩法以外の必要な定理の解説を行う. また第 6 章では, 主定理の証明には用いないが, 勉強したため Iwaniec の篩について解説する.

第 1 章では, 1.1 節で Waring problem, Waring-Goldbach problem の紹介, 1.2 節で本論文中の記号や表記の定義, 1.3 節で Waring-Goldbach problem の証明の概要とそれに現れる理論の紹介, 1.4 節で必要な定理を仮定した上で主定理の証明を行う.

## 1.1　Waring-Goldbach problem

この論文は S.Shi and L.Liu, [On the Waring-Goldbach problem for six cubes and two biquadrates], Chinese Annals of Mathematics, 2018 の解説論文である. その主定理は以下のようなものである. 素因数を重複を含めて高々$k$ 個しか持たない自然数全体の集合を $P_k$ とする.

**定理 1.1** ([16, p.1034, Theorem 1.1])**.** 十分大きな偶数 $n$ に対して,

$$\nu(n) = \#\{(x, p_1, p_2, \ldots, p_7) \mid n = x^3 + p_1^3 + p_2^3 + p_3^3 + p_4^3 + p_5^3 + p_6^4 + p_7^4,\ x \in P_6,\ p_i \text{は素数}\}$$

とおくと,

$$\nu(n) \gg \frac{n^{\frac{85}{72}}}{\log^8 n}.$$

この定理は $\nu(n)$ の漸近的な評価を与えるものだが, 特に, 十分大きい偶数 $n$ は 7 個の素数 $p_i$ と 1 つの $P_6$ の元 $x$ を用いて,

$$n = x^3 + p_1^3 + p_2^3 + p_3^3 + p_4^3 + p_5^3 + p_6^4 + p_7^4$$

と表せる, ということを示した定理である. その証明には篩法と Hardy-Littlewood method(circle method) を用いており, この解説論文では主に篩法に焦点を当てて解説する.

これは Waring-Goldbach problem(以下 WGP と略記する）という, 古くから考えられている数論上の問題に対する部分的な結果である.

以下, WGP の前身となる Waring's problem の紹介とその結果の変遷について述べる. Waring's problem とは以下のような問題である.

自然数 $k$ を固定する. 十分大きな自然数 $N$ が自然数 $x_i$ を用いて

$$N = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_s^k$$

と表すことができるような $s$ は存在するか.

この問題はイギリスの数学者 Edward Waring が 1770 年に著書『Meditationes Algebraica』[21] の中で提唱した問題である. 十分大きな自然数をいくつかの自然数の特定の冪の和で表すことは可能か, 特に表せるとしたら何個の自然数が必要か, といった問題は直感的にも大変興味深いものであろう.

G.H.Hardy と J.E.Littlewood が 1920 年代から数年にかけて, Waring problem に対する非常に有効な手法である "Hardy-Littlewood method" をまとめた論文をいくつか発表している. その結果を紹介する.

**定理 1.2** ([8, p.26, (7.11)])**.** 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し, 十分大きな自然数は $(k-2)2^{k-1}+5$ 個の $k$ 乗数の和で表せる.

近年の Waring's problem に関するほとんどの結果は, この論文たちに示されている Hardy-Littlewood method を使って得られている.

今回の論文で扱いたいものは指数の値がそろっていない形のものである. 1988 年に J.Brüdern によって, 表示に使われる自然数の冪の数がそろっていない形, 指数混合型の Waring's problem(拡張されているため, Waring' s problem with mixed powers と書かれることもあるが, ここではそのまま呼ぶことにする) に関する次の定理が示された.

**定理 1.3** ([1, p.25, Theorems 1,2])**.** ほとんど全ての自然数は 3 つの立方数と 1 つの四乗数の和で表せる. また, 十分大きな自然数は 5 つの立方数と 3 つの四乗数の和で表せる.

上の Brüdern の論文中で定理 1.3 の前半の系として指摘されている次の定理が, 解説したい Shi-Liu の論文の元になっている (明示的に書かれているわけではないので引用はページ数だけとした).

**定理 1.4** ([1, p.25])**.** 十分大きな自然数は, 6 つの立方数と 2 つの四乗数の和で表せる.

上の結果は, 十分大きな自然数を自然数の冪の和で表す, といったものだが, それを素数の冪の和に限定したらどうなるか, といったことを考えるは自然であろう. それが, 本論文で扱いたい Waring-Goldbach problem である. つまり,

> 自然数 $s, k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_s$ を固定する. このとき十分大きな自然数 $N$ は, $s$ 個の素数 $p_i$ を用いて
> $$N = p_1^{k_1} + p_2^{k_2} + \cdots + p_s^{k_s}$$
> と表すことができるか.

という問題である. またその部分的な結果として, 全てを素数で尽くすわけではなく, いくつかを $P_k$ の元 (擬素数と呼ぶ) とする場合もある. この問題に対して, 1995 年に J.Brüdern が以下の結果を示した.

**定理 1.5** ([3, p.211, THEOREM])**.** $v(n)$ を以下の方程式の解の個数とする.

$$n = x^3 + y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + y_4^3 + y_5^3 + p^3$$

ただし, $p$ は素数, $x \in P_{69}$, $y_1, \ldots, y_5 \in P_5$ とする. この時,

$$v(n) \gg \frac{n^{\frac{4}{3}}}{(\log n)^{27}}$$

これは, 十分大きな自然数が 7 個の立方数で表せることを示した, 1943 年の U.V.Linnik の論文 [14] を WGP に拡張した結果である. ここ数年の WGP に関する論文は, 記号等の使い方も含め, 上の論文を参考に書かれているようである. この論文では Waring's problem に用いてきた Hardy-Littlewood method に加えて, Linear sieve の理論が使われている. この論文の手法を定理 1.4 の形のものに用いたらどうなるか, という考えで書かれたのが, 本論文中で解説したい論文である (主定理は定理 1.1).

以上が本論文で紹介したい Shi-Liu の論文が書かれた経緯である.

なお指数混合型ではなく, 三乗のみの和, 四乗のみの和に関しては次のことがわかっている.

**定理 1.6** ([9, p.108, Corollary 3])**.** 十分大きな奇数は 9 個の素数の 3 乗の和で表せる.

**定理 1.7** ([13, p.868, THEOREM 1])**.** 十分大きな偶数 $N$ は, 7 個の素数 $p_i$ と自然数 $x \in P_2$ を用いて以下のように表すことができる.

$$N = p_1^3 + \cdots + p_7^3 + x^3$$

**定理 1.8** ([12, p.2, THEOREM 1])**.** 240 を法として 14 と合同な十分大きな自然数は, 14 個の四乗数の和で表せる.

## 1.2 記号と記法

この論文における記号, 記法について記す. 前節で定義したものも改めて明記する. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ をそれぞれ自然数, 整数, 有理数, 実数全体の集合とする.

$p, p', p_1, p_2, \ldots$ 等は特に断らない限り, 素数を表すものとする. 自然数 $k$ に対して,

$$P_k = \{\ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ は素因数を重複を含めて高々 } k \text{ 個しか持たない}\ \}$$

と書き, $P_k$ の元 $x$ を擬素数と呼ぶ. $P_{\min}(n)$, $P_{\max}(n)$ で $n$ の最小, 最大の素因数を表す.

$x \in \mathbb{R}$ に対し $[x]$ で $x$ 以下の最大の整数を表す. $k, l \in \mathbb{Z}$ に対して $(k, l)$ で $k$ と $l$ の最大公約数を表す. $k$ が $l$ を割り切ることを, $k|l$ と書く. 特に, $p^\theta | a$ であって $p^{\theta+1} \nmid a$ であることを, $p^\theta || a$ と書く.

集合 $A$ の元の個数を $\# A$, もしくは $|A|$ で表す. 集合 $A \subset B$ に対して, $B \backslash A = \{b \in B \mid b \notin A\}$ と定める.

$\mu(d)$, $\phi(d)$ は順にメビウス関数, オイラーの $\phi$ 関数を表す. $\tau(d)$ を $d$ の約数の個数を表す関数 (以下 , 約数関数と表記) とする. $\gamma$ をオイラー定数とする.

$A, B > 0$ に対し, $A \sim B$ と書いて $B < A \leq 2B$ を意味する.

$\sum_{x(q)}, \sum_{x(q)*}$ と書いて, それぞれの和において $x$ は 0 から $q-1$ までの整数全体, 0 から $q-1$ までの整数のうち $q$ と互いに素であるもの全体 を走ることを意味する.

次に, 関数の漸近挙動に関する記法を定義する. $f, h, g$ を, $\mathbb{R}$ 上で定義された関数とする.

$$f(x) = h(x) + O(g(x))$$

と書いて, ある定数 $c, x_0 \in \mathbb{R} > 0$ が存在して, $x \geq x_0$ ならば,

$$|f(x) - h(x)| \leq c \cdot |g(x)|$$

が成り立つことを表す. また,

$$f(x) = O(g(x))$$

を特に,

$$f(x) \ll g(x)$$

と書くことがある. $f(x) \ll g(x)$ かつ $g(x) \ll f(x)$ が成り立つことを,

$$f(x) \asymp g(x)$$

と表す. 上記のようなオーダー評価中で, 定数として扱う文字がある場合, $\ll_k$ のように明記する.

次に, Abel の部分和法について記す. Abel の部分和法は, 篩法において $\lambda_n$ を素数の列としてよく用いられる. 証明は [6, p.78, THEOREM 6] による.

**命題 1.9** (**Abel の部分和法**). $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ を発散する実数列とし, $\{a_n\}$ を任意の複素数列とする. また,

$$A(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} a_n \tag{1.10}$$

とおき, $\phi(x)$ を $x \geq 0$ で定められた複素数値関数とする. このとき,

$$\sum_{n=1}^{k} a_n \phi(\lambda_n) = A(\lambda_k)\phi(\lambda_k) - \sum_{n=1}^{k-1} A(\lambda_n)\left(\phi(\lambda_{n+1}) - \phi(\lambda_n)\right) \tag{1.11}$$

が成り立つ. またさらに $\phi(x)$ が $x \geq 0$ で $C^1$ 級ならば, $x \geq \lambda_1$ に対して,

$$\sum_{\lambda_n \leq x} a_n \phi(\lambda_n) = A(x)\phi(x) - \int_{\lambda_1}^{x} A(t)\phi'(t)dt \tag{1.12}$$

が成り立つ.

次に, 篩法で扱う言葉について定義する.

**定義 1.13.** $\mathscr{A}$ を $\mathbb{N}$ の有限部分集合, $\mathscr{P}$ をある素数の集合, $z$ を正の実数とする. $\mathscr{A}$ の元のうち, $z$ より小さい素因数を $\mathscr{P}$ に持つようなものを取り除く操作を「ふるい落とす」(sift) といい, ふるい落とされた後の集合を sifted set と呼ぶ. sifted set の元の個数を数え上げる関数を,

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = \#\{a \in \mathscr{A} \mid a \text{ は } \mathscr{P} \text{ に } z \text{ より小さい素因数を持たない }\} \tag{1.14}$$

と定める.

篩法は簡潔に言えば, $S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z)$ の評価から様々な数論的性質を導く手法である. また, $\mathscr{A}, \mathscr{P}, z$ と自然数 $d$ に対して,

$$\mathscr{A}_d = \{a \in \mathscr{A} \mid d \text{ は } a \text{ を割り切る }\}, \tag{1.15}$$

$$P(z) = \prod_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p < z}} p \tag{1.16}$$

と定める.

次は, Rosser の篩で用いられるものを定義する.

**定義 1.17.** $D > 0$ とする．$\mu_1^+ = 1,\ \mu_1^- = 1$, また平方因子を持たない任意の自然数 $d = p_1 \cdots p_r$, $p_1 > \cdots > p_r$ に対して，

$$\mu_d^+ = \begin{cases} (-1)^r & 0 \leq^\forall l \leq (r-1)/2 \text{ に対して } p_1 p_2 \cdots p_{2l} p_{2l+1}^3 < D, \\ 0 & \text{それ以外,} \end{cases}$$

$$\mu_d^- = \begin{cases} (-1)^r & 0 \leq^\forall l \leq r/2 \text{ に対して } p_1 p_2 \cdots p_{2l-1} p_{2l}^3 < D, \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

と定める．これらを位数 $D$ の Rosser の重みと呼ぶ．

**定義 1.18.** 以下の微分差分方程式からそれぞれ $s \geq 1,\ s \geq 2$ において一意的に定まる連続関数を $F(s),\ f(s)$ とする．

$$\begin{cases} F(s) = \dfrac{2e^\gamma}{s} & (1 \leq s \leq 3) \\ f(s) = \dfrac{2e^\gamma \log(s-1)}{s} & (2 \leq s \leq 4) \end{cases} \tag{1.19}$$

$$\begin{cases} (sF(s))' = f(s-1) & (s > 3) \\ (sf(s))' = F(s-1) & (s > 4) \end{cases} \tag{1.20}$$

なお, $\gamma$ はオイラー定数である．この $F(s), f(s)$ を篩関数と呼ぶ．

以降, 論文中で用いる具体的ないくつかの定数, 関数についてあらかじめ記載しておく．

$\varepsilon \in (0, 10^{-10})$ とする．以下の定数と集合を定める．

$C = 10^{10},\ Q_0 = \log^{20C} n,\ Q_1 = n^{\frac{11}{48}+9\varepsilon},\ Q_2 = n^{\frac{1}{2}},$

$X_1 = 0.5n^{\frac{1}{3}},\ X_2 = 0.5n^{\frac{5}{18}},\ Y = 0.5n^{\frac{25}{144}},$

$\log \mathbf{X} = (\log X_1)^2 (\log X_2)^3 (\log Y)^2,\ \log 2\mathbf{X} = (\log 2X_1)^2 (\log 2X_2)^3 (\log 2Y)^2,$

$\mathcal{M}_r = \{m \mid m \sim X_1,\ m = p_1 p_2 \cdots p_r,\ z \leq p_1 \leq \cdots \leq p_r\}\quad (7 \leq r \leq 36),$

$\mathcal{N}_r = \left\{ m \,\middle|\, \begin{array}{l} m \sim X_1,\ m = p_1 p_2 \cdots p_{r-1},\ z \leq p_1 \leq \cdots \leq p_{r-1}, \\ p_1 p_2 \cdots p_{r-2} p_{r-1}^2 \leq 2X_1 \end{array} \right\}\quad (7 \leq r \leq 36).$

略記 $\log \mathbf{X}$ と $\log 2\mathbf{X}$ について, その定め方から, $n$ を十分大きくとることで,

$$\frac{\log \mathbf{X}}{\log 2\mathbf{X}} \geq 1 - \varepsilon \tag{1.21}$$

と出来る．

これより下に定義される関数は, Hardy-Littlewoodmethod に関するものである．主に第 5 章で使用する．$\alpha \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{N}$ に対して,

$$e(\alpha) = e^{2\pi i \alpha},\ e_q(\alpha) = e\left(\frac{\alpha}{q}\right)$$

と定める． $e(\alpha)$ や $e_q(\alpha)$ をある条件において足し合わせるような関数を, $k = 3, 4,\ i = 1, 2,$

$r = 7, 8, \ldots, 36$ に対して,

$$
\begin{aligned}
&S_k^*(q,a) = \sum_{r(q)*} e_q(ar^k),\ S_k(q,a) = \sum_{r(q)} e_q(ar^k),\\
&F_i(\alpha) = \sum_{m\sim X_i} e(\alpha m^3),\ f_i(\alpha) = \sum_{p\sim X_i} (\log p) e(\alpha p^3),\\
&G(\alpha) = \sum_{m\sim Y} e(\alpha m^4),\ g(\alpha) = \sum_{p\sim Y} (\log p) e(\alpha p^4),\\
&f_{3,r}(\alpha) = \sum_{\substack{m\in\mathcal{N}_r\\ mp\sim X_1}} e(\alpha(mp)^3)\Big(\frac{\log p}{\log \frac{X_1}{m}}\Big),
\end{aligned}
$$

と定める. Hardy-Littlewood method における上記のような形の級数の使い方は 1.3 節で解説する.

また,

$$
\begin{aligned}
&B_d(q,m) = \sum_{a(q)*} S_3(q, ad^3) S_3^{*5}(q,a) S_4^{*2}(q,a) e_q(-am),\\
&A_d(q,m) = \frac{B_d(q,m)}{q\phi^7(q)},\ A(q,m) = A_1(q,m),\ \mathfrak{S}_d(m) = \sum_{q=1}^{\infty} A_d(q,m),\\
&\mathfrak{S}(m) = \mathfrak{S}_1(m),
\end{aligned}
$$

と定める. $\mathfrak{S}(m)$ は特異級数と呼ばれるものである.

$i = 1, 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
u_i(\lambda) = \int_{X_i}^{2X_i} e(\lambda u^3) du,\ v(\lambda) = \int_{Y}^{2Y} e(\lambda u^4) du,\\
\mathcal{J}(m) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1^3(\lambda) u_2^3(\lambda) v^2(\lambda) e(-\lambda m) d\lambda,
\end{aligned}
$$

と定める.

## 1.3 WGP へのアプローチ

この論文では, WGP へのアプローチとして篩法と Hardy-Littlewood method という二つの理論を使うが, この節でまずその二つの理論が登場する理由を簡単に説明する. 一般的な WGP についても同じことが言えるが, ここでは定理 1.1 を題材にする.

$n$ を十分大きな偶数とする. 評価したい $\nu(n)$ は次の方程式を満たす擬素数 $x \in P_6$ と素数 $p_1, \cdots, p_7$ の組の個数であった.

$$
n = x^3 + p_1^3 + p_2^3 + p_3^3 + p_4^3 + p_5^3 + p_6^4 + p_7^4. \tag{1.22}
$$

$\nu(n)$ の評価のため, 次の不等式を考える. $z = D^{1/3} = n^{1/108+\varepsilon/3}$, $\mathcal{P} = P(z)$ とする.

**命題 1.23.** 以下の不等式が成立する.

$$\nu(n) \geq \sum_{\substack{l^3+p_1^3+p_2^3+p_3^3+p_4^3+p_5^3+p_6^4+p_7^4=n \\ (l,\mathcal{P})=1, l, p_1, p_4 \sim X_1 \\ p_2, p_3, p_5 \sim X_2, p_6, p_7 \sim Y}} 1 - \sum_{r=7}^{36} \sum_{\substack{h^3+p_1^3+p_2^3+p_3^3+p_4^3+p_5^3+p_6^4+p_7^4=n \\ h \in \mathcal{M}_r, p_1, p_4 \sim X_1 \\ p_2, p_3, p_5 \sim X_2, p_6, p_7 \sim Y}} 1 \tag{1.24}$$

$$\geq \sum_{\substack{l^3+p_1^3+p_2^3+p_3^3+p_4^3+p_5^3+p_6^4+p_7^4=n \\ (l,\mathcal{P})=1, l, p_1, p_4 \sim X_1 \\ p_2, p_3, p_5 \sim X_2, p_6, p_7 \sim Y}} 1 - \sum_{r=7}^{36} \sum_{\substack{(mp)^3+p_1^3+p_2^3+p_3^3+p_4^3+p_5^3+p_6^4+p_7^4=n \\ m \in \mathcal{N}_r, mp, p_1, p_4 \sim X_1 \\ p_2, p_3, p_5 \sim X_2, p_6, p_7 \sim Y}} 1. \tag{1.25}$$

**証明.** まず, 不等式

$$\nu(n) \geq \sum_{\substack{l^3+p_1^3+p_2^3+p_3^3+p_4^3+p_5^3+p_6^4+p_7^4=n \\ l \in P_6, l, p_1, p_4 \sim X_1 \\ p_2, p_3, p_5 \sim X_2, p_6, p_7 \sim Y}} 1 \tag{1.26}$$

を考える. この右辺は, $\nu(n)$ で数え上げられるような組 $(l, p_1, p_2, \ldots, p_7)$ の要素それぞれにさらに大きさの条件を加えたものなので, 明らかに (1.26) は成り立つ.

次に, (1.26) から (1.24) を示す. (1.24) の右辺の第二項の条件中の $h$ は,

$$h \in \mathcal{M}_r \Leftrightarrow h \sim X_1 \text{かつ} (h, \mathcal{P}) = 1 \text{ かつ素因数がちょうど } r \text{ 個} \tag{1.27}$$

を満たすので, $(l, \mathcal{P}) = 1, l \sim X_1$ の時, $l$ の素因数が高々36 個であることを確認すれば, (1.24) の成立が示される. $l$ の一番小さな素因数を $p$ とおくと, $(l, \mathcal{P}) = 1$ より, $p \geq z$ が成立する. よって $l$ の素因数が重複を含め 37 個以上あるとすると, $n$ が十分大の時,

$$l \geq p^{37} \geq z^{37} = D^{\frac{37}{3}} = n^{\frac{37}{3 \cdot 36} - \frac{14 \cdot 37}{3}\varepsilon} > 2X_1$$

となり, $l \sim X_1$ に矛盾するので, $l$ の素因数は高々36 個である. よって (1.24) が示された.

最後に (1.24) から (1.25) を示したいが, これは (1.25) の右辺の第二項の条件における $p$ の自由さを考えることで, 容易にわかる. □

この (1.25) の第一項と第二項の和の中身をそれぞれ $\nu_0(n), \nu_r(n)$ とおき, $\nu_0(n)$ の下からの評価, $\nu_r(n)$ の上からの評価を示すことで $\nu(n)$ を評価したい. この $\nu_0(n)$ と $\nu_r(n)$ の評価に用いるのが, Hardy-Littlewood method と篩法の理論である. ここでは, $\nu_0(n)$ の評価の方針に沿って, それらの理論の使い方を見る.

ここで先に Hardy-Littlewood method について簡単に触れる. Hardy-Littlewood method の理論は, 実質的には次の命題に基づいている.

**命題 1.28.** 整数 $m$ に対し,

$$\int_0^1 e(m\alpha) d\alpha = \begin{cases} 1 & (m = 0) \\ 0 & (m \neq 0) \end{cases}$$

**証明.** $m = 0$ の時は明らか. $m \neq 0$ の時は実際に積分して,

$$\int_0^1 e(m\alpha) d\alpha = \left[ \frac{1}{2\pi i m} e(m\alpha) \right]_0^1 = 0$$

□

**注 1.29.** 証明からわかるように，この命題の主張は $e(\alpha)$ の周期性に起因するので，積分区間を任意の実数 $x$ から $x+1$ までとしても，この命題は成り立つ．Hardy-Littlewood method においては，$[0,1)$ からほんの少しだけ平行移動させたものが多い．

この命題を用いて「方程式のある範囲内の解の個数」を「積分評価」に落とし込む，というのが Hardy-Littlewood method の基本的な考え方である．具体的に例を挙げてその手法を見ていく．集合 $A \subset \mathbb{R}$, 自然数 $k$ に対して，

$$f_X(\alpha) = \sum_{p \in A} e(p^k \alpha)$$

とおく．$n, l$ を自然数とおき，積分

$$I(n) = \int_0^1 f_X(\alpha)^l e(-n\alpha) d\alpha$$

を考える．この被積分関数を展開したものは，

$$e\left((p_1^k + p_2^k + \cdots p_l^k - n)\alpha\right)$$

であって，$p_i \in A$ を満たすものの総和である．このことと命題 1.28 より，$I(n)$ は，

$$n = p_1^k + p_2^k \cdots + p_l^k \quad (p_i \in A)$$

を満たす組 $(p_1, p_2, \ldots, p_l)$ の数を表すことがわかる．つまり積分 $I(n)$ を評価すれば，上の方程式の解の個数も評価できる．その積分評価における細かな技法は，Vaughan の本 [19] に詳しく書かれている．この論文では第 5 章での軽い解説に留めることにする．

ここで本筋に戻る．$\nu_0(n)$ はその形を見れば，「方程式のある範囲内 + なんらかの条件をみたす解の個数」を数え上げるものなので，この Hardy-Littlewood method がまさに活躍しそうだが，それにはその「何らかの条件」，具体的には $(l, \mathcal{P}) = 1$ という条件が非常に邪魔である．この条件は積分評価を主とする Hardy-Littlewood method において非常に扱いづらい条件である．

本証明においてこの問題を解消するのが，篩法の考え方である．このあたりに，Waring's problem から WGP へ拡張した際に篩法が活躍する理由がある．

篩法について簡単に説明する．前節でも触れたが，篩法とは $S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z)$ (定義 1.13) を評価することで様々な数論的性質を導く理論である．その評価には等式

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = \sum_{d | P(z)} \mu(d) |\mathscr{A}_d| \tag{1.30}$$

を用いる． この等式自体は，それぞれの定義を考えれば包除原理からすぐ導かれるものである．$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z)$ を評価するには，$|\mathscr{A}_d|$ を評価することが必要になるが，その方法については次の章で触れる．ここでは，篩法という手法が等式 (1.30) からスタートする，という説明に留める．

この考え方を $\nu_0(n)$ の評価に応用する．自然数 $d$ に対して，

$$J_d(n) = \sum_{\substack{(dl)^3 + p_1^3 + p_2^3 + p_3^3 + p_4^3 + p_5^3 + p_6^4 + p_7^4 = n \\ dl, p_1, p_4 \sim X_1 \\ p_2, p_3, p_5 \sim X_2, p_6, p_7 \sim Y}} 1 \tag{1.31}$$

とおく．ここで，$\nu_0(n)$ の条件と $J_d(n)$ の条件を比べれば，

$$\nu_0(n) = \sum_{d | \mathcal{P}} \mu(d) J_d(n) \tag{1.32}$$

と書けることがわかる. (1.32) と (1.30) は同じ形であるため, 篩法が応用できる.

等式 (1.32) を使って $\nu_0(n)$ を評価することには, 篩法が使える形であることのほかにもう 1 つ嬉しい点がある. 上記の通り, この等式から篩法を使って $\nu_0(n)$ を評価するには $J_d(n)$ を評価することが必要になるが, 今度の $J_d(n)$ の条件にはそれぞれの変数の大きさの範囲に関する条件しか現れておらず, $(l,\mathcal{P})=1$ のような積分で扱いづらい条件がないので, Hardy-Littlewood method が適用できる.

以上が WGP の証明に篩法と Hardy-Littlewood method が現れる理由である. 実際の証明では, Hardy-Littlewood method の技巧的な理由により, $J_d(n)$ 等に log の重みを付けて足し上げていたりするが, ここでは省略した.

## 1.4 定理 1.1 の証明

この節では, 必要な定理をすべて仮定し, 定理 1.1 の証明を行う. $\mathscr{P}$ を素数全体の集合とする.

必要な定理は, 大きく分けて 5 つである.

1 つ目の定理は, 篩法に関わるものである. 解説は定理 4.2 で行う.

**定理 1.33** (**Rosser の 1 次元篩**)**.** *$\omega(d)$ が $\Omega(1,K)$ (2.7参照) を満たすとする. $\mu_d^{\pm}$ を位数 $D$ の Rosser の重みとし,*

$$S^{\pm}=\sum_{d|P(z)}\mu_d^{\pm}\frac{\omega(d)}{d} \tag{1.34}$$

*とおく. $s=\log D/\log z$, $F(s), f(s)$ を定義 1.18 の篩関数とすると,*

$$S^{+}\le V(z)\{F(s)+O\big(e^{\sqrt{K}-s}(\log D)^{-1/3}\big)\}\quad (z\le D) \tag{1.35}$$

$$S^{-}\ge V(z)\{f(s)+O\big(e^{\sqrt{K}-s}(\log D)^{-1/3}\big)\}\quad (z\le D^{1/2}) \tag{1.36}$$

*が成立する.*

この評価の主要項となっている篩関数 $F(s), f(s)$ は,

$$\begin{cases}F(s)=1+O(e^{-s})\\ f(s)=1-O(e^{-s})\end{cases} \tag{1.37}$$

を満たし, $s>2$ において, $F(s)$ は単調減少, $f(s)$ は単調増加であることが非常に重要である.

次の二つの定理は Hardy-Littlewood method における, 平均値の定理と呼ばれるものである. 解説はそれぞれ, 定理 5.10, 定理 5.66 で行う. $C=10^{10}$, $D=n^{\frac{1}{36}-\varepsilon}$ とする.

**定理 1.38** (**平均値の定理**)**.**

$$J_d(n)=\sum_{\substack{(dl)^3+p_1^3+p_2^3+p_3^3+p_4^3+p_5^3+p_6^4+p_7^4=n\\ dl,p_1,p_4\sim X_1,p_2,p_3,p_5\sim X_2,p_6,p_7\sim Y}}\prod_{i=1}^{7}\log p_i$$

*とおく. また約数関数 $\tau(d)$ に対して, $a(d)$ を任意の $d\in\mathbb{N}$ に対して $|a(d)|\le\tau(d)$ を満たす数論的関数とする.*

*このとき以下の評価が成立する.*

$$\left|\sum_{d\le D}a(d)\Big(J_d(n)-\frac{\mathfrak{S}_d(n)}{d}\mathcal{J}(n)\Big)\right|\ll n^{\frac{85}{72}}\log^{-C}n \tag{1.39}$$

またこの証明中に,

$$\mathcal{J}(n) \asymp n^{\frac{85}{72}} \tag{1.40}$$

が示される.

**定理 1.41 (平均値の定理).**

$$J_d^{(r)}(n) = \sum_{\substack{(dl)^3+(mp)^3+p_1^3+p_2^3+p3^3+p_4^3+p_5^4+p_6^4=n \\ dl,mp,p_3\sim X_1,\ m\in\mathcal{N}_r,\ p_1,p_2,p_4\sim X_2,\ p_5,p_6\sim Y}} \prod_{i=1}^{6} \log p_i \frac{\log p}{\log(\frac{X_1}{m})}$$

とおく. また $a(d)$ を, 任意の $d \in \mathbb{N}$ に対して $|a(d)| \leq \tau(d)$ を満たす数論的関数とする. このとき以下の評価が成立する.

$$\sum_{d\leq D} a(d)\Big(J_d^{(r)}(n) - c_r \frac{\mathfrak{S}_d(n)}{d}\mathcal{J}(n)\Big) \ll n^{\frac{85}{72}} \log^{-C} n. \tag{1.42}$$

ここで $c_r$ は $7 \leq r \leq 36$ に対して以下のように定まる定数である.

$$c_r = (1+O(\varepsilon)) \int_{r-1}^{35} \frac{dt_1}{t_1} \cdots \int_3^{t_{r-4}-1} \frac{dt_{r-3}}{t_{r-3}} \int_2^{t_{r-3}-1} \frac{\log(t_{r-2}-1)dt_1}{t_1}$$

最後の二つの定理は, Hardy-Littlewood method と篩法の間をつなぐ定理である. 解説はそれぞれ, 定理 5.68, 定理 5.99 で行う.

**定理 1.43.** $\mathfrak{S}(n)$ は収束し,

$$\mathfrak{S}(n) > 0 \tag{1.44}$$

を満たす. また,

$$\omega(d) = \frac{\mathfrak{S}_d(n)}{\mathfrak{S}(n)}$$

とおけば, $\omega(d)$ は乗法的であり,

$$0 \leq \omega(d) < p, \quad \omega(p) = 1 + O(p^{-1})$$

が成り立つ.

**定理 1.45.**

$$V(z) = \prod_{p|P(z)} \Big(1 - \frac{\omega(p)}{p}\Big)$$

とおくと,

$$V(z) \asymp \frac{1}{\log z}$$

である. また, $\omega(d)$ はある定数 $K \geq 2$ に対して $\Omega(1, K)$ (定義 2.7参照) を満たす.

以下, 定理 1.1 の証明に入る. $z = D^{1/3} = n^{1/108+\varepsilon/3}$, $\mathcal{P} = P(z)$ とする.
命題 1.23 から,

$$\nu(n) \geq \sum_{\substack{l^3+p_1^3+p_2^3+p_3^3+p_4^3+p_5^3+p_6^4+p_7^4=n \\ (l,\mathcal{P})=1, l,p_1,p_4\sim X_1 \\ p_2,p_3,p_5\sim X_2, p_6,p_7\sim Y}} 1 - \sum_{r=7}^{36} \sum_{\substack{(mp)^3+p_1^3+p_2^3+p_3^3+p_4^3+p_5^3+p_6^4+p_7^4=n \\ m\in\mathcal{N}_r,\ mp,p_1,p_4\sim X_1 \\ p_2,p_3,p_5\sim X_2, p_6,p_7\sim Y}} 1$$

が成り立つ. そこで,

$$\nu_0(n) = \sum_{\substack{l^3+p_1^3+p_2^3+p_3^3+p_4^3+p_5^3+p_6^4+p_7^4=n \\ (l,\mathcal{P})=1, l,p_1,p_4\sim X_1 \\ p_2,p_3,p_5\sim X_2, p_6,p_7\sim Y}} 1, \tag{1.46}$$

$$\nu_r(n) = \sum_{\substack{(mp)^3+p_1^3+p_2^3+p_3^3+p_4^3+p_5^3+p_6^4+p_7^4=n \\ m\in\mathcal{N}_r,\ mp,p_1,p_4\sim X_1 \\ p_2,p_3,p_5\sim X_2, p_6,p_7\sim Y}} 1 \tag{1.47}$$

とおき, $\nu_0(n)$ の下からの評価と $\nu_r(n)$ の上からの評価を与え, $\nu(n)$ を下から評価する.

(1) $\nu_0(n)$ の下からの評価

$$\mathcal{R}(l) = \sum_{\substack{l^3+p_1^3+p_2^3+p_3^3+p_4^3+p_5^3+p_6^4+p_7^4=n \\ p_1,p_4\sim X_1 \\ p_2,p_3,p_5\sim X_2, p_6,p_7\sim Y}} \prod_{i=1}^{7} \log p_i$$

とおくと, (1.30) の考え方と Rosser の重みの性質 ((3.23) 参照) から,

$$\sum_{\substack{l\sim X_1 \\ (l,\mathcal{P})=1}} R(l) = \sum_{d|\mathcal{P}} \mu(d) J_d(n) \geq \sum_{d|\mathcal{P}} \mu_d^- J_d(n) \tag{1.48}$$

が成り立つ. また数え上げに現れる $p_1, \ldots, p_7$ について, それぞれの大きさの条件から,

$$\prod_{i=1}^{7} \log p_i \leq \log 2\mathbf{X} \tag{1.49}$$

が成り立つ. よって (1.46), (1.48), (1.49) から,

$$\begin{aligned} \nu_0(n) &\geq \frac{1}{\log 2\mathbf{X}} \sum_{\substack{l\sim X_1 \\ (l,\mathcal{P})=1}} \mathcal{R}(l) \\ &\geq \frac{1}{\log 2\mathbf{X}} \sum_{d|\mathcal{P}} \mu_d^- J_d(n) \end{aligned} \tag{1.50}$$

を得る. ここで, 定理 1.38 を

$$a(d) = \begin{cases} \mu_d^- & (d|\mathcal{P}) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{1.51}$$

として用いて $J_d(n)$ を近似すれば,

$$\nu_0(n) \geq \frac{\mathfrak{S}(n)\mathcal{J}(n)}{\log 2\mathbf{X}} \sum_{d|\mathcal{P}} \mu_d^- \frac{\omega(d)}{d} + O\Big(\frac{n^{\frac{85}{72}}}{\log^C n \log 2\mathbf{X}}\Big) \tag{1.52}$$

が成り立つことが分かる. これに定理 1.33 を用いれば, $s = \log D/\log z = 3$ より,

$$\begin{aligned} \nu_0(n) &\geq (1 + O(\log^{-\frac{1}{3}} D)) \frac{f(3)\mathfrak{S}(n)\mathcal{J}(n)V(z)}{\log 2\mathbf{X}} + O\Big(\frac{n^{\frac{85}{72}}}{\log^C n \log 2\mathbf{X}}\Big) \\ &\geq (1-\varepsilon) \frac{f(3)\mathfrak{S}(n)\mathcal{J}(n)V(z)}{\log 2\mathbf{X}} + O\Big(\frac{n^{\frac{85}{72}}}{\log^C n \log 2\mathbf{X}}\Big) \end{aligned} \tag{1.53}$$

という, $\nu_0(n)$ の下からの評価を得る.

(2) $\nu_r(n)$ の上からの評価

$$\mathcal{R}_r(l) = \sum_{\substack{l^3+(mp)^3+p_1^3+p_2^3+p_3^3+p_4^3+p_5^4+p_6^4=n \\ m\in\mathcal{N}_r, mp, p_3\sim X_1 \\ p_1,p_2,p_4\sim X_2, p_5,p_6\sim Y}} \left(\frac{\log p}{\log(\frac{X_1}{n})}\right)\prod_{i=1}^{6}\log p_i$$

とおくと, (1) と同様の評価によって,

$$\sum_{\substack{l\sim X_1 \\ (l,\mathcal{P})=1}} R_r(l) = \sum_{d|\mathcal{P}}\mu(d)J_d^{(r)}(n) \le \sum_{d|\mathcal{P}}\mu_d^{+}J_d^{(r)}(n) \tag{1.54}$$

が成り立つ. また数え上げに現れる $p,\ p_1,\ldots,p_6$ について, それぞれの大きさの条件から,

$$\frac{\log \mathbf{X}}{\log X_1} \le \left(\frac{\log p}{\log(\frac{X_1}{n})}\right)\prod_{i=1}^{6}\log p_i \tag{1.55}$$

が成り立つ. よって (1) と同様にして,

$$\begin{aligned}
\nu_r(n) &\le \frac{\log X_1}{\log \mathbf{X}}\sum_{\substack{l\sim X_1 \\ (l,\mathcal{P})=1}}\mathcal{R}_r(l) \\
&\le (1+O(\log^{-\frac{1}{3}} D))\frac{F(3)c_r\mathfrak{S}(n)\mathcal{J}(n)V(z)}{\log \mathbf{X}} + O\Big(\frac{n^{\frac{85}{72}}\log X_1}{\log^C n\log \mathbf{X}}\Big) \\
&\le (1+O(\log^{-\frac{1}{3}} D))\frac{F(3)c_r\mathfrak{S}(n)\mathcal{J}(n)V(z)}{\log \mathbf{X}} + O\Big(\frac{n^{\frac{85}{72}}\log X_1}{\log^C n\log \mathbf{X}}\Big) \\
&\le (1+\varepsilon)\frac{F(3)c_r\mathfrak{S}(n)\mathcal{J}(n)V(z)}{\log \mathbf{X}} + O\Big(\frac{n^{\frac{85}{72}}\log X_1}{\log^C n\log \mathbf{X}}\Big)
\end{aligned} \tag{1.56}$$

を得る.

(3) $\nu(n)$ の評価
数値計算により,

$$\begin{aligned}
&c_7 < 0.4487,\quad c_8 < 0.1136,\quad c_9 < 0.0226,\quad c_{10} < 0.0036,\quad c_{11} < 0.0005, \\
&c_r < 0.0001 \quad (12 \le r \le 36)
\end{aligned}$$

が成り立つ. つまり,

$$\sum_{r=7}^{36} c_r < 0.5915 \tag{1.57}$$

である. (1.21), (1.53), (1.56), (1.57), $\log 2 > 0.6931$ から

$$
\begin{aligned}
\nu(n) &\geq \{(1-\varepsilon)f(3) - (1+\varepsilon)F(3)\sum_{r=7}^{36} c_r\}\frac{\mathfrak{S}(n)\mathcal{J}(n)V(z)}{\log \mathbf{X}} + O\Big(\frac{n^{\frac{85}{72}}}{\log^C n \log \mathbf{X}}\Big) + O\Big(\frac{n^{\frac{85}{72}}\log X_1}{\log^C n \log \mathbf{X}}\Big) \\
&\geq \{(1-\varepsilon)\log 2 - (1+\varepsilon)\sum_{r=7}^{36} c_r\}\frac{2e^{\gamma}\mathfrak{S}(n)\mathcal{J}(n)V(z)}{3\log \mathbf{X}} + O\Big(\frac{n^{\frac{85}{72}}\log X_1}{\log^C n \log \mathbf{X}}\Big) \\
&\geq \{(1-\varepsilon)\cdot 0.6931 - (1+\varepsilon)\cdot 0.5915\}\frac{2e^{\gamma}\mathfrak{S}(n)\mathcal{J}(n)V(z)}{3\log \mathbf{X}} + O\Big(\frac{n^{\frac{85}{72}}\log X_1}{\log^C n \log \mathbf{X}}\Big) \\
&\gg \frac{\mathfrak{S}(n)\mathcal{J}(n)V(z)}{\log \mathbf{X}} + O\Big(\frac{n^{\frac{85}{72}}\log X_1}{\log^C n \log \mathbf{X}}\Big) \qquad (1.58)
\end{aligned}
$$

を得る.

ここで, (1.40), 定理 1.43, 定理 1.45 より, $z = n^{1/108+\varepsilon/3}$ に注意して評価すると,

$$
\frac{\mathfrak{S}(n)\mathcal{J}(n)V(z)}{\log \mathbf{X}} \gg \frac{n^{\frac{85}{72}}}{\log z(\log X_1)^2(\log X_2)^3(\log Y)^2} \asymp \frac{n^{\frac{85}{72}}}{\log^8 n}
$$

であり,

$$
\frac{n^{\frac{85}{72}}\log X_1}{\log^C n \log \mathbf{X}} = \frac{n^{\frac{85}{72}}}{\log^C n \log X_1(\log X_2)^3(\log Y)^2} \asymp \frac{n^{\frac{85}{72}}}{\log^{C+6} n} \ll \frac{n^{\frac{85}{72}}}{\log^8 n}
$$

なので, (1.58) より,

$$
\nu(n) \gg \frac{n^{\frac{85}{72}}}{\log^8 n} \qquad (1.59)
$$

が従う. 以上が定理 1.1 の証明である.

# 第2章　篩法とは

篩法とは, 古くは紀元前3世紀の科学者 Eratosthenes が考案した素数発見のアルゴリズムである「Eratosthenes の篩」に始まり, 現代では双子素数に関する予想や Goldbach 予想に関して部分的な結果を導いている, 数論上の技法である. この論文では, H.Halberstam と H.E.Richert による篩法に関する古典的な文献 [7](1974) を中心にその概要をまとめている. また本文を通して本橋洋一氏の文献 [22](2005) も参考にしている.

第2章では, 2.1 節で篩法の発端となる Eratosthenes の篩の紹介, 2.2 節で篩法の議論のための準備, 2.3 節でその応用例の紹介を行う.

## 2.1　Eratosthenes の篩

Eratosthenes の篩とは, 以下のようなものである.

> 実数 $z > 2$ より小さな素数をすべて既知とする. 区間 $[z, z^2)$ に入る自然数全体の集合を考え, それらの自然数のうち, $z$ よりも小さい素数で割り切れるものを排除していく. 残った自然数が区間 $[z, z^2)$ に入る素数全体である.

その証明はたやすい. 残った自然数が合成数ならばその素因数は $z$ 以上であり, それらの積は $z^2$ 以上となるからである. この方法を使えば, $z$ までの素数を用いて $z^2$ までの素数表を作れるため, その観点においては非常に有用である.

次に, もう少し具体的に篩われた後に残る自然数の「量」について考える.

$z$ より小さい素数の個数を $\pi(z)$, $z$ 以下の素数全体の積を $P(z)$, $\mu$ をメビウス関数とすると, 包除原理から,

$$\pi(z^2) - \pi(z) + 1 = \sum_{d|P(z)} \mu(d)\left[\frac{z^2}{d}\right]. \tag{2.1}$$

これにガウス関数に関する評価,

$$\frac{z^2}{d} - 1 < \left[\frac{z^2}{d}\right] \leq \frac{z^2}{d}$$

を, $\mu(d) < 0$ の場合もあることに注意して用いると,

$$\begin{aligned} \pi(z^2) - \pi(z) + 1 &\leq \sum_{d|P(z)} \Big(\mu(d)\frac{z^2}{d} + 1\Big) \\ &\leq z^2 \sum_{d|P(z)} \frac{\mu(d)}{d} + \sum_{d|P(z)} 1 \\ &= z^2 \prod_{p<z}\left(1 - \frac{1}{p}\right) + 2^{\pi(z)} \end{aligned}$$

が成立する. これは下からの評価も同様であるが, 包除原理のみを用いたこの方法では誤差項 $2^{\pi(z)}$ があまりに大きい (数え上げの数があまりに多い, ともいえる). これが Eratosthenes の篩の欠点で

あり,「定量」という観点からは Eratosthenes の篩の利用は難しいことがわかるだろう. これに対して Brun は, 数え上げげに関わる自然数 $d$ の素因数の数を制限する, という方法でこの欠点を改良してみせた. それについては第 3 章で触れる.

## 2.2 篩法の定式化

この節では篩法の一般的な議論のため, その定式化を行う. この節での記法は, この論文を通して有効なものとする.

篩法の基本的な方針は,「ある自然数の集合 $\mathscr{A}$ から, ある素数の集合 $\mathscr{P}$ の元を素因数に持つようなものを排除し, 残った集合の大きさの評価から, 定量的な結果を得る.」というものである. つまり, $\mathscr{A}$ をある自然数の集合, $\mathscr{P}$ をある素数の集合として,

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = \#\{a \in \mathscr{A} \mid a \text{ は } \mathscr{P} \text{ に } z \text{ より小さい素因数を持たない }\}$$

を評価することが篩法という技法の本質である. ここで,

$$\mathscr{A}_d = \{a \in \mathscr{A} \mid a \equiv 0 \pmod{d}\}$$

$$P(z) = \prod_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p < z}} p$$

と書く.「$a$ は $\mathscr{P}$ に $z$ より小さい素因数を持たない」の必要十分条件は,「$(a, P(z)) = 1$」であるから, そのような事象の特性関数は, メビウス関数 $\mu(d)$ を用いて,

$$\sum_{d \mid (a, P(z))} \mu(d)$$

と書ける. 以上から,

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = \sum_{d \mid P(z)} \mu(d) |\mathscr{A}_d| \tag{2.2}$$

と表せることがわかる. ゆえに, $S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z)$ の評価には, 各 $|\mathscr{A}_d|$ の評価が必要になる. それには次の定式化が一般的である.

まず, $|\mathscr{A}|$ を近似するような量 $X > 1$ を考える. 次に任意の整数 $d \geq 1$ について, 非負の乗法的関数 $\omega(d)$ を定義し, 近似式

$$|\mathscr{A}_d| = \frac{\omega(d)}{d} X + r(\mathscr{A}, d) \tag{2.3}$$

によって, $|\mathscr{A}_d|$ を評価する. つまり第一項を $|\mathscr{A}_d|$ の近似値, 第二項を誤差項とみる. 誤差項はそれぞれ, または平均的に小さい量となることを要求する.

ここで,

$$V(z) = \prod_{p \mid P(z)} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) \tag{2.4}$$

$$R(\mathscr{A}, z) = \sum_{d \mid P(z)} \mu(d) r(\mathscr{A}, d) \tag{2.5}$$

と定義する. (2.3) を (2.2) に代入すれば,

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = V(z) X + R(\mathscr{A}, z) \tag{2.6}$$

という定式化を得る.

篩を議論する際に, ここで現れた $\omega(d)$, $V(z)$ に対して以下の仮定を課すことがある.

**定義 2.7.** $\omega(d)$ に関する次の条件を, $\Omega(\kappa, K)$ と書く. ある定数 $\kappa > 0$ と $K \geq 2$ が存在して, 全ての $2 \leq w < z$ に対して

$$\prod_{\substack{w \leq p < z \\ p \in \mathscr{P}}} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1} = \frac{V(w)}{V(z)} \leq \Big(\frac{\log z}{\log w}\Big)^{\kappa} \Big(1 + \frac{K}{\log w}\Big) \tag{2.8}$$

が成り立つ.

この仮定は $V(z)^{-1}$ のある程度の大きさを上から統制するものである. この仮定が成り立つ篩を「$\kappa$ 次の篩」という. 今回の論文で扱う定理 1.1 の証明には, 1 次元の篩が登場する.

最後にこの仮定から従う命題を示す.

**命題 2.9.** $\omega(d)$ が,

$$0 < \omega(p) < p \tag{2.10}$$

を満たすとする. このとき, 任意の $2 \leq w \leq z$ に対して,

$$\exp\left(\sum_{w \leq p < z} \frac{\omega(p)}{p}\right) \leq \frac{V(w)}{V(z)} \tag{2.11}$$

が成り立つ.

さらに, $\omega(d)$ が $\Omega(\kappa, K)$ を満たすとすると, $2 \leq w < z$ に対して,

$$\sum_{w \leq p < z} \frac{\omega(p)}{p} \leq \kappa \log \frac{\log z}{\log w} + \log\left(1 + \frac{K}{\log w}\right), \tag{2.12}$$

$$\sum_{w \leq p < z} \frac{\omega(p)}{p \log p} \leq -\frac{\kappa}{\log z} + \frac{\kappa}{\log w} + \frac{1}{\log w} \log\left(1 + \frac{K}{\log w}\right) \tag{2.13}$$

が成り立つ.

**証明.** テイラー展開より, $|x| < 1$ に対して,

$$\log(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

であるから, $0 < \omega(p)/p < 1$ に注意すると,

$$\begin{aligned}
\log \frac{V(w)}{V(z)} &= -\sum_{w \leq p < z} \log\left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) \\
&= \sum_{w \leq p < z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\omega(p)}{p}\right)^n \\
&\geq \sum_{w \leq p < z} \frac{\omega(p)}{p}
\end{aligned}$$

が成立するので, 両辺の exponential を取れば (2.11) が従い, これに仮定 $\Omega(\kappa, K)$ を適用すれば (2.12) が従う.

(2.13) の証明には Abel の部分和法 (命題 1.9) を用いる. $\lambda_n$ として, $w$ 以上の素数全てを小さい順に並べたものをとる.

$$a_n = \frac{\omega(\lambda_n)}{\lambda_n}, \quad \phi(x) = \frac{1}{\log x}$$

に対して, Abel の部分和法を用いると,

$$\begin{aligned}
\sum_{w \le p < z} \frac{\omega(p)}{p \log p} &= \frac{1}{\log z} \sum_{w \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} + \int_{\lambda_1}^{z} \frac{1}{x \log^2 x} \sum_{w \le p < x} \frac{\omega(p)}{p} dx \\
&\le \frac{1}{\log z} \left\{ \kappa \log \frac{\log z}{\log w} + \log\left(1 + \frac{K}{\log w}\right) \right\} \\
&\quad + \int_{w}^{z} \frac{1}{x \log^2 x} \left\{ \kappa \log \frac{\log x}{\log w} + \log\left(1 + \frac{K}{\log w}\right) \right\} dx \\
&= \frac{1}{\log z} \left\{ \kappa \log \frac{\log z}{\log w} + \log\left(1 + \frac{K}{\log w}\right) \right\} \\
&\quad + \kappa \left[ -\frac{\log\log x}{\log x} - \frac{1}{\log x} \right]_w^z \\
&\quad + \left[ -\frac{1}{\log x} \right]_w^z \left\{ -\kappa \log\log w + \log\left(1 + \frac{K}{\log w}\right) \right\} \\
&= -\frac{\kappa}{\log z} + \frac{\kappa}{\log w} + \frac{1}{\log w} \log\left(1 + \frac{K}{\log w}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ. □

**注 2.14.** 篩の次元を定める仮定を, ある $\kappa > 0$ と $A \ge 1,\ L \ge 1$ が存在して, 全ての $2 \le w < z$ に対して,

$$-L \le \sum_{w \le p < z} \frac{\omega(p) \log p}{p} - \kappa \log \frac{z}{w} \le A \tag{2.15}$$

が成り立つこととする文献もある ([7] など). 本論文では Iwaniec の論文に沿った仮定としたが, $\Omega(\kappa, K)$ は上記の仮定よりも弱いものである ([7, p.145, (2,4)] 参照).

片側のみの条件である $\Omega(\kappa, K)$ からこの形の良い評価を導き出すことは困難である. なぜなら, Abel の部分和法から,

$$\sum_{w \le p < z} \frac{\omega(p) \log p}{p} = \log z \sum_{w \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} - \int_{\lambda_1}^{z} \frac{1}{x} \sum_{w \le p < x} \frac{\omega(p)}{p} dx \tag{2.16}$$

が成り立つが, これを上下どちらの側から評価しようとしても $\sum \omega(p)/p$ の両側からの評価が必要になるからである (少なくとも Abel の部分和法を用いた方法では難しい).

## 2.3 $\mathscr{A}$ の例

この節では, 篩法で頻繁に議論される $\mathscr{A}$ の例について記す. $\mathscr{P}$ を素数全体の集合とする.

ここでは数論上の大きな問題のうちの二つである, 「双子素数の予想」と「Goldbach 予想」に関する例を挙げる.

**予想 2.17** (双子素数の予想)**.** 素数 $p$ であって, $p+2$ も素数であるものは無限に存在するか？

**予想 2.18** (Goldbach 予想)**.** 6 以上の任意の偶数は, 2 つの奇素数の和で表せるか？

まず初めに「双子素数の予想」に関してだが, これは愚直に考えれば, 集合

$$\{\ p \mid p \le x,\ p+2 = p'\}$$

の要素の数を考え, $x$ を大きくしたときの挙動を調べることになるが, それには次の命題が使える.

**命題 2.19.** $x \ge 7$ とする.

$$\mathscr{A} = \{\ n(n+2)\ | n \in \mathbb{N},\ n \le x\}$$

と置いたとき, $\sqrt{x+2} < z \le x$ に対して,

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = |\{\ p \mid p \le x,\ p+2 = p'\}|$$

が成り立つ.

**証明.** 定義から,

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = |\{\ n(n+2) \mid n \le x,\ (n(n+2), P(z)) = 1\}|$$

であるが, 右辺の意味を考えれば,

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = |\{\ n \mid n \le x,\ (n, P(z)) = 1,\ (n+2, P(z)) = 1\}|$$

と書き換えることができる. この篩で数えられるような $n$ について, $n$ の最も小さい素因数を $p$ とおくと, 条件から $n$ は $z$ より小さい素因数を持たないので,

$$\sqrt{x+2} < z \le p \le x$$

が成立する. ここで $n$ が素数でないと仮定すると, $n \ge p^2$ より,

$$x + 2 < p^2 \le z \le x$$

となり矛盾するので, $n$ は素数である. $n+2$ に関しても, その最も小さな素因数 $p$ を考えれば, 同様の方法で $n+2$ が素数であることが示せる. よって命題が従う. □

この命題によって, 上で定義された $S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z)$ を篩法を用いて評価することで, 双子素数の予想に関する結果を得ることができる.

双子素数の予想を拡張して, 「素数 $p$ であって, $p+2 \in P_k$ となるような $p$ が無限に存在する.」という命題を考えると, 次の章で紹介する Brun の篩を使えば $k = 7$([7, p.67]) について証明できる. また, Selberg の方法を用いて $k = 4$([7, p.220]), weighted sieve を用いて $k = 3$([7, p.247, Theorem 9.2]), Chen の定理を用いて $k = 2$([7, p.320 − 321]) の場合について証明されている. $k = 1$ の時, つまりもともとの双子素数の予想そのものについては未だに証明できていない.

もう一つの例, 「Goldbach 予想」に関するものはもっと簡潔で, $N$ を十分大きな偶数とし,

$$\mathscr{A} = \{\ N - p \mid p \le x\}$$

を篩にかけて評価することで結果を得る. これも Chen の定理によって, 十分大きな偶数 $N$ は素数 $p$ と自然数 $x \in P_2$ の和で表せることがわかっている ([7, p.320, Theorem 11.1]).

# 第3章　Brunの篩

この章では, 2.1 節で Eratosthenes の篩の欠点を改良した Brun の発想の解説, 2.2 節で Brun の篩の具体的な構成についての解説を行う. 定理 1.1 の証明に登場する Rosser の篩も Brun の篩の発想に基づくものである.

## 3.1　Brun の篩の発想-組み合わせ論的篩

Brun は,「篩にかけられる自然数 $a$ が $\mathscr{P}$ に z 以下の素因数を持たない」という事象の特性関数である,

$$\sum_{d|(a,P(z))} \mu(d) \tag{3.1}$$

に着目し, 篩を構成した. これは, Erathostenes の篩の欠点が, この特性方程式を直接 (2.2) の変形 (Erathostenes の篩における (2.1) の変形) に用いたことで誤差項の項数が多くなりすぎたことに起因すると考えたためである. そのため, 次の定式化を用いる.

**定義 3.2.** $\chi(d)$ を平方因子を持たない $d$ に対して与えられる数とし,

$$\sigma(d) = \sum_{d|n} \mu(d)\chi(d), \quad \sigma(1) = \chi(1) = 1 \tag{3.3}$$

と定める. 特に, ${}^{\forall}d > 0$ に対して $\chi(d) = 1$ の場合を,

$$\sigma_0(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \tag{3.4}$$

と書く.

つまり, 原因となる特性方程式 (3.1) の各 $\mu(d)$ に重み $\chi(d)$ をつけることでその挙動を統制しようという考えである (とはいっても, $\sigma_0((n, P(z)))$ は $n$ が $P(z)$ と互いに素であるような時は常に 0 であるから, $\sigma((n, P(z)))$ も $n > 0$ でほとんどが 0 に近いように定める).

この定式化の使い方を見るために, 以下の命題を示す.

**命題 3.5.**

$$\mathscr{P}^{(d)} = \{p \mid p \in \mathscr{P},\ p \nmid d\} \tag{3.6}$$

と定める. このとき, 恒等式

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = \sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi(d)|\mathscr{A}_d| - \sum_{1<d|P(z)} \sigma(d) S\left(\mathscr{A}_d, \mathscr{P}^{(d)}, z\right) \tag{3.7}$$

が成り立つ.

**証明.** (3.3) にメビウスの反転公式を用いると,

$$\mu(d)\chi(d) = \sum_{\delta | d} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right)\sigma(d) \tag{3.8}$$

が成り立つことが分かる．よって,

$$\begin{aligned}\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi(d)|\mathscr{A}_d| &= \sum_{d|P(z)} |\mathscr{A}_d|\mu\left(\frac{d}{\delta}\right)\sigma(d) \\ &= \sum_{\delta|P(z)} \sigma(\delta) \sum_{t|P(z)/\delta} \mu(t)|\mathscr{A}_{\delta t}| \end{aligned}\tag{3.9}$$

である．なお二つ目の等号は, $d = \delta t$ と置いて和の順番を入れ替えることによる.

(3.9) に (2.2) を代入し, $\delta = 1$ だけ和から取り出して整理すれば, 目的の恒等式を得る. □

基本的な方針として $\chi(d)$ をうまく定めることで $S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z)$ を評価することを考えたいのだが, (3.7) の右辺の第二項が $\chi(d)$ ではなく $\sigma(d)$ を使って書かれている点で, まだまだ使いづらい恒等式であるといえる．よって次の恒等式を使う.

**命題 3.10.** $P_{\min}(d)$ を $d > 1$ の最小の素因数とする．また, $P_{\min}(1) = \infty$ とする.

次の恒等式が成立する.

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = \sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi(d)|\mathscr{A}_d| - \sum_{d|P(z)} \sum_{\substack{p|P(z)\\ p<P_{\min}(d)}} \mu(d)\{\chi(d) - \chi(pd)\}S(\mathscr{A}_{pd}, \mathscr{P}, p). \tag{3.11}$$

**証明.** (3.7) から $\sigma(d)$ を消去することを考えるので, (3.3) を使いたいが, これにおいて $d$ の約数であるような $p$ について別で数え上げた,

$$\begin{aligned}\sigma(d) &= \sum_{l|d/p} \mu(l)\chi(l) + \sum_{l|d/p} \mu(pl)\chi(pl) \\ &= \sum_{l|d/p} \mu(l)\{\chi(d) - \chi(pl)\}\end{aligned}\tag{3.12}$$

を考える．なお二つ目の等号は $\mu(pl) = -\mu(l)$ による.

また, $2 \le z_1 \le z$ に対して,

$$P_{z_1,z} = \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ z_1\le p<z}} p = \frac{P(z)}{P(z_1)} \tag{3.13}$$

と書くと, $S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z_1)$ で数え上げられる $\mathscr{A}$ の元を上手く分類することで,

$$\begin{aligned}S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z_1) &= \sum_{t|P_{z_1,z}} \sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\ (a,P(z_1))=1\\ (a,P_{z_1,z})=t}} 1 \\ &= \sum_{t|P_{z_1,z}} \sum_{\substack{a\in\mathscr{A}_t\\ (a,P(z)/t)=1}} 1 \\ &= \sum_{t|P_{z_1,z}} S\left(\mathscr{A}_t, \mathscr{P}^{(t)}, z\right)\end{aligned}\tag{3.14}$$

が成り立つ.

ここで (3.7) の右辺の第二項に, (3.12) において $p = P_{\min}(d)$ としたものと (3.14) を用いると, $d = p\delta$ とおいて,

$$\begin{aligned}\sum_{1<d|P(z)} \sigma(d) S\left(\mathscr{A}_d, \mathscr{P}^{(d)}, z\right) &= \sum_{\delta|P(z)} \sum_{\substack{p|P(z)\\ p<P_{\min}(d)}} S\left(\mathscr{A}_{p\delta}, \mathscr{P}^{(p\delta)}, z\right) \sum_{l|\delta} \mu(l)\{\chi(l) - \chi(pl)\} \\ &= \sum_{l|P(z)} \sum_{\substack{p|P(z)\\ p<P_{\min}(l)}} \mu(l)\{\chi(l) - \chi(pl)\} \sum_{\substack{t|P(z)/l\\ p<q(t)}} S\left(\mathscr{A}_{plt}, \mathscr{P}^{(plt)}, z\right) \\ &= \sum_{l|P(z)} \sum_{\substack{p|P(z)\\ p<P_{\min}(l)}} \mu(l)\{\chi(l) - \chi(pl)\} S\left(\mathscr{A}_{pl}, \mathscr{P}^{(pl)}, p\right) \qquad (3.15)\end{aligned}$$

と変形できる. なお二つ目の等号は $\delta = lt$ とおいて和の順番を入れ替えることにより, 最後の等号は (3.14) の変形を逆に用いることによる.

ここで, (3.15) の $\mathscr{P}^{(pl)}$ は $\mathscr{P}$ に置き換えることができる. なぜなら $p < P_{\min}(l)$ ならば, $p$ より小さい素数 $p'$ は常に $p' \nmid pl$ を満たすので,

$$\mathscr{P}^{(pl)} = \{p' \mid p' \in \mathscr{P},\ p' \nmid pl\}$$

より,

$$\{p' \in \mathscr{P}^{(pl)} \mid p' < p\} = \{p' \in \mathscr{P} \mid p' < p\}$$

が成り立つからである.

よって (3.15) を (3.7) に代入することで, (3.11) が従う. □

またこの恒等式において, $\chi(1) = 1$, ${}^\forall d > 1$ に対して $\chi(d) = 0$ とすることで導かれる次の恒等式は Buchstab equation と呼ばれる. Buchstab equation を使えば $S$ の上界と下界を入れ替えて評価することができるため, 篩理論において非常に重要なものである.

**定理 3.16** (Buchstab equation)**.** 任意の $2 \leq z_1 \leq z$ と $q \in \mathbb{N}$ に対して, 次の二つの等式が成り立つ.

$$S(\mathscr{A}_q, \mathscr{P}, z) = S(\mathscr{A}_q, \mathscr{P}, z_1) - \sum_{\substack{z_1 \leq p < z\\ p \in \mathscr{P}}} S(\mathscr{A}_{qp}, \mathscr{P}, p) \qquad (3.17)$$

$$V(z) = V(z_1) - \sum_{z_1 \leq p < z} \frac{\omega(p)}{p} V(p) \qquad (3.18)$$

**証明.** (3.11) において, $\chi(1) = 1$, ${}^\forall d > 1$ に対して $\chi(d) = 0$ とすることで,

$$S(\mathscr{A}_q, \mathscr{P}, z) = |\mathscr{A}_q| - \sum_{\substack{p<z\\ p \in \mathscr{P}}} S(\mathscr{A}_{qp}, \mathscr{P}, p) \qquad (3.19)$$

が成り立つ. $z$ と $z_1$ についてのこの等式を辺々引き算することで, (3.17) を得る.

(3.18) を示す. $\mathscr{P}$ に含まれる素数を小さい順に $p_1, p_2, \ldots$ とする. $z \leq p_1$ ならば $P(z) = P(z_1)$ なので, (3.18) は自明に成り立つ.

よって $p < z$ とし, $N \in \mathbb{N}$ が, $p_N < z \leq p_{N+1}$ を満たすとする. このとき, $V(z)$ の定義 (2.4) より, $k = 1, 2, \ldots N$ に対して,

$$V(p_{k+1}) - V(p_k) = -\frac{p_k}{p_k} V(p_k)$$

が成立する. これを $k = 1, 2, \ldots N$ について辺々足し上げることで (3.18) を得る. □

さて, (3.11) から上手く $S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z)$ を評価する方法を考えたい. そこで, 二つの数論的関数

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\chi_k(d), \quad \sigma_k(1) = \chi_k(1) = 1 \quad (k = 1, 2) \tag{3.20}$$

を考えて, 以下の仮定をする.

**仮定 3.21.** 任意の $pd|P(z)$, $p < P_{\min}(d)$ と $k = 1, 2$ に対して,

$$(-1)^{k-1}\mu(d)\{\chi_k(d) - \chi_k(pd)\} \geq 0 \tag{3.22}$$

が成立する.

するとこの仮定の上で, (3.11) より,

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_2(d)|\mathscr{A}_d| \leq S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) \leq \sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_1(d)|\mathscr{A}_d| \tag{3.23}$$

が成り立ち, さらに (2.3) をこれに代入することで,

$$\begin{aligned} X \sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_2(d)\frac{\omega(d)}{d} - \sum_{d|P(z)} |\chi_2(d)||r(\mathscr{A}, d)| &\leq S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) \\ \leq X \sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_1(d)\frac{\omega(d)}{d} - \sum_{d|P(z)} |\chi_1(d)||r(\mathscr{A}, d)| & \end{aligned} \tag{3.24}$$

という $S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z)$ の上下からの評価式を得る. これにより, $S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z)$ の評価の議論を,

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_2(d)\frac{\omega(d)}{d} \text{ を最大化し,}$$

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_1(d)\frac{\omega(d)}{d} \text{ を最小化し,}$$

さらに $k = 1, 2$ について,

$$\sum_{d|P(z)} |\chi_k(d)||r(\mathscr{A}, d)| \text{ が十分小}$$

となるような $\chi_1, \chi_2$ の構成の議論へと移すことができる.

このようにして構成された $\chi_k$ によって特徴付けられる篩を組み合わせ論的篩と呼ぶ. これは, その構成が包除原理に基づいた等式を起点にしているからである. Brun の篩は組み合わせ論的篩の走りであり, その具体的な構成は次の節で述べる.

また今回 WGP の証明に用いる Rosser の篩も組み合わせ論的篩である. そこで, 仮定 3.21 を満たすような $\chi_1, \chi_2$ の十分条件を述べて, この節を終える.

**命題 3.25.** 以下の 4 つの条件を全て満たす $\chi_1, \chi_2$ は, 仮定 3.21 を満たす. 各 $k = 1, 2$ に対して,
(1) 任意の $d|P(z)$ に対して, $\chi_k(d) = 0$ または 1,
(2) $\chi_k(1) = 1$,
(3) 任意の $t|d,\ d|P(z)$ に対して, $\chi_k(d) = 1$ ならば $\chi_k(t) = 1$,
(4) 任意の $pt|P(z),\ p < P_{\min}(t)$ に対して, $\chi_k(t) = 1$ かつ $\mu(t) = (-1)^k$ ならば $\chi_k(pt) = 1$

**証明.** 条件 (1), (2), (3) より, 仮定 (3.21) が満たされないのは,

$$\chi_k(d) = 1, \quad \chi_k(pd) = 0, \quad \mu(d) = (-1)^k$$

が同時に起きるときだけであるが, 条件 (4) よりこれは起きない. □

## 3.2 Brun の篩

この節では, 前節の組み合わせ論的篩の構成を踏まえ, Brun の篩の構成とその結果について解説する.

組み合わせ論的篩の有効な構成には, $\displaystyle\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_k(d)\frac{\omega(d)}{d}$ の最小化, 最大化が重要であった. この式を扱いやすい形に変形するため, 篩に以下の仮定を課す.

**仮定 3.26.** ある定数 $A_1 \geq 1$ が存在し, 任意の $p \in \mathscr{P}$ に対して,

$$0 \leq \frac{\omega(p)}{p} \leq 1 - \frac{1}{A_1} \tag{3.27}$$

を満たす.

この仮定により, 任意の $p \in \mathscr{P}$ に対して,

$$1 \leq \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1} \leq A_1 \tag{3.28}$$

が成り立つので, 以下の関数が well-defined となる.

**定義 3.29.** 平方因子を持たない $d \in \mathbb{N}$ に対して,

$$g(d) = \frac{\omega(d)}{d} \prod_{p|d} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1} \tag{3.30}$$

と定める.

この $g(d)$ を使って, $\displaystyle\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_k(d)\frac{\omega(d)}{d}$ を変形する.

**命題 3.31.** 仮定 3.26 が満たされているとき,

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_k(d)\frac{\omega(d)}{d} = V(z)\left\{1 + \sum_{1<\delta|P(z)} \sigma_k(\delta)g(\delta)\right\} \tag{3.32}$$

が成り立つ.

**証明.** (3.8) を用いると,

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_k(d)\frac{\omega(d)}{d} = \sum_{d|P(z)} \frac{\omega(d)}{d} \sum_{\delta|d} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right)\sigma_k(\delta)$$

と表せる. ここで, $d = \delta t$ とおいて和の順番を入れ替えると,

$$\begin{aligned}
\sum_{d|P(z)} \frac{\omega(d)}{d} \sum_{\delta|d} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right)\sigma_k(\delta) &= \sum_{\delta|P(z)} \sigma_k(\delta)\frac{\omega(\delta)}{\delta} \sum_{t|(P(z)/\delta)} \mu(t)\frac{\omega(t)}{t} \\
&= \sum_{\delta|P(z)} \sigma_k(\delta)\frac{\omega(\delta)}{\delta} \prod_{p|(P(z)/\delta)} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) \\
&= \sum_{\delta|P(z)} \sigma_k(\delta)\frac{\omega(\delta)}{\delta} \prod_{p|\delta} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1} \prod_{p'|P(z)} \left(1 - \frac{\omega(p')}{p'}\right) \\
&= V(z) \sum_{\delta|P(z)} \sigma_k(\delta)g(\delta) = V(z)\left\{1 + \sum_{1<\delta|P(z)} \sigma_k(\delta)g(\delta)\right\}
\end{aligned}$$

が成り立つので, 命題が従う. □

上の命題により，$\displaystyle\sum_{d|P(z)}\mu(d)\chi_k(d)\frac{\omega(d)}{d}$ の最小化, 最大化の問題は, $\displaystyle\sum_{1<\delta|P(z)}\sigma_k(\delta)g(\delta)$ の最小化, 最大化の問題へと移行させせることができた.

そこで Brun は次のような篩を構成した. $\tau(d)$ で $d$ の素因数の個数を表すとする.

$$\chi^{(r)}(d)=\begin{cases}1 & \tau(d)\leq r-1\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases} \tag{3.33}$$

と定める.

**定義 3.34 (Brun の純正篩).** ある自然数 $s$ に対して,

$$\chi_1=\chi^{(2s+2)},\ \chi_2=\chi^{(2s+1)} \tag{3.35}$$

と定める. このような $\chi_1,\ \chi_2$ から構成された篩を Brun の純正篩という.

$s$ の定め方は後述する. 上のように定義された $\chi_1,\ \chi_2$ が組み合わせ論的篩を構成することは, 命題 3.25 を確認すればよい.

また, 以下の命題が成り立つ.

**命題 3.36.** 自然数 $d$ に対して, $\tau(d)$ をその素因数の数とおく. このとき, 任意の自然数 $n$, 非負整数 $s$ に対して,

$$\sum_{\substack{d|n\\ \tau(d)\leq 2s+1}}\mu(d)\leq\sum_{d|n}\mu(d)\leq\sum_{\substack{d|n\\ \tau(d)\leq 2s}}\mu(d) \tag{3.37}$$

が成り立つ.

**証明.** $n=1$ のときは, 比べている 3 つの量はすべて 1 となり等しいので, $n>1$ と仮定する. $\tau(n)=\tau\ (>1)$ と置くと, 任意の自然数 $m$ に対して,

$$\sum_{\substack{d|n\\ \tau(d)=m}}\mu(d)=(-1)^m\binom{\tau}{m}$$

である ($k<l$ のとき, $\binom{k}{l}=0$ とする).

$$\sigma^{(k)}(n)=\sum_{\substack{d|n\\ \tau(d)\leq k-1}}\mu(d)=\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\binom{\tau}{m} \tag{3.38}$$

とおく. $n>1$ のとき,

$$\sum_{d|n}\mu(d)=0$$

であり, 常に $\binom{k}{l}\geq 0$ なので, (3.37) を示すには,

$$\sigma^{(k)}(n)=(-1)^{k-1}\binom{\tau-1}{k-1} \tag{3.39}$$

が示されれば十分である.

$k$ に関する帰納法でそれを示す. $k=1$ のときは明らかなので, $k$ に対して (3.39) が成り立つと仮定する. すると,

$$\binom{\tau}{k} - \binom{\tau-1}{k-1} = \binom{\tau-1}{k}$$

なので,

$$\sigma^{(k+1)}(n) = (-1)^k \binom{\tau}{k} + \sigma^{(k)}(n) = (-1)^k \binom{\tau-1}{k}$$

が成立する. つまり, $k+1$ に対しても (3.39) が成立する. □

**注 3.40.** (3.38) を見れば, $\chi^{(r)}$ と $\sigma^{(r)}$ は (3.3) によって対応することが分かる.

いま (3.39) より, 任意の $d>1$ に対して,

$$\sigma_2(d) \leq 0 \leq \sigma_1(d) \tag{3.41}$$

が成立し, $g(d)>0$ なので命題 3.31 より, $k=1,2$ が順に $+,-$ に対応するとすると,

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_k(d)\frac{\omega(d)}{d} = V(z)\left\{1 \pm \sum_{1<\delta|P(z)} |\sigma_k(\delta)g(\delta)|\right\} \tag{3.42}$$

である.

よって, $\displaystyle\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_k(d)\frac{\omega(d)}{d}$ の上から, 下からの評価をするには, 共に $\displaystyle\sum_{1<\delta|P(z)} |\sigma_k(\delta)g(\delta)|$ を上から評価すればよいことが分かる.

いま (3.39) より, $n>1$ に対して,

$$\sigma^{(r)}(n) = (-1)^{k-1}\binom{\tau(n)-1}{r-1} \leq \binom{\tau(n)}{r} \tag{3.43}$$

が成り立つので, 二項係数の性質と $g(d)$ が乗法的であることから,

$$\begin{aligned}
\sum_{1<d|P(z)} |\sigma^{(r)}(d)g(d)| &\leq \sum_{1<d|P(z)} \binom{\tau(d)}{r} g(d) \\
&= \sum_{m=r}^{\tau(P(z))} \binom{m}{r} \sum_{\substack{1<d|P(z) \\ \tau(d)=m}} g(d) \leq \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m}{r} \frac{1}{m!}\left(\sum_{p<z} g(p)\right)^m \\
&= \frac{1}{r!}\left(\sum_{p<z} g(p)\right)^r \exp\left(\sum_{p<z} g(p)\right) 
\end{aligned} \tag{3.44}$$

が成り立つ.

ここで, 篩にさらなる仮定を課す.

**仮定 3.45.** ある定数 $A_0>0$ が存在して, 任意の $p \in \mathscr{P}$ に対して,

$$\omega(p) \leq A_0$$

を満たす.

**仮定 3.46.** 平方因子を持たず, 素因数が全て $\mathscr{P}$ に入るような任意の $d$ に対して,

$$|r(\mathscr{A},d)| \le \omega(d)$$

を満たす.

**注 3.47.** 篩に多くの仮定を課しているようだが, $\omega(d)$ はそもそも $|r(\mathscr{A},d)|$ が小さくなるように定めるものであり, それゆえ多くの例でこの仮定は満たされるので, 応用上は特に問題がない.

いま, 仮定 3.46 と $\omega(d)$ が乗法的であることから,

$$\sum_{d|P(z)} \chi^{(r)}(d)|r(\mathscr{A},d)| \le \sum_{\substack{d|P(z)\\ \tau(d)\le r-1}} \omega(d) \le \left(1+\sum_{p<z}\omega(p)\right)^{r-1} \tag{3.48}$$

である.

よって, (3.24), 命題 3.31, (3.44), (3.48) より, 次の定理が従う.

**定理 3.49.** 仮定 3.26,3.46 が成り立つとする. このとき, 任意の自然数 $r$ とある絶対値が 1 以下の定数 $\theta=\theta(r)$, $\theta'=\theta'(r)$ に対して,

$$S(\mathscr{A},\mathscr{P},z) = XV(z)\left\{1+\theta\frac{1}{r!}\left(\sum_{p<z}g(p)\right)^{r}\exp\left(\sum_{p<z}g(p)\right)\right\} + \theta'\left(1+\sum_{p<z}\omega(p)\right)^{r-1} \tag{3.50}$$

が成り立つ.

以下, 仮定 3.45 を踏まえてさらなる評価をする. 具体的には, $r$ を上手く定めることで,

$$\frac{1}{r!}\left(\sum_{p<z}g(p)\right)^{r}\exp\left(\sum_{p<z}g(p)\right),\ \left(1+\sum_{p<z}\omega(p)\right)^{r-1}$$

の二つを上から評価することを目指す.

まず仮定 3.26,3.45 より,

$$g(p) = \frac{\omega(p)}{p}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1} \le A_1\frac{\omega(p)}{p} \le \frac{A_0A_1}{p} \tag{3.51}$$

が成り立つ. ここで, [15, p.65, (2.4), (2.10)] より, 十分大きな $z$ に対して,

$$\sum_{p<z}\frac{1}{p} \le \log\log z + 1 \tag{3.52}$$

が成立するので, (3.51) より,

$$\sum_{p<z} g(p) \le A_0A_1(\log\log z+1) \tag{3.53}$$

が成り立つ.

よって, $0<\lambda e^{1+\lambda}\le 1$ を満たす定数 $\lambda$ に対して,

$$r = \left[\frac{A_0A_1}{\lambda}(\log\log z+1)\right]+1 \tag{3.54}$$

と定めると,

$$\sum_{p<z} g(p) \le \lambda r \tag{3.55}$$

である．また, $r \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\frac{1}{r!} \leq \left(\frac{e}{r}\right)^r$$

であるから,

$$\frac{1}{r!}\left(\sum_{p<z} g(p)\right)^r \exp\left(\sum_{p<z} g(p)\right) \leq \left(\frac{e}{r}\right)^r (\lambda r)^r e^{\lambda r} = (\lambda e^{1+\lambda})^r \tag{3.56}$$

が成り立つ.

また, 仮定 3.45 と素数定理より, 十分大きな $z$ に対して,

$$\left(1 + \sum_{p<z} \omega(p)\right)^{r-1} \leq z^{r-1} \leq (1 + A_0\pi(z))^{r-1} \leq z^{r-1} \leq z^{\frac{A_0A_1}{\lambda}(\log\log z+1)} \tag{3.57}$$

が成り立つ.

よって, 定理 3.49, (3.56), (3.57) より, 以下の定理が従う.

**定理 3.58.** 仮定 3.26,3.45,3.46 が満たされているとする．このとき, $0 < \lambda e^{1+\lambda} \leq 1$ を満たす定数 $\lambda$ と, ある絶対値が 1 以下の数 $\theta = \theta(z, \lambda, A_0, A_1)$, $\theta' = \theta'(z, \lambda, A_0, A_1)$ に対して,

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = XV(z)\left\{1 + \theta(\lambda e^{1+\lambda})^{\frac{A_0A_1}{\lambda}(\log\log z+1)}\right\} + \theta' z^{\frac{A_0A_1}{\lambda}(\log\log z+1)} \tag{3.59}$$

が成り立つ.

また, $\log z \leq \sqrt{\log X}$ とし,

$$\lambda = \frac{2A_0A_1 \log z(\log\log z + 1)}{\log X} \tag{3.60}$$

ととることで, 十分大きな $X$ に対して $\lambda$ は $0 < \lambda e^{1+\lambda} \leq 1$ を満たすので, 定理 3.58 の系として直ちに次の定理が示される.

**定理 3.61.** 仮定 3.26,3.45,3.46 が満たされているとする． このとき, ある絶対値が 1 以下の数 $\theta = \theta(z, X, A_0, A_1)$, $\theta' = \theta'(z, X, A_0, A_1)$ に対して,

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = XV(z)\left\{1 + \theta e^{-\sqrt{\log X}}\right\} + \theta'\sqrt{X} \tag{3.62}$$

が成り立つ.

**注 3.63.** 定理 3.58 や定理 3.61 の主張において, $z$ や $X$ を十分大きくとるという条件を除いているのは, $z$ や $X$ が有界であるときは Eratosthenes の篩による考察 ([7, p.31, THEOREM 1.1]) から直ちに主張が従うためである.

以上が Brun の純正篩の構成と結果である．定理の主張の形を見れば, Eratosthenes の篩と比べてその誤差項が大きく改善されていることが分かるだろう．またその応用は, [7, Chapter 2] で詳しくみられる.

# 第4章　Rosserの1次元篩

この章では, 定理 1.1 の証明に現れる Rosser の 1 次元篩について解説する. 3.1 節で主定理の紹介, 3.2 節で証明に入りつつ Rosser の篩の説明, 3.3 節で証明に必要な補題の紹介, 3.4 節で証明の後半を行う.

なお, この章を通して篩において考える $\mathscr{P}$ を素数全体の集合としてとる. また, 篩には仮定 $\Omega(1,K)$ (定義 2.7) と,

$$0<\omega(p)<p \tag{4.1}$$

を仮定する. また特に後者によって, $V(z)\le 1$ が従う.

## 4.1　本章の主定理

この章の主定理を述べる.

**定理 4.2** (定理 1.33 の再掲)**.** $\omega(d)$ が $\Omega(1,K)$ を満たすとする. $\mu_d^{\pm}$ を位数 $D$ の Rosser の重みとし,

$$S^{\pm}=\sum_{d|P(z)}\mu_d^{\pm}\frac{\omega(d)}{d} \tag{4.3}$$

とおく. $s=\log D/\log z$, $F(s),f(s)$ を定義 1.18 の篩関数とすると,

$$S^{+}\le V(z)\{F(s)+O\big(e^{\sqrt{K}-s}(\log D)^{-1/3}\big)\}\quad (z\le D) \tag{4.4}$$

$$S^{-}\ge V(z)\{f(s)+O\big(e^{\sqrt{K}-s}(\log D)^{-1/3}\big)\}\quad (z\le D^{1/2}) \tag{4.5}$$

が成立する.

この章では, Iwaniec の論文 [11] を参考に以下の定理を証明する中で, 定理 4.2 の証明を行う.

**定理 4.6.** $\omega(d)$ が $\Omega(1,K)$ を満たすとすると, 全ての $2\le z\le D$ に対して, $s=\log D/\log z$ とおくと,

$$S(\mathscr{A},\mathscr{P},z)<XV(z)\left\{F(s)+e^{\sqrt{K}}Q(s)(\log D)^{-1/3}\right\}+\sum_{\substack{d<D\\ d|P(z)}}|R(\mathscr{A},z)|, \tag{4.7}$$

$$S(\mathscr{A},\mathscr{P},z)>XV(z)\left\{f(s)+e^{\sqrt{K}}Q(s)(\log D)^{-1/3}\right\}-\sum_{\substack{d<D\\ d|P(z)}}|R(\mathscr{A},z)|, \tag{4.8}$$

が成立する. ここで $Q(s)$ は,

$$|Q(s)|<\exp\{-s\log s+s\log\log 3s+O(s)\} \tag{4.9}$$

を満たす．さらに，$s^{50} < \log z$ という条件を加えると，

$$|Q(s)| < \exp\left\{-s\log s - s\log\log 3s + s + O\left(s\frac{\log\log(3s)}{\log s}\right)\right\} \tag{4.10}$$

とできる．

節の最後に証明で使用する次の命題を記す．

**命題 4.11.** $B(x)$ を $w \le x \le z$ において単調増加かつ正の値をとる連続関数とする．$\omega(d)$ が $\Omega(1, K)$ を満たすとすると，

$$\sum_{w\le p<z} \frac{\omega(p)}{p}\frac{V(p)}{V(z)}\frac{\log p}{\log z}B(p) \le \int_w^z \frac{B(x)}{x\log x}dx + B(z)\left(\frac{2K}{\log w} + \frac{K^2}{\log^2 w}\right) \tag{4.12}$$

が成立する．

この命題の証明には以下の補題を用いる．

**補題 4.13.** $\{c_n\}$ を任意の実数列とし，$x, y \in \mathbb{R}$ に対して，

$$C(x, y) = \sum_{x\le n<y} c_n$$

と定める．このとき，

(1) $2 \le w < z$，$[w, z]$ 上で $C^1$ 級の関数 $f$ に対して，

$$\sum_{w\le n<z} c_n f(n) = -\int_w^z f(t)dC(t, z) \tag{4.14}$$

が成り立つ．

(2) さらに，$f$ が $[w, z]$ 上で単調増加かつ正の値を取るとする．$\mathbb{R}$ 上 $C^1$ 級の関数 $g$ と，関数 $e(x, y)$ を用いて，

$$C(x, y) = g(y) - g(x) + e(x, y)$$

と書くと，

$$\sum_{w\le n<z} c_n f(n) \le \int_w^z f(t)dg(t) + f(z)\max_{w\le x,y\le z}\{e(x, y)\} \tag{4.15}$$

が成り立つ．

**証明.** (1) $C(z, z) = 0$ より，部分積分を用いると，

$$-\int_w^z f(t)dC(t, z) = C(w, z)f(w) + \int_w^z \sum_{t\le n<z} c_n f'(t)dt \tag{4.16}$$

である．

ここで，$[w, z)$ に含まれる自然数全体を小さい順に $n_1, n_2, \ldots, n_r$ とすると，

$$\begin{aligned}
\int_w^z \sum_{t\le n<z} c_n f'(t)dt &= \left(\int_w^{n_1} + \int_{n_1}^{n_2} + \cdots + \int_{n_{r-1}}^{n_r} + \int_{n_r}^z\right)\sum_{t\le n<z} c_n f'(t)dt \\
&= \sum_{w\le n<z} c_n\left(f(n_1) - f(w)\right) + \sum_{n_1<n<z} c_n\left(f(n_2) - f(n_1)\right) + \cdots \\
&\quad \cdots + \sum_{n_{r-1}<n<z} c_n\left(f(n_r) - f(n_{r-1})\right) \\
&= -C(w, z)f(w) + \sum_{w\le n<z} c_n f(n)
\end{aligned}$$

が成り立つので, (4.16) より, (4.14) が従う.

また, $[w,z)$ に自然数が含まれないとすると, (4.14) の両辺は 0 であるから自明に成り立つ.

(2) $e(z,z)=0$ より, (1) と部分積分を用いて,

$$\begin{aligned}
\sum_{w\le n<z} c_n f(n) &= -\int_w^z f(t)d(-g(t)) - \int_w^z f(t)de(t,z)\\
&= \int_w^z f(t)dg(t) + e(w,z)f(w) + \int_w^z e(t,z)f'(t)dt\\
&\le \int_w^z f(t)dg(t) + \max_{w\le x,y\le z}\{e(x,y)\}\left(f(w)+f(z)-f(w)\right)
\end{aligned}$$

が成り立つので, (2) が従う. □

この補題では $f$ を $C_1$ 級としているが, $f$ が連続関数であれば, $C^1$ 級の関数で近似して同様の議論をすることで, 同様の主張が成り立つ.

**命題 4.11 の証明.** $2\le w<z$ に対して,

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{\omega(n)}{n}\dfrac{V(n)}{V(z)}\dfrac{\log n}{\log z} & n \text{ が素数},\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

とおく. いま,

$$C(w,z) = \sum_{x\le n<y} c_n$$

は, 仮定 $\Omega(1,K)$ と命題 2.9 より,

$$\begin{aligned}
C(w,z) &= \sum_{w\le p<z}\frac{\omega(p)}{p}\left(1+\frac{K}{\log p}\right)\\
&\le \log\frac{\log z}{\log w} + \log\left(1+\frac{K}{\log w}\right) + \frac{K}{\log w} + \frac{K}{\log w}\log\left(1+\frac{K}{\log w}\right)\\
&\le \log\log z - \log\log w + \frac{2K}{\log w} + \frac{K^2}{\log^2 w} \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

を満たす.

よって, $w\le x,y\le z$ において, 関数 $e(x,y)$ を用いて,

$$C(x,y) = \log\log y - \log\log x + e(x,y) \qquad (4.18)$$

と書いたとき,

$$\max_{w\le x,y\le z}\{e(x,y)\} \le \frac{2K}{\log w} + \frac{K^2}{\log^2 w}$$

を満たす.

よって, $f(x)=B(x)$ として補題 4.13 の (2) を用いると,

$$\begin{aligned}
\sum_{w\le p<z}\frac{\omega(p)}{p}\frac{V(p)}{V(z)}\frac{\log p}{\log z}B(p) &\le \int_w^z B(x)d(\log\log x) + B(z)\max_{w\le x,y\le z}\{e(x,y)\}\\
&\le \int_w^z \frac{B(x)}{x\log x}dx + B(z)\left(\frac{2K}{\log w}+\frac{K^2}{\log^2 w}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つため, 命題を得る. □

**注 4.19.** この章の参考にした元論文 [11] では, 命題 4.11 にあたる補題 (Lemma 21) の主張は,

$$\sum_{w\le p<z}\frac{\omega(p)}{p}\frac{V(p)}{V(z)}\frac{\log p}{\log z}B(p)\le\int_w^z\frac{B(x)}{x\log x}dx+B(z)\frac{2K}{\log w}$$

と, 命題 4.11 よりも強いものであるが, 本論文ではその成立が確認できなかったので (4.12) の形で示した. なお, 適用後の最終的な誤差項における $K$ のオーダーは $e^{\sqrt{K}}$ であるため, 特に問題はないと判断した.

## 4.2 定理 4.6 の証明 前半

まず, 次の不等式を示す.

**補題 4.20.**

$$R^{\pm}=\sum_{d|P(z)}|\mu_d^{\pm}||r(\mathscr{A},d)| \tag{4.21}$$

とおく. このとき, 次の二つの不等式が成立する.

$$S(\mathscr{A},\mathscr{P},z)\le XS^{+}+R^{+} \tag{4.22}$$

$$S(\mathscr{A},\mathscr{P},z)\ge XS^{-}-R^{-} \tag{4.23}$$

**証明.** この二つの不等式は本質的に (3.24) である. つまり, $\mu_d^+=\chi_1(d)\mu(d)$, $\mu_d^-=\chi_2(d)\mu(d)$ とみなし, $\chi_1(d)$, $\chi_2(d)$ が組み合わせ論的篩を構成することを示せばよいが, これはそれぞれが命題 3.25 の各条件 (1)-(4) を満たすことを確認すれば十分である.

定義 1.17 から, $\chi_1(1)=\chi_2(1)=1$, また平方因子を持たない任意の自然数 $d=p_1\cdots p_r$, $p_1>\cdots>p_r$ に対して,

$$\chi_1(d)=\begin{cases}1 & 0\le{}^{\forall}l\le(r-1)/2 \text{ に対して } p_1p_2\cdots p_{2l}p_{2l+1}^3<D\\ 0 & \text{それ以外},\end{cases}$$

$$\chi_2(d)=\begin{cases}1 & 0\le{}^{\forall}l\le r/2 \text{ に対して } p_1p_2\cdots p_{2l-1}p_{2l}^3<D\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

である.

同じ議論であるため, $\chi_1(d)$ についてのみ示す. (1), (2) は自明に成り立つ.

(3) について. $t|d$, $d|P(z)$ であって, $\chi_1(d)=1$ とする. $t$ と $d$ の素因数分解を $t=p_1p_2\dots p_r$, $d=p_1'p_2'\dots p_{r'}'$ $(p_1>p_2>\cdots>p_r,\ p_1'>p_2'>\cdots>p_{r'}')$ とおくと, $t|d$ で $p_i,p_i'$ が単調減少であることから, $r\le r'$ であり,

$$p_i\le p_i'\quad(1\le^{\forall}l\le r) \tag{4.24}$$

が成り立つ. よって $\chi_1(d)=1$ より, $0\le^{\forall}l<(r-1)/2$ に対して,

$$p_1p_2\dots p_{2l}p_{2l+1}^3\le p_1'p_2'\dots p_{2l}'{p'}_{2l+1}^3<D$$

が成り立つので, $\chi_1(t)=1$ である. よって (3) を満たす.

(4) について. $t$ の素因数が奇数個で, かつ $p<q(t)$ ならば, 素因数の大きいほうから奇数番目までに関わる $\chi_1(pt)$ の条件に $p$ は現れないので, $\chi_1(t)=\chi_1(pt)$ である. よって, (4) を満たす. □

また位数 $D$ の Rosser の重みの定義から, 任意の平方因子を持たない自然数 $d$ について $|\mu_d^\pm| \leq 1$ であり, $d \geq D$ に対して $\mu_d^\pm = 0$ であるから,

$$R^\pm \leq \sum_{\substack{d<D \\ d|P(z)}} |r(\mathscr{A}, d)| \tag{4.25}$$

が成立する. よって定理 4.6 と補題 4.20 を比べれば, 定理 4.6 の誤差項の部分は定理の主張を満たすので, 次は $S^\pm$ の評価である. それには次の補題を用いる.

**補題 4.26.** 次の恒等式が成り立つ.

$$S^+ = V(z) + \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_{2r+1}<p_{2r}<\cdots<p_1<z \\ p_1p_2\cdots p_{2l}p_{2l+1}^3<D\ (0\leq^\forall l<r) \\ p_1p_2\cdots p_{2r}p_{2r+1}^3\geq D}} \frac{\omega(p_1p_2\ldots p_{2r+1})}{p_1p_2\ldots p_{2r+1}} V(p_{2r+1}) \tag{4.27}$$

$$S^- = V(z) - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\substack{p_{2r}<p_{2r-1}<\cdots<p_1<z \\ p_1p_2\cdots p_{2l-1}p_{2l}^3<D\ (0\leq^\forall l<r) \\ p_1p_2\cdots p_{2r-1}p_{2r}^3\geq D}} \frac{\omega(p_1p_2\ldots p_{2r})}{p_1p_2\ldots p_{2r}} V(p_{2r}) \tag{4.28}$$

**証明.** 同様の議論となるため, $S^+$ についてのみ証明する.
(4.27) の右辺の無限和の中身について,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{p_{2r+1}<p_{2r}<\cdots<p_1<z \\ p_1p_2\cdots p_{2l}p_{2l+1}^3<D\ (0\leq^\forall l<r) \\ p_1p_2\cdots p_{2r}p_{2r+1}^3\geq D}} \frac{\omega(p_1p_2\ldots p_{2r+1})}{p_1p_2\ldots p_{2r+1}} V(p_{2r+1}) \\
&= \sum_{\substack{p_{2r+1}<p_{2r}<\cdots<p_1<z \\ p_1p_2\cdots p_{2l}p_{2l+1}^3<D\ (0\leq^\forall l<r) \\ p_1p_2\cdots p_{2r}p_{2r+1}^3\geq D}} \frac{\omega(p_1p_2\ldots p_{2r+1})}{p_1p_2\ldots p_{2r+1}} \sum_{d|P(p_{2r+1})} \mu(d)\frac{\omega(d)}{d} \\
&= -\sum_{\substack{p_{2r+1}<p_{2r}<\cdots<p_1<z,\ d|P(p_{2r+1}) \\ p_1p_2\cdots p_{2l}p_{2l+1}^3<D\ (0\leq^\forall l<r) \\ p_1p_2\cdots p_{2r}p_{2r+1}^3\geq D}} \mu(p_1p_2\ \ldots p_{2r+1}d)\frac{\omega(p_1p_2\ldots p_{2r+1}d)}{p_1p_2\ldots p_{2r+1}d} \\
&= -\sum_{\substack{d'=p_1p_2\cdots p_R,\ R\geq 2r+1 \\ p_R<p_{R-1}<\cdots<p_1<z \\ p_1p_2\cdots p_{2l}p_{2l+1}^3<D\ (0\leq^\forall l<r) \\ p_1p_2\cdots p_{2r}p_{2r+1}^3\geq D}} \mu(d')\frac{\omega(d')}{d'}
\end{aligned}$$

である. これは $d'|P(z)$, $d' = p_1p_2\ldots p_R$ $(p_1 > \ldots p_R)$, $R \geq 2r+1$ であって, $p_1^3$, $p_1p_2p_3^3$, $\ldots, p_1p_2\cdots p_{2l}p_{2l}^3$ と順に値を調べていったときに, $l = r$ で初めてその値が $D$ 以上になるようなもの全てについての

和である. よって, (4.27) の右辺を変形すると,

$$\begin{aligned}
&V(z)+\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{\substack{p_{2r+1}<p_{2r}<\cdots<p_1<z\\ p_1p_2\ldots p_{2l}p_{2l+1}^3<D\ (0\le^\forall l<r)\\ p_1p_2\ldots p_{2r}p_{2r+1}^3\ge D}}\frac{\omega(p_1p_2\ldots p_{2r+1})}{p_1p_2\ldots p_{2r+1}}V(p_{2r+1})\\
&=\sum_{d|P(z)}\mu(d)\frac{\omega(d)}{d}-\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{\substack{d=p_1p_2\ldots p_R,\ R\ge 2r+1\\ p_R<p_{R-1}<\cdots<p_1<z\\ p_1p_2\ldots p_{2l}p_{2l+1}^3<D\ (0\le^\forall l<r)\\ p_1p_2\ldots p_{2r}p_{2r+1}^3\ge D}}\mu(d)\frac{\omega(d)}{d}\\
&=\sum_{\substack{d=p_1p_2\ldots p_R\\ p_R<p_{R-1}<\cdots<p_1<z\\ p_1p_2\ldots p_{2l}p_{2l+1}^3<D\ (0\le^\forall l<(R-1)/2)}}\mu(d)\frac{\omega(d)}{d}\\
&=\sum_{d|P(z)}\chi_1(d)\mu(d)\frac{\omega(d)}{d}\\
&=\sum_{d|P(z)}\mu_d^+\frac{\omega(d)}{d}=S^+
\end{aligned}$$

となり, 目的の等式を得る. □

この補題から, 次の目標は (4.27), (4.28) の無限和の部分を共に上から評価することである. そこで次の関数を用意する.

**定義 4.29.** $s=\log D/\log z$ とおき,

$$S_{r,z}^+(s)=\sum_{\substack{p_{2r+1}<p_{2r}<\cdots<p_1<z\\ p_1p_2\ldots p_{2l}p_{2l+1}^3<D\ (0\le^\forall l<r)\\ p_1p_2\ldots p_{2r}p_{2r+1}^3\ge D}}\frac{\omega(p_1p_2\ldots p_{2r+1})}{p_1p_2\ldots p_{2r+1}}V(p_{2r+1}), \tag{4.30}$$

$$S_{r,z}^-(s)=\sum_{\substack{p_{2r}<p_{2r-1}<\cdots<p_1<z\\ p_1p_2\ldots p_{2l-1}p_{2l}^3<D\ (0\le^\forall l<r)\\ p_1p_2\ldots p_{2r-1}p_{2r}^3\ge D}}\frac{\omega(p_1p_2\ldots p_{2r})}{p_1p_2\ldots p_{2r}}V(p_{2r}) \tag{4.31}$$

と定義する. また,

$$T_{R,z}^+(s)=\sum_{r=0}^{R}S_{r,z}^+(s)\quad (s>1), \tag{4.32}$$

$$T_{R,z}^-(s)=\sum_{r=1}^{R}S_{r,z}^-(s)\quad (s\ge 2) \tag{4.33}$$

と定義する.

定義から, 次の補題が成り立つ.

**補題 4.34.**

(1) $s\ge 2r+\dfrac{5\pm 1}{2}$ に対して, $S_{r,z}^{\pm}(s)=0$ .

(2) $1 < s \le 3$ に対して,

$$T^{+}_{0,z}(s) = S^{+}_{0,z}(s) = \sum_{D^{1/3} \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} V(p) = V(D^{1/3}) - V(z)\ .$$

(3) $2 \le s,\ 1 \le R$ に対して,

$$T^{-}_{R,z}(s) = \sum_{D^{1/(2+2R)} \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} T^{+}_{R-1,p}\left(\frac{\log(D/p)}{\log p}\right)\ .$$

(4) $3 \le s,\ 1 \le R$ に対して,

$$T^{+}_{R,z}(s) = \sum_{D^{1/(3+2R)} \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} T^{-}_{R,p}\left(\frac{\log(D/p)}{\log p}\right)\ .$$

**証明.** (1) 同様の議論であるため, $S^{+}_{r,z}(s)$ についてのみ示す. $s \ge 2r+3$ であるとき, $D \ge z^{2r+3}$ であるため, 任意の $p_1 < p_2 < \cdots < p_{2r+1} < z$ に対して,

$$p_1 p_2 \cdots p_{2r} p_{2r+1}^3 < z^{2r+3} \le D$$

が成立するので, $S^{+}_{r,z}(s) = 0$ である.
(2) $1 < s \le 3$ より, $z < D \le z^3$ である. 特に, $D^{1/3} \le z$ である.
 定義から,

$$T^{+}_{0,z}(s) = S^{+}_{0,z}(s) = \sum_{\substack{p_1 < z \\ p_1^3 \ge D}} \frac{\omega(p_1)}{p_1} V(p_1) = \sum_{D^{1/3} \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} V(p)$$

が成り立つ. また, $V(p)$ の定義から,

$$\sum_{D^{1/3} \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} V(p) = \sum_{D^{1/3} \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} \sum_{d | P(p)} \mu(d) \frac{\omega(d)}{d} = \sum_{\substack{D^{1/3} \le p < z \\ d | P(p)}} -\mu(dp) \frac{\omega(dp)}{dp}$$

が成り立つが, 最後の和は, 自然数 $d'$ であってその最大の素因数が $[D^{1/3}, z)$ に入るようなもの全てについての $\mu(d')\omega(d')/d'$ の和であるから,

$$\sum_{\substack{D^{1/3} \le p < z \\ d | P(p)}} \mu(dp) \frac{\omega(dp)}{dp} = \sum_{d | P(z)} \mu(d) \frac{\omega(d)}{d} - \sum_{d | P(D^{1/3})} \mu(d) \frac{\omega(d)}{d} = V(z) - V(D^{1/3})$$

である. 以上より, (2) が従う.
(3) 定義から,

$$\begin{aligned}
&\sum_{D^{1/(2+2R)} \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} T^{+}_{R-1,p}\left(\frac{\log(D/p)}{\log p}\right) \\
&= \sum_{D^{1/(2+2R)} \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{\substack{p_{2r+1} < p_{2r} < \cdots < p_1 < p \\ p_1 p_2 \dots p_{2l} p_{2l+1}^3 < D/p\ (0 \le {}^\forall l < r) \\ p_1 p_2 \dots p_{2r} p_{2r+1}^3 \ge D/p}} \frac{\omega(p_1 p_2 \dots p_{2r+1})}{p_1 p_2 \dots p_{2r+1}} V(p_{2r+1}) \\
&= \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{\substack{p_{2r+1} < p_{2r} < \cdots < p_1 < p < z \\ p p_1 p_2 \dots p_{2l} p_{2l+1}^3 < D\ (0 \le {}^\forall l < r) \\ p p_1 p_2 \dots p_{2r} p_{2r+1}^3 \ge D}} \frac{\omega(p p_1 p_2 \dots p_{2r+1})}{p p_1 p_2 \dots p_{2r+1}} V(p_{2r+1}) \\
&= T^{-}_{R,z}(s)
\end{aligned}$$

である．なお途中の式変形で，$D^{1/(2+2R)} \le p$ の条件が消えているが，これは $r = R-1$ のときの条件から導かれる，

$$D \le pp_1p_2\cdots p_{2R-2}p_{2R-1}^3 < p^{2R+2}$$

より従う．

(4) (3) と同様の議論から従うため割愛する． □

## 4.3 微分差分方程式に関わる結果

この節では，定理 4.6 の証明に必要な，微分差分方程式に関わる結果を引用してまとめる．まずはいくつかの関数を定義する．

**定義 4.35.** $S_i^{\pm}(s)$ を次のように帰納的に定義する．

$$S_0^+(s) = \begin{cases} 3-s & (1 < s \le 3) \\ 0 & (3 < s) \end{cases} \tag{4.36}$$

$$S_R^-(s) = \int_s^\infty (t-1)^{-1} S_{R-1}^+(t-1)dt \qquad (s \ge 2,\ R \ge 1) \tag{4.37}$$

$$S_R^+(s) = \int_s^\infty (t-1)^{-1} S_R^-(t-1)dt \qquad (s \ge 3,\ R \ge 1) \tag{4.38}$$

$$S_R^+(s) = 0 \qquad (1 < s \le 3,\ R \ge 1) \tag{4.39}$$

また，その総和として $T_R^{\pm}(s)$ を定義する．

$$T_R^+(s) = \sum_{r=0}^{R} S_r^+(s) \qquad (s > 1) \tag{4.40}$$

$$T_R^+(s) = \sum_{r=1}^{R} S_r^-(s) \qquad (s \ge 2) \tag{4.41}$$

$T_R^{\pm}(s)$ は連続関数であり，区間 $[(5\mp1)/2,\ 2R+(5\pm1)/2]$ の外では 0 であることから，積分区間の極限と和の交換ができ，次の等式が成り立つ．

$$T_R^+(s) = 3-s \qquad (1 < s \le 3) \tag{4.42}$$

$$T_R^+(s) = \int_s^\infty (t-1)^{-1} T_{R-1}^+(t-1)dt \qquad (s \ge 3) \tag{4.43}$$

$$T_R^-(s) = \int_s^\infty (t-1)^{-1} T_{R-1}^+(t-1)dt \qquad (s \ge 2) \tag{4.44}$$

**定義 4.45.** $Q^{\pm}(s)$ $(s > 0)$ を，次の連立微分差分方程式によってただ一通りに定まる連続関数とする．

$$\begin{cases} s^2Q^+(s) = \frac{1}{2} & (0 < s \le 3) \\ s^2Q^-(s) = 0 & (0 < s \le 2) \end{cases} \tag{4.46}$$

$$\begin{cases} \left(s^2Q^+(s)\right)' = -sQ^-(s-1) & (s > 3) \\ \left(s^2Q^-(s)\right)' = -sQ^+(s-1) & (s > 2) \end{cases} \tag{4.47}$$

この $Q^{\pm}(s)$ は定理 4.6 の誤差項 $Q(s)$ の主要項となるものである. $Q^{\pm}(s)$ に関して, 次の補題が成り立つ.

**補題 4.48** ([11, p.189, Lemma 13]). 以下の関係式が成立する.

$$Q^{\pm}(s) \geq 0 \quad (s > 0) \tag{4.49}$$

$$Q^{+}(s) \asymp Q^{-}(s) \tag{4.50}$$

$$Q^{+}(s) s \log s \ll Q^{+}(s-1) \ll s^2 Q^{+}(s) \tag{4.51}$$

$$Q^{+}(s) = \exp\left\{-s\log s - s\log\log s + s + O\left(s\frac{\log\log 2s}{\log s}\right)\right\} \tag{4.52}$$

ここで,

$$q^{\pm}(s) = s^2 Q^{\pm}(s) \tag{4.53}$$

と定めると, 以下の補題が成り立つ.

**補題 4.54** ([11, p.194, Lemma 17]). ある $R$ によらない正の数 $c > 0$ が存在し, $s > (5 \mp 1)/2$ に対して,

$$T_R^{\pm}(s) < c q^{\pm}(s) \tag{4.55}$$

が成り立つ.

この補題から, $s > (5 \mp 1)/2$ において $T_R^{\pm}(s)$ は一様収束することが分かるので,

$$T^{\pm}(s) = \lim_{R\to\infty} T_R^{\pm}(s) \quad (s > (5 \mp 1)/2) \tag{4.56}$$

とおく. この $T^{\pm}(s)$ に関して, 次の補題が成り立つ.

**補題 4.57** ([11, p.197, Lemma 20]). $T^{\pm}(s)$ は以下の関係式を満たす.

$$0 < T^{\pm}(s) \ll q^{\pm}(s) \tag{4.58}$$

$$T^{\pm}(s) \pm s = \text{constant} \qquad (s \leq (5 \pm 1)/2) \tag{4.59}$$

$$T^{\pm}(s) = \int_s^{\infty} (t-1)^{-1} T^{\mp}(t-1)\,dt \qquad (s \geq (5 \pm 1)/2) \tag{4.60}$$

このことから, ある定数 $A$ に対して,

$$\begin{cases} F(s) = A\left(1 + s^{-1}T^{+}(s)\right) & s > 3 \\ f(s) = A\left(1 - s^{-1}T^{-}(s)\right) & s > 2 \end{cases} \tag{4.61}$$

とおけば, $F(s), f(s)$ は微分差分方程式 (1.20) を満たす. 実際, 各定義域上で,

$$\begin{aligned}(sF(s))' &= A(s + T^{+}(s))' \\ &= A\left(1 - (s-1)^{-1}T^{-}(s-1)\right) \\ &= f(s-1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(sf(s))' &= A(s + T^{-}(s))' \\ &= A\left(1 + (s-1)^{-1}T^{+}(s-1)\right) \\ &= F(s-1)\end{aligned}$$

である. つまり, 初期条件さえそろえれば $T^{\pm}(s)$ を使って定義した $F(s), f(s)$ は定理 4.6 で用いられる $F(s), f(s)$ と一致することが分かる.

## 4.4　定理 4.6 の証明 後半

次の補題が成り立つ.

**補題 4.62.** ある絶対定数 $C > 0$ が存在して,

$$G_z^{\pm}(s) = Ce^{\sqrt{K}}\left(1 + \frac{s^{50}}{\log D}\right)^s q^{\pm}(s) \tag{4.63}$$

とおくと, 任意の $D \geq 2,\ z \geq 2,\ s > (5 \mp 1)/2$ に対して,

$$T_{R,z}^{\pm}(s) < V(z)s^{-1}\left\{T_R^{\pm}(s) + G_z^{\pm}(s)(\log D)^{-1/3}\right\} \tag{4.64}$$

が成り立つ.

**証明.** $R$ に関する帰納法で証明する. まず, $T_{0,z}^{+}(s)$ についての成立を示し, $T_{R-1,z}^{+}(s)$ に関する成立を仮定したときに, $C$ を十分大きくすれば同じ $C$ で $T_R^{-}(s)$ に関しても成立することを示す. さらに, $T_{R,z}^{-}(s)$ に関する成立を仮定したときに, $C$ を十分大きくすれば同じ $C$ で $T_R^{+}(s)$ に関しても成立することを示すことによって, 帰納法を回す.

まず $T_{0,z}^{+}(s)$ について, $1 < s \leq 3$ の時, 補題 4.34 の (2), (4.42), 仮定 $\Omega(1, K)$ より, $s = \log D/\log z$ に注意して,

$$\begin{aligned}
T_{0,z}^{+}(s) &= V(D^{1/3}) - V(z) \\
&= V(z)\left\{\frac{V(D^{1/3})}{V(z)} - 1\right\} \\
&\leq V(z)\left\{\frac{3\log z}{\log D}\left(1 + \frac{3K}{\log D}\right) - 1\right\} \\
&= V(z)s^{-1}\left\{3 - s + \frac{9K}{\log D}\right\} \\
&= V(z)s^{-1}\left\{T_R^{+}(s) + \frac{9K}{\log D}\right\}
\end{aligned} \tag{4.65}$$

が成り立つ. また, $3 < s$ のときは補題 4.34 の (1) から $T_{0,z}^{+}(s) = 0$ なので, これで $T_{0,z}^{+}(s)$ に対して (4.64) の成立が示せた.

以下 $R \geq 1$ を固定して, $T_{R-1,z}^{+}(s)$, $T_{R,z}^{-}(s)$ に対して (4.64) が成立すると仮定する.

まず $s \geq (5 \pm 1)/2$ のときを考える. 補題 4.34 の (1) から, $s \geq 2r + (5 \pm 1)/2$ のときは $S_{r,z}^{\pm}(s) = 0$ であるから,

$$\begin{aligned}
T_{R,z}^{+}(s) &= \sum_{r=0}^{R} S_{R,z}^{+}(s) \\
&\leq \sum_{2r+1 \geq s-2} \sum_{\substack{p_{2r+1} < p_{2r} < \cdots < p_1 < z \\ p_1 p_2 \ldots p_{2l} p_{2l+1}^3 < D\ (0 \leq {}^\forall l < r) \\ p_1 p_2 \ldots p_{2r} p_{2r+1}^3 \geq D}} \frac{\omega(p_1 p_2 \ldots p_{2r+1})}{p_1 p_2 \ldots p_{2r+1}} V(p_{2r+1}) \\
&\leq \sum_{2r+1 \geq s-2} \frac{1}{(2r+1)!}\left(\sum_{p<z}\frac{\omega(p)}{p}\right)^{2r+1}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

である. 同様に,

$$T_{R,z}^{-}(s) \leq \sum_{2r \geq s-2} \frac{1}{(2r)!}\left(\sum_{p<z}\frac{\omega(p)}{p}\right)^{2r} \tag{4.67}$$

が成り立つのでまとめると, 任意の $L \geq 1$ に対して,

$$
\begin{aligned}
T^{\pm}_{R,z}(s) &\leq \sum_{r>s-3} \frac{1}{r!}\left(\sum_{p<z}\frac{\omega(p)}{p}\right)^{r} \\
&= \sum_{r>s-3} L^{-r}\frac{1}{r!}\left(L\sum_{p<z}\frac{\omega(p)}{p}\right)^{r} \\
&\leq L^{3-s}\exp\left(L\sum_{p<z}\frac{\omega(p)}{p}\right) \\
&\leq L^{3-s}V(z)^{-L} \qquad (4.68)
\end{aligned}
$$

が成立する. なお最後の変形には命題 2.9 を用いた. 仮定 $\Omega(1,K)$ より, $V(z)^{-1} < 2K\log z$ なので,

$$
L = 1 + \frac{s}{\log(Ks)}
$$

ととれば,

$$
\begin{aligned}
T^{\pm}_{R,z}(s) &\leq V(z)\left(1+\frac{s}{\log(Ks)}\right)^{3-s} V(z)^{-(2+s/\log(Ks))} \\
&< V(z)\left(1+\frac{s}{\log(Ks)}\right)^{3-s} (2K\log z)^{-(2+s/\log(Ks))} \\
&= V(z)s^{-2}\left(1+\frac{s}{\log(Ks)}\right)^{3-s} (\log D)^{3}(\log z)^{\frac{s}{\log(Ks)}}(2K)^{-(2+s/\log(Ks))}\frac{1}{\log D} \\
&< V(z)s^{-2}\exp\left\{-s\log s + s\log\log(Ks) + O\left(s\frac{\log\log D}{\log(2s)}\right)\right\}\frac{1}{\log D} \qquad (4.69)
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

ここで, この評価を (4.64) の形と比較する. (4.52) より,

$$
G^{\pm}_{z}(s) = C\exp\left\{-s\log s - s\log\log(2s) + s\log\left(1+\frac{s^{50}}{\log D}\right) + \sqrt{K} + O(s)\right\} \qquad (4.70)
$$

なので, $K^{24} \gg \log D$ もしくは $s^{50} \geq \log D(\log\log D)^{3}$ であれば十分 (4.64) の成立が言えることになる.

よって, 以下 $K^{-24}\log D$ は十分大であるとし,

$$
s < (\log D)^{1/50}(\log\log D)^{3/50} = s_0 \qquad (4.71)
$$

と仮定する. 補題 4.34 の (4) より,

$$
\begin{aligned}
T^{+}_{R,z}(s) &= \sum_{D^{1/(3+2R)}\leq p<D^{1/s}} \frac{\omega(p)}{p}T^{-}_{R,p}\left(\frac{\log(D/p)}{\log p}\right) \\
&= \left(\sum_{D^{1/(3+2R)}\leq p<D^{1/s_0}} + \sum_{D^{1/s_0}\leq p<D^{1/s}}\right)\frac{\omega(p)}{p}T^{-}_{R,p}\left(\frac{\log(D/p)}{\log p}\right) \\
&= T^{+}_{R,z}(s_0) + \sum_{\substack{D^{1/s_0}\leq p<D^{1/s} \\ 2p<D}} \frac{\omega(p)}{p}T^{-}_{R,p}\left(\frac{\log(D/p)}{\log p}\right)
\end{aligned}
$$

であるから, これに帰納法の仮定を用いると,

$$T_{R,z}^{+}(s) < T_{R,z}^{+}(s_0) + \sum_{\substack{D^{1/s_0} \le p < D^{1/s} \\ 2p < D}} \frac{\omega(p)}{p} \frac{\log p}{\log(D/p)} V(p)$$
$$\times \left\{ T_R^{-}\left(\frac{\log(D/p)}{\log p}\right) + G_p^{-}\left(\frac{\log(D/p)}{\log p}\right)(\log(D/p))^{-1/3} \right\} \tag{4.72}$$

が成立する. $T_{R,z}^{-}(s)$ の方も同様にして,

$$T_{R,z}^{-}(s) < T_{R,z}^{-}(s_0) + \sum_{\substack{D^{1/s_0} \le p < D^{1/s} \\ 2p < D}} \frac{\omega(p)}{p} \frac{\log p}{\log(D/p)} V(p)$$
$$\times \left\{ T_{R-1}^{+}\left(\frac{\log(D/p)}{\log p}\right) + G_p^{+}\left(\frac{\log(D/p)}{\log p}\right)(\log(D/p))^{-1/3} \right\} \tag{4.73}$$

が成立するので,

$$\Sigma_1 = \sum_{\substack{D^{1/s_0} \le p < D^{1/s} \\ 2p < D}} \frac{\omega(p)}{p} \frac{\log p}{\log(D/p)} V(p) T_{R-(1\mp 1)/2}^{\mp}\left(\frac{\log(D/p)}{\log p}\right) \tag{4.74}$$

$$\Sigma_2 = \sum_{\substack{D^{1/s_0} \le p < D^{1/s} \\ 2p < D}} \frac{\omega(p)}{p} \frac{\log p}{\log(D/p)} V(p) G_p^{\mp}\left(\frac{\log(D/p)}{\log p}\right)(\log(D/p))^{-1/3} \tag{4.75}$$

とおいて, 順に評価する. それには命題 4.11 を使えばよい. (以下省略) □

$s^{50} < \log z$ において,

$$\left(1 + \frac{s^{50}}{\log D}\right)^s < \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s$$
$$< e$$

であるから, 補題 4.62 より,

$$T_{R,z}^{\pm}(s) < V(z)s^{-1}\left\{T_R^{\pm}(s) + Ce^{1+\sqrt{K}}q^{\pm}(s)(\log D)^{-1/3}\right\} \tag{4.76}$$

が成立する. また $s^{50} \ge \log z$ においては (4.69), 補題 4.54 より,

$$T_{R,z}^{\pm}(s) < V(z)s^{-1}\exp\left\{-s\log s + s\log\log(3s) + \sqrt{K} + O(s)\right\}(\log D)^{-1/3}$$
$$< V(z)s^{-1}\left\{T_R^{\pm}(s) + \exp\left\{-s\log s + s\log\log(3s) + \sqrt{K} + O(s)\right\}(\log D)^{-1/3}\right\} \tag{4.77}$$

が成立する. よって,

$$\begin{cases} F(s) = 1 + s^{-1}T^{+}(s) & s > 3 \\ f(s) = 1 - s^{-1}T^{-}(s) & s > 2 \end{cases} \tag{4.78}$$

とおけば, 定理 4.6 のそれぞれの場合の $Q(s)$ に対して,

$$S^{+} = V(z) + \lim_{R\to\infty} T_{R,z}^{+}(s)$$
$$< V(z) + V(z)\left\{T^{+}(s) + e^{\sqrt{K}}Q(s)(\log D)^{-1/3}\right\}$$
$$= V(z)\left\{F(s) + e^{\sqrt{K}}Q(s)(\log D)^{-1/3}\right\} \tag{4.79}$$

が成立する．同様に,

$$S^- > V(z)\left\{f(s) + e^{\sqrt{K}}Q(s)(\log D)^{-1/3}\right\} \tag{4.80}$$

が成り立つ．

なお $F(s)$, $f(s)$ の初期値が (1.19) のように取れることは, [7, p.226-227, (2.8),(2.9)] による．

以上から定理 4.2 の主張が従う．また, 補題 4.20 より, 定理 4.6 の主張が従う．

# 第5章　Hardy-Littlewood method

この章では, 定理 1.1 の証明に必要な篩法以外の定理の解説を行う. 5.1 節で major arc と minor arc の解説, 5.2 節で定理 1.38 と定理 1.41 の解説, 5.3 節で定理 1.43 と定理 1.45 の解説を行う.

この章における $\ll$-記法や $O$-記法は $\varepsilon$ 以外によらない.

## 5.1　major arc と minor arc

この節では Hardy-Littlewood method の肝である, major arc と minor arc の構成を解説する.

第 1 章で説明した通り Hardy-Littlewood method は, 方程式の解の個数の評価を積分に対応させて行う, というものであるが, major arc, minor arc はその積分評価において非常に重要な概念である. 命題 1.28 からわかるように Hardy-Littlewood method における積分は長さが 1 の区間上で行うものであり, その区間を上手く二つに分けて計算することで積分評価を行う. その二つの区間というのが major arc と minor arc である.

簡潔に言えば, $[0,1)$ のうち分母が小さい既約分数の周りの短い区間を集めたものが major arc であり, それ以外の部分が minor arc である. 分母が小さい既約分数の周りの短い区間内では指数和の値が大きくなる傾向にあるので, major arc 上の積分が主要項, minor arc 上の積分が誤差項となる.

まず, その構成において非常に重要な Weyl の不等式を記す. 証明は [19, p.11, Lemma 2.4] による.

**定理 5.1** (**Weyl の不等式**). $k, Q \in \mathbb{N}$ とする. $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して,

$$T(\phi, Q) = \sum_{x=1}^{Q} e(\phi(x))$$

とおく. 実数 $\alpha$ と既約分数 $a/q$ が,

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

を満たすとき, 任意の実数 $\varepsilon > 0$ と, 最高次の係数が $\alpha$ である任意の $k$ 次多項式

$$\phi(x) = \alpha x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \cdots + \alpha_k$$

に対して,

$$|T(\phi, Q)| \ll_k Q^{1+\varepsilon} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{Q} + \frac{q}{Q^k}\right)^{1/2^{k-1}} \tag{5.2}$$

が成り立つ.

この不等式と, 三角不等式から示される自明な評価

$$|T(\phi, Q)| \leq Q$$

を比較する.

$q \geq Q^k$ の時は (5.2) の右辺において,

$$\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{Q}+\frac{q}{Q^k}\right) \gg 1$$

が成り立つため, Weyl の不等式は自明なものである. それに対して $q < Q^k$ の時は, (5.2) の $\varepsilon$ を $\varepsilon/2^{k-1}$ に置き換えて, $Q^{2\varepsilon} \leq q \leq Q^{k-2\varepsilon}$ が満たされると仮定すれば,

$$\begin{aligned} T(\phi, Q) &\ll_k Q\left(\frac{Q^{\varepsilon}}{q}+\frac{1}{Q^{1-\varepsilon}}+\frac{q}{Q^{k-\varepsilon}}\right)^{1/2^{k-1}} \\ &\leq Q\left(\frac{2}{Q^{\varepsilon}}+\frac{1}{Q^{1-\varepsilon}}\right)^{1/2^{k-1}} \\ &\ll Q \end{aligned}$$

が成立するため, (5.2) が三角不等式による自明な評価よりも良い評価を与えることがわかる. Weyl の不等式における「既約分数周辺の...」という考え方は, Hardy-Littlewwod method における major arc, minor arc の考え方に通じている.

次に, Dirichlet の近似定理を記す. 証明は [19, p.9, Lemma 2.1] による.

**定理 5.3** (Dirichlet の近似定理)**.** $\alpha \in \mathbb{R}$ とする. このとき, 任意の実数 $X \geq 1$ に対して, ある自然数 $1 \leq q \leq X$ と $q$ と互いに素な整数 $a$ が存在して,

$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{qX} \leq \frac{1}{q^2}$$

が成立する.

以下 major arc と minor arc の構成について解説する.

Weyl の不等式は十分小さい $\delta > 0$ に対して

$$Q^{\delta} \leq q \leq Q^{k-\delta} \tag{5.4}$$

が成立するときに, 自明な評価よりも良い評価を与えるものであった. 今, 適当に $\alpha \in (0,1]$ を取ると, Dirichlet の近似定理において $X = Q^{k-\delta}$ とすることで,

$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{qQ^{k-\delta}} \leq \frac{1}{q^2}, \quad 1 \leq q \leq Q^{k-\delta} \tag{5.5}$$

を満たす既約分数 $a/q$ が取れるので, (5.4) の右側の不等式を満たしながら Weyl の不等式を使うことができる.

よって Weyl の不等式を有効に使うために, 考える $\alpha$ を (5.4) の左側の不等式を満たす $q$ が取れるような $\alpha$ に制限することを考える. そのためには, $q \leq Q^{\delta}$ を満たす既約分数 $a/q$ で近似できるような $\alpha$ をあらかじめ除いておけば良い. つまり, $Q' \leq Q^{k-\delta}$ に対して

$$\mathfrak{M}(q,a) = \left\{\ \alpha\ ;\ \left|\alpha-\frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{Q'}\right\},$$

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{1 \leq q \leq Q^{\delta}} \bigcup_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \mathfrak{M}(q,a)$$

とおいて, $\alpha \notin \mathfrak{M}$ と取ればよい. なぜなら, (5.5) より $\alpha$ は

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{Q^{k-\delta}} \leq \frac{1}{Q'}$$

を満たすので, $\alpha \notin \mathfrak{M}$ ならば $q \geq Q^{\delta}$ でなければならないからである. よって, $\alpha \notin \mathfrak{M}$ については (5.4) の左側の不等式も満たされるため, Weyl の不等式を有効に使えることが分かった.

Hardy-Littlewood method では, 上記の $\mathfrak{M}$ を major arc と呼び, [0,1) における $\mathfrak{M}$ 以外の部分 ($\mathfrak{M}$ の定義や計算の関係上 [0,1) から多少平行移動させることが多い) を minor arc と呼ぶ. そして特定の形の関数の [0,1) 上の積分を, major arc 上と minor arc 上の積分に分けて計算する, というのが Hardy-Littlewood method の基本的な手法である. そうすれば, major arc は区間の有限和集合なので単純にそれ上での積分が容易であり, minor arc 上では積分区間の様子は簡単には分からないが, その代わりに被積分関数に Weyl の不等式を用いた評価が使える.

major arc 上の積分が主要項, minor arc 上の積分が誤差項になる理由は, minor arc 上の被積分関数が Weyl の不等式を使うことで, major arc 上のものよりも比較的小さく評価できるためである.

なお, $Q'$ は major arc が disjoint union になるように定める. そのような $Q'$ の十分条件を示しておく.

**命題 5.6.** $Q' > 2Q^{2\delta}$ ならば, 上記のように定義した $\mathfrak{M}$ は disjoint union である.

**証明.** $\frac{a}{q} \neq \frac{a'}{q'}$, $1 \leq q, q' \leq Q^{\delta}$ であって,

$$\mathfrak{M}(q,a) \cap \mathfrak{M}(q',a') \neq \varnothing$$

を満たす 2 つの既約分数 $a/q, a'/q'$ があるとする.

今, $\frac{a}{q} \neq \frac{a'}{q'}$ の必要十分条件は $aq' \neq a'q$ なので,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}\right| &= \frac{1}{qq'}\left|aq' - a'q\right| \\ &\geq \frac{1}{qq'} \\ &\geq \frac{1}{Q^{2\delta}} \end{aligned} \tag{5.7}$$

が成り立つ.

また条件から $\alpha \in \mathfrak{M}(q,a) \cap \mathfrak{M}(q',a')$ がとれて, $\mathfrak{M}(*,*)$ の定義から,

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{Q'} \text{ かつ } \left|\alpha - \frac{a'}{q'}\right| \leq \frac{1}{Q'}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}\right| &= \left|\left(\alpha - \frac{a'}{q'}\right) - \left(\alpha - \frac{a}{q}\right)\right| \\ &\leq \left|\alpha - \frac{a'}{q'}\right| + \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \\ &\leq \frac{2}{Q'} \end{aligned} \tag{5.8}$$

が得られる.

(5.7), (5.8) より, $Q' \leq 2Q^{2\delta}$ が得られ, 命題が従う. □

この命題から, $Q'$ がある程度大きければ major arc が disjoint union となることが分かった. この論文では, major arc は全て disjoint union になるように取る. そのため major arc 内の $\alpha$ を取れば, $\alpha$ の属する $\mathfrak{M}(q,a)$ とそれに対応する既約分数 $a/q$ がただ一つに定まる. よって, 以下の記法が well-defined となる.

**定義 5.9.** major arc $\mathfrak{M}$ に対して, 単に「$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda \in \mathfrak{M}$ をとる」と書いて, $\alpha \in \mathfrak{M}$ と $\alpha$ の属する $\mathfrak{M}(q,a)$ に対応する既約分数 $a/q$ をとって, その誤差を $\lambda$ とおくことを意味する.

以上が major arc, minor arc のおおよその考え方である. 詳しくは [19, Chapter 2] を参照されたい.

## 5.2 平均値の定理

この節では, 定理 1.38 と定理 1.41 の解説を行う. $D = n^{\frac{1}{36} - 14\varepsilon}$ とおく.

**定理 5.10** (定理 1.38 の再掲)**.**

$$J_d(n) = \sum_{\substack{(dl)^3+p_1^3+p_2^3+p_3^3+p_4^3+p_5^3+p_6^4+p_7^4=n \\ dl,p_1,p_4\sim X_1,p_2,p_3,p_5\sim X_2,p_6,p_7\sim Y}} \prod_{i=1}^{7} \log p_i$$

とおく. また約数関数 $\tau(d)$ に対して, $a(d)$ を任意の $d \in \mathbb{N}$ に対して $|a(d)| \leq \tau(d)$ を満たす数論的関数とする.

このとき以下の評価が成立する.

$$\left| \sum_{d \leq D} a(d) \Big( J_d(n) - \frac{\mathfrak{S}_d(n)}{d} \mathcal{J}(n) \Big) \right| \ll n^{\frac{85}{72}} \log^{-C} n. \tag{5.11}$$

上記の $J_d(n)$ は, 第 1 章で説明した主定理の証明の流れに登場した $J_d(n)$ に log の重みを加えたもので, その使い方に本質的な違いはない. この定理は主定理の証明に出てくる様々な量が, 篩法で考えていた量と以下の対応があることを期待したうえで, (2.3) における誤差項 $r(\mathscr{A}, d)$ の大きさを評価するものである.

$$J_d(n) \cdots |\mathscr{A}_d|$$
$$\mathfrak{S}_d(n) \cdots \omega(d)$$
$$\mathcal{J}(n) \cdots X$$

なお実際の対応では, $\mathcal{J}(n)$ と $\mathfrak{S}_d(n)$ にそれぞれ特異級数 $\mathfrak{S}(n)$ とその逆数がかけられる. 後者の対応については次節で解説する.

定理 1.38 の証明のため, いくつかの補題を用意する.

1 つ目の補題は, $S_j, S_j^*$ の大きさに関するものである. 証明はそれぞれ, (1) は [19, p.45, Theorem 4.2], (2) は [20, Chapter IV, Problem 14], (3) と (4) は [19, p.44, Lemma 4.3], (5) は [9, p.101, Lemma 8.3] による. これらの評価は, $F_i$ や $G$ の大きさの評価に用いる.

**補題 5.12.** $a, q \in \mathbb{N}, (a,q) = 1$ について,

(1) $S_j(q,a) \leq q^{1-\frac{1}{j}}$,

(2) $S_j^*(q,a) \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

また, 特に $q$ が素数 $p$ であるとき,

(3) $|S_j(p,a)| \le ((j,p-1)-1)\,p^{\frac{1}{2}}$.

(4) $|S_j^*(p,a)| \le ((j,p-1)-1)\,p^{\frac{1}{2}}+1$.

(5)

$$\gamma(p,j)=\begin{cases}\theta+2 & (p^\theta \| j \text{ であって}, p\ne 2 \text{ または } p=2,\theta=0)\\ \theta+3 & (p^\theta \| j \text{ であって}, p=2 \text{ かつ} \theta>0)\end{cases}$$

とおくと, $l \ge \gamma(p,j)$ に対して,

$$S_j^*(p^l,a)=0.$$

**補題 5.13.**

(1) $\displaystyle\int_0^1 |F_1(\alpha)F_2^2(\alpha)|^2 d\alpha \ll n^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$.

(2) $\displaystyle\int_0^1 |f_1(\alpha)f_2^2(\alpha)|^2 d\alpha \ll n^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$.

**証明.** (1) は, R.C.Vaughan の論文 [18] の主定理そのものである ($X_2$ の値の設定はここからきているようである). (1) から (2) を示す. $i=1,2$ について,

$$|F_i(\alpha)|^2=F_i(\alpha)\cdot\overline{F_i(\alpha)}=F_i(\alpha)\cdot F_i(-\alpha)$$

であることと, 命題 1.28 より,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |F_1(\alpha)F_2^2(\alpha)|^2 d\alpha = \#\{(m_1,m_2,\ldots,m_6) | m_1^3+m_2^3+m_3^3=m_4^3+m_5^3+m_6^3,\\ m_1,m_4\sim X_1,\ m_2,m_3,m_5,m_6\sim X_2\}\end{aligned} \tag{5.14}$$

であることが分かる. (2) の左辺も同様に解釈すれば,

$$\int_0^1 |f_1(\alpha)f_2^2(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{\substack{p_1^3+p_2^3+p_3^3=p_4^3+p_5^3+p_6^3\\ p_1,p_4\sim X_1\\ p_2,p_3,p_5,p_6\sim X_2}} \prod_{i=1}^{6}\log p_i \tag{5.15}$$

と書ける. (5.15) の右辺の和の条件から $p_i$ たちが素数であることを除けば, (5.14) の条件と同じなので, (1) より,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_1(\alpha)f_2^2(\alpha)|^2 d\alpha &\le n^{\frac{8}{9}+\varepsilon}(\log X_1)^2(\log X_2)^4\\ &\ll n^{\frac{8}{9}+\varepsilon}(\log n)^6\end{aligned}$$

が成立することがわかるが, $\log n$ の項は $n^\varepsilon$ の部分に吸収できるため, (2) が従う. □

次の補題の証明は, (1) は, [1, p.30, THEOREM 4] による. (2) の証明は補題 5.13 の (2) と同様である.

**補題 5.16.**

(1) $\displaystyle\int_0^1 |F_1(\alpha)F_2(\alpha)G^2(\alpha)|^2 d\alpha \ll n^{\frac{23}{24}+\varepsilon}$.

(2) $\displaystyle\int_0^1 |f_1(\alpha)f_2(\alpha)g^2(\alpha)|^2 d\alpha \ll n^{\frac{23}{24}+\varepsilon}$.

次の補題には具体的な証明を添える．その中で, 前節で解説した major arc, minor arc の具体例とその計算方法を見る.

**補題 5.17.**

(1) $\displaystyle\int_0^1 |F_1(\alpha)F_2^3(\alpha)G^2(\alpha)|^2 d\alpha \ll n^{\frac{73}{36}}$.

(2) $\displaystyle\int_0^1 |f_1(\alpha)f_2^3(\alpha)g^2(\alpha)|^2 d\alpha \ll n^{\frac{73}{36}} \log^{12} n$.

**証明.** まず, (1) を示す.

$$\mathcal{N} = \bigcup_{1<q\le n^{\frac{1}{12}}} \bigcup_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \left(\frac{a}{q} - \frac{1}{100qn^{\frac{3}{4}}}, \frac{a}{q} + \frac{1}{100qn^{\frac{3}{4}}}\right],$$

$$\mathcal{N}_0 = \left(-\frac{1}{10n^{\frac{3}{4}}}, 1 - \frac{1}{10n^{\frac{3}{4}}}\right] \setminus \mathcal{N}$$

とおく. $\mathcal{N}$ が major arc であり, $\mathcal{N}_0$ が minor arc である. $\mathcal{N},\mathcal{N}_0$ の定め方から,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |F_1(\alpha)F_2^3(\alpha)G^2(\alpha)|^2 d\alpha &= \int_{-\frac{1}{10}n^{-\frac{3}{4}}}^{1-\frac{1}{10}n^{-\frac{3}{4}}} |F_1(\alpha)F_2^3(\alpha)G^2(\alpha)|^2 d\alpha \\ &= \left(\int_{\mathcal{N}} + \int_{\mathcal{N}_0}\right) |F_1(\alpha)F_2^3(\alpha)G^2(\alpha)|^2 d\alpha \qquad (5.18)\end{aligned}$$

が成り立つ.

まず minor arc の方から計算する． $F_2(\alpha), \alpha \in \mathcal{N}_0$ について, Weyl の不等式 (命題 5.1 を $k = 3, Q = [X_2], [X_2/2], n^{1/12} < q, q' < n^{3/4}$ の形で用いると,

$$\begin{aligned}|F_2(\alpha)| &= \left|\sum_{1\le m\le 2X_2} e(\alpha m^3) - \sum_{1\le m\le X_2} e(\alpha m^3)\right| \\ &\ll n^{\frac{5}{18}(1+\varepsilon)} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{n^{\frac{5}{18}}} + \frac{q}{n^{\frac{5}{6}}}\right)^{1/4} + \left(\frac{1}{2}n^{\frac{5}{18}}\right)^{1+\varepsilon} \left(\frac{1}{q'} + \frac{2}{n^{\frac{5}{18}}} + \frac{8q'}{n^{\frac{5}{6}}}\right)^{1/4} \\ &\le n^{\frac{5}{18}(1+\varepsilon)} \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{12}}} + \frac{1}{n^{\frac{5}{18}}} + \frac{n^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{5}{6}}}\right)^{1/4} + \left(\frac{1}{2}n^{\frac{5}{18}}\right)^{1+\varepsilon} \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{12}}} + \frac{2}{n^{\frac{5}{18}}} + \frac{8n^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{5}{6}}}\right)^{1/4} \\ &\ll n^{\frac{37}{144}+\frac{5}{18}\varepsilon} \qquad (5.19)\end{aligned}$$

が成立することがわかる．なお, 条件を満たす $a, q$ の存在は, $\alpha \notin \mathcal{N}$ と Dirichlet の近似定理による (前節参照). (5.19) と補題 5.16 の (1) から,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{N}_0} |F_1(\alpha)F_2^3(\alpha)G^2(\alpha)|^2 d\alpha &\ll n^{\frac{37}{36}+\frac{10}{9}\varepsilon} \int_{\mathcal{N}_0} |F_1(\alpha)F_2(\alpha)G^2(\alpha)|^2 d\alpha \\ &\ll n^{\frac{143}{72}+\frac{19}{9}\varepsilon} \ll n^{\frac{73}{36}} \qquad (5.20)\end{aligned}$$

が従う.

次に major arc 上の積分を考える. $\alpha = \frac{a}{q} + \lambda \in \mathcal{N}$ をとる. ここで, [19, p.42, Theorem 4.1] より,

$$\left| F_1(\alpha) - \frac{S_3(q,a)}{q} u_1(\lambda) \right| = O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \tag{5.21}$$

$$\left| F_2(\alpha) - \frac{S_3(q,a)}{q} u_2(\lambda) \right| = O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \tag{5.22}$$

$$\left| G(\alpha) - \frac{S_4(q,a)}{q} v(\lambda) \right| = O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \tag{5.23}$$

が成立する. また, [17, Lemma 4.2] より,

$$u_1(\lambda) = \int_{X_1}^{2X_1} e(\lambda u^3) du \ll \frac{X_1}{1+|\lambda|n} \tag{5.24}$$

である.

$q \leq n^{1/12}$ に注意して, 補題 5.12 の (1), (5.21)-(5.23), (5.24) と $u_2(\lambda), v(\lambda)$ に関する自明な評価から,

$$F_1(\alpha) \ll \frac{q^{2/3}}{q} \cdot \frac{X_1}{1+|\lambda|n} + q^{1/2+\varepsilon} \ll \frac{X_1}{q^{1/3}\left(1+|\lambda|n\right)}, \tag{5.25}$$

$$F_2(\alpha) \ll \frac{q^{2/3}}{q} X_2 + q^{1/2+\varepsilon} \ll \frac{X_2}{q^{1/3}}, \tag{5.26}$$

$$G(\alpha) = \frac{q^{3/4}}{q} Y + q^{1/2+\varepsilon} \ll \frac{Y}{q^{1/4}} \tag{5.27}$$

$$\tag{5.28}$$

である. (5.25)-(5.27) より,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{N}} |F_1(\alpha) F_2^3(\alpha) G^2(\alpha)|^2 d\alpha &\ll \sum_{q \leq n^{1/12}} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \int_{|\lambda| \leq n^{-3/4}} \frac{X_1^2 X_2^6 Y^4}{q^{11/3}\left(1+n|\lambda|\right)^2} d\lambda \\
&= \sum_{q \leq n^{1/12}} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} q^{-11/3} \int_{|\lambda| \leq n^{-3/4}} \frac{n^{109/36}}{\left(1+n|\lambda|\right)^2} d\lambda \\
&\ll \sum_{q \leq n^{1/12}} q^{-8/3} \left( \int_0^{n^{-1}} n^{109/36} d\lambda + \int_{n^{-1}}^{n^{-3/4}} \frac{n^{109/36}}{(n\lambda)^2} d\lambda \right) \\
&\ll n^{\frac{73}{36}}
\end{aligned} \tag{5.29}$$

が成り立つ. (5.18), (5.20), (5.29) より, (1) が得られる. (2) は, 補題 5.13 の (2) の証明と同様に (1) から示される. □

**補題 5.30** ([4, p.62, Lemma 2.5] の類似)**.**

$$\mathfrak{J} = \bigcup_{q \leq Q_0} \bigcup_{\substack{a=-q \\ (q,a)=1}}^{2q} \left( \frac{a}{q} - \frac{1}{qQ_0}, \frac{a}{q} + \frac{1}{qQ_0} \right] \tag{5.31}$$

とおき, $\alpha=\frac{a}{q}+\lambda\in\mathfrak{J}$ をとる.

$$h^*(\alpha)=\sum_{a\le D}\frac{a(d)}{dq}S_3(q,ad^3)u_1(\lambda), \tag{5.32}$$

$$\Delta(\alpha)=f_1(\alpha)-\frac{S_3^*(q,a)}{\phi(q)}\sum_{n\sim X_1}e(\lambda n^3) \tag{5.33}$$

とおくと,

$$\int_{\mathfrak{J}}|h^*(\alpha)\Delta(\alpha)|^2d\alpha\ll n^{\frac{1}{3}}\log^{-100C}n. \tag{5.34}$$

**補題 5.35** ([4, p.64, Lemma 2.6] の類似)**.** $\alpha=\frac{a}{q}+\lambda\in\mathfrak{J}$ をとる. $i=1,2$ に対して,

$$f_i^*(\alpha)=\phi(q)^{-1}S_3^*(q,a)u_i(\lambda) \tag{5.36}$$

とおくと以下の評価が成り立つ.

(1) $\displaystyle\int_{\mathfrak{J}}|f_1^*(\alpha)|^2d\alpha\ll n^{-\frac{1}{3}}\log^{21C}.$

(2) $\displaystyle\int_{\mathfrak{J}}|h^*(\alpha)|^2d\alpha\ll n^{-\frac{1}{3}}\log^{27C}.$

ここで, 区間

$$\mathfrak{J}_0=\left(-\frac{1}{Q_2},1-\frac{1}{Q_2}\right] \tag{5.37}$$

を考え, それを disjoint に分割するような以下の集合たちを定める.

**定義 5.38.** $(a,q)=1$, $1\le a\le q$ に対して,

$$\mathfrak{M}_0(q,a)=\left(\frac{a}{q}-\frac{Q_0}{n},\frac{a}{q}+\frac{Q_0}{n}\right],\quad \mathfrak{M}_0=\bigcup_{1\le q\le Q_0^5}\bigcup_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\mathfrak{M}_0(q,a),$$

$$\mathfrak{M}(q,a)=\left(\frac{a}{q}-\frac{1}{qQ_2},\frac{a}{q}+\frac{1}{qQ_2}\right],\quad \mathfrak{M}=\bigcup_{1\le q\le Q_0^5}\bigcup_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\mathfrak{M}(q,a),$$

$$\mathfrak{M}_1(q,a)=\left(\frac{a}{q}-\frac{1}{10qn^{\frac{25}{36}+14\varepsilon}},\frac{a}{q}+\frac{1}{10qn^{\frac{25}{36}+14\varepsilon}}\right],$$

$$\mathfrak{m}_1=\bigcup_{Q_0^5\le q\le Q_1}\bigcup_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\mathfrak{M}_1(q,a),\quad \mathfrak{m}=\bigcup_{Q_0^5\le q\le Q_1}\bigcup_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\mathfrak{M}(q,a),$$

$$\mathfrak{m}_0=\mathfrak{M}\backslash\mathfrak{M}_0,\quad \mathfrak{m}_2=\mathfrak{J}_0\backslash(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{m}),\quad \mathfrak{m}_3=\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{m}_1.$$

上で定めた $\mathfrak{M}_0,\mathfrak{m}_0,\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2,\mathfrak{m}_3$ は disjoint であり,

$$\mathfrak{J}_0=\mathfrak{M}_0\cup\mathfrak{m}_0\cup\mathfrak{m}_1\cup\mathfrak{m}_2\cup\mathfrak{m}_3 \tag{5.39}$$

が成り立つ. 上のような分割を Farey dissection と呼ぶ. $\mathfrak{M}_0$ が major arc にあたる.

$\mathfrak{M}_0$ 上の $\alpha$ について以下の補題が成り立つ. (1), (2) の証明は Seigel-Walfisz theorem と素数定理による. (3) は [5] の Lemma 2.6 の類似である.

**補題 5.40.** $\alpha = \frac{a}{q} + \lambda \in \mathfrak{M}_0$ をとる.

$$g^*(\alpha) = \phi(q)^{-1} S_4^*(q,a) v(\lambda)$$

とおくと, $i = 1, 2,\ 7 \le r \le 36$ に対して,

(1) $f_i(\alpha) = f_i^*(\alpha) + O\left(X_i \exp\left(-\log^{-\frac{1}{3}} n\right)\right)$,

(2) $g(\alpha) = g^*(\alpha) + O\left(Y \exp\left(-\log^{-\frac{1}{3}} n\right)\right)$,

(3) $f_{3,r}(\alpha) = c_r \dfrac{f_1^*(\alpha)}{\log X_1} + O\left(X_1 \exp\left(\log^{-\frac{1}{3}} n\right)\right)$,

が成立する. ここで $c_r$ は $7 \le r \le 36$ に対して以下のように定まる定数である.

$$c_r = (1 + O(\varepsilon)) \int_{r-1}^{35} \frac{dt_1}{t_1} \cdots \int_{3}^{t_{r-4}-1} \frac{dt_{r-3}}{t_{r-3}} \int_{2}^{t_{r-3}-1} \frac{\log(t_{r-2}-1)dt_1}{t_1}.$$

**補題 5.41** ([2, p.471, Lemma 6] の類似)**.** $|a(d)| \le \tau(d)$ を満たす数論的関数 $a(d)$ に対して,

$$h(\alpha) = \sum_{d \le D} a(d) \sum_{dl \sim X_1} e\left(\alpha (dl)^3\right) \tag{5.42}$$

とおく. $\alpha \in [0,1]$ をとり, Dirichlet の近似定理を使って $q \le Q_2$ を満たす既約分数 $\frac{a}{q}$ を用いて,

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \le \frac{1}{qQ_2}$$

と近似し, その誤差を $\lambda = \alpha - \frac{a}{q}$ とおくと,

$$h(\alpha) \ll \frac{n^{\frac{1}{3}+\varepsilon}}{q^{\frac{1}{3}}(1+n|\lambda|)^{\frac{1}{3}}} + n^{\frac{1}{4}+\varepsilon} D^{\frac{1}{4}}$$

が成り立つ.

**定理 5.10 の証明.** (5.42) で定義した $h(\alpha)$ に対して,

$$\mathcal{K}(\alpha) = h(\alpha) f_1^2(\alpha) f_2^3(\alpha) g^2(\alpha) e(-\alpha n) \tag{5.43}$$

とおく. すると, 命題 1.28 より,

$$\sum_{a \le D} a(d) J_d(n) = \int_{\mathfrak{J}_0} \mathcal{K}(\alpha) d\alpha \tag{5.44}$$

と積分に対応させることができる. よって (5.39) より,

$$\int_{\mathfrak{J}_0} \mathcal{K}(\alpha) d\alpha = \left( \int_{\mathfrak{M}_0} + \int_{\mathfrak{m}_0} + \int_{\mathfrak{m}_1} + \int_{\mathfrak{m}_2} + \int_{\mathfrak{m}_3} \right) \mathcal{K}(\alpha) d\alpha \tag{5.45}$$

と 5 つの区間に分割し, それぞれを評価する.

ここで, 補題 5.13 の (2), 補題 5.16 の (2) と Cauchy-Schwarz の不等式から,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_1^2(\alpha) f_2^3(\alpha) g^2(\alpha)| d\alpha &\ll \left( \int_0^1 |f_1(\alpha) f_2^2(\alpha)| d\alpha \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |f_1(\alpha) f_2(\alpha) g^2(\alpha)| d\alpha \right)^{1/2} \\ &\ll n^{(\frac{8}{9}+\varepsilon)/2} n^{(\frac{23}{24}+\varepsilon)/2} \ll n^{\frac{133}{144}+\varepsilon} \end{aligned} \tag{5.46}$$

が成り立つ.

$\alpha \in \mathfrak{m}_2$ に対して, $\mathfrak{m}_2$ の定義から補題 5.41 が使えて,

$$\begin{aligned} h(\alpha) &\ll \frac{n^{\frac{1}{3}+\varepsilon}}{Q_1^{\frac{1}{3}+\varepsilon}} + n^{\frac{1}{4}+\varepsilon} D^{\frac{1}{4}} \\ &= n^{\frac{1}{3}-\frac{11}{144}-2\varepsilon} + n^{\frac{1}{4}-\frac{1}{144}+\frac{9}{2}\varepsilon} \\ &= n^{\frac{37}{144}-2\varepsilon} + n^{\frac{35}{144}+\frac{9}{2}\varepsilon} \ll n^{\frac{37}{144}-2\varepsilon} \end{aligned} \tag{5.47}$$

が成り立つ. よって, (5.46) より,

$$\int_{\mathfrak{m}_2} \mathcal{K}(\alpha) d\alpha \ll \max_{\alpha\in\mathfrak{m}_2} |h(\alpha)| \left( \int_0^1 |f_1^2(\alpha) f_2^3(\alpha) g^2(\alpha)| d\alpha \right) \ll n^{\frac{85}{72}-\varepsilon} \tag{5.48}$$

が成立する.

$\alpha \in \mathfrak{m}_3$ に対しても補題 5.41 が使えるので, 同様の議論から,

$$\int_{\mathfrak{m}_3} \mathcal{K}(\alpha) d\alpha \ll \max_{\alpha\in\mathfrak{m}_3} |h(\alpha)| \left( \int_0^1 |f_1^2(\alpha) f_2^3(\alpha) g^2(\alpha)| d\alpha \right) \ll n^{\frac{85}{72}-\varepsilon} \tag{5.49}$$

が成り立つ.

次に $\alpha \in \mathfrak{m}_1$ に対して, $h^*(\alpha)$ を (5.32) で定義したものとすると, [19, p.42, Theorem 4.1] より,

$$h(\alpha) = h^*(\alpha) + O(DQ_1^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) = h^*(\alpha) + O(n^{\frac{21}{144}}) \tag{5.50}$$

が成り立つ. よって, (5.46) より,

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{m}_1} \mathcal{K}(\alpha) d\alpha &= \int_{\mathfrak{m}_3} h^*(\alpha) f_1^2(\alpha) f_2^3(\alpha) g^2(\alpha) e(-\alpha n) d\alpha + O\left(n^{\frac{72}{77}+\varepsilon}\right) \\ &= \int_{\mathfrak{m}_1} h^*(\alpha) f_1^2(\alpha) f_2^3(\alpha) g^2(\alpha) e(-\alpha n) d\alpha + O\left(n^{\frac{85}{72}-\varepsilon}\right) \end{aligned} \tag{5.51}$$

が成り立つので,

$$\mathcal{K}_1(\alpha) = h^*(\alpha) f_1^2(\alpha) f_2^3(\alpha) g^2(\alpha) e(-\alpha n) \tag{5.52}$$

とおき, $\int_{\mathfrak{m}_1} \mathcal{K}_1(\alpha) d\alpha$ を評価する.

そこで, (5.31) で定義した major arc$\mathfrak{J}$ に対して,

$$\mathfrak{J}_1 = \bigcup_{1\le q\le Q_0} \bigcup_{\substack{a=-q \\ (a,q)=1}}^{2q} \left( \frac{a}{q} - \frac{1}{n^{\frac{11}{12}}}, \frac{a}{q} + \frac{1}{n^{\frac{11}{12}}} \right], \quad \mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J} \backslash \mathfrak{J}_1$$

とおく. すると $\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{J}$ より,

$$\int_{\mathfrak{m}_1} |\mathcal{K}_1(\alpha)| d\alpha \le \int_{\mathfrak{m}_1\cap\mathfrak{J}_1} |\mathcal{K}_1(\alpha)| d\alpha + \int_{\mathfrak{m}_1\cap\mathfrak{J}_2} |\mathcal{K}_1(\alpha)| d\alpha \tag{5.53}$$

が成り立つ.

ここで, (5.32), 補題 5.12 の (1) より, $\alpha = \frac{a}{q} + \lambda \in \mathfrak{m}_1$ に対して,

$$h^*(\alpha) \ll \sum_{d\le D} \frac{\tau(d)}{d} (q, d^3)^{1/3} q^{-1/3} |u_1(\lambda)| \tag{5.54}$$

が成り立つ. $(q,d^3) \le (q,d)^3$ であり, 約数関数 $\tau(d)$ に対して, 簡単な考察と [9, p.17, Lemma 2.4] より,

$$\tau(dl) \le \tau(d)\tau(l),$$
$$\sum_{d\le x} \frac{\tau(d)}{d} \ll \log^2 x$$

が成り立つので, (5.54) より,

$$\begin{aligned} h^*(\alpha) &\ll \sum_{\substack{t|q \\ q\le D}} \tau(d) \left( \sum_{d\le D/t} \frac{\tau(d)}{d} \right) q^{-1/3}|u_1(\lambda)| \\ &\ll q^{-\frac{1}{3}+\varepsilon}|u_1(\lambda)|\log^2 n \\ &\ll Q_0^{-\frac{5}{3}+5\varepsilon} n^{\frac{1}{3}} \log^2 n \ll n^{\frac{1}{3}} \log^{-30C} n \end{aligned} \tag{5.55}$$

が従う.

まず $\alpha = \frac{a}{q} + \lambda \in \mathfrak{J}_2$ に対して, 補題 5.12 の (1), (5.24) を用いると,

$$h^*(\alpha) \ll \frac{n^{\frac{1}{3}+\varepsilon}}{1+|\lambda|n} \ll n^{\frac{1}{4}+\varepsilon} \tag{5.56}$$

が成り立つ. よって, (5.46), (5.56) より,

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{m}_1\cap\mathfrak{J}_2} |\mathcal{K}_1(\alpha)| d\alpha &\ll n^{\frac{1}{4}+\varepsilon} \int_0 1 |f_1^2(\alpha) f_2^3(\alpha) g^2(\alpha)| d\alpha \\ &\ll n^{\frac{169}{144}+2\varepsilon} \ll n^{\frac{85}{72}-\varepsilon} \end{aligned} \tag{5.57}$$

が成立する.

次に, $\alpha = \frac{a}{q} + \lambda \in \mathfrak{J}_1$ について, [17, Lemma 4.8] より, (5.33), (5.36) でそれぞれ定義した $\Delta(\alpha)$, $f_1^*(\alpha)$ に対して,

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{m}_1\cap\mathfrak{J}_1} |\mathcal{K}_1(\alpha)| d\alpha = &\int_{\mathfrak{m}_1\cap\mathfrak{J}_1} |h^*(\alpha)\Delta(\alpha) f_1(\alpha) f_2^3(\alpha) g^2(\alpha)| d\alpha \\ &+ \int_{\mathfrak{m}_1\cap\mathfrak{J}_1} |h^*(\alpha) f_1^*(\alpha) f_1(\alpha) f_2^3(\alpha) g^2(\alpha)| d\alpha \\ &+ O\left( \int_{\mathfrak{m}_1\cap\mathfrak{J}_1} |h^*(\alpha) f_1(\alpha) f_2^3(\alpha) g^2(\alpha)| d\alpha \right) \end{aligned} \tag{5.58}$$

が成り立つので, 式中の積分をそれぞれ $I_1$, $I_2$, $I_3$ と置いて評価する.

まず $I_1$ について, Cauchy-Shwartz の不等式と, 補題 5.17 の (2), 補題 5.30 より,

$$\begin{aligned} I_1 &\ll \left( \int_{\mathfrak{J}_1} |h^*(\alpha)\Delta(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |f_1(\alpha) f_2^3(\alpha) g^2(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2} \\ &\ll \left( n^{\frac{1}{3}} \log^{-100C} n \right)^{1/2} \left( n^{\frac{73}{36}} \log^{12} n \right)^{1/2} \ll n^{\frac{85}{72}} \log^{-10C} n \end{aligned} \tag{5.59}$$

である.

次に $I_2$ について, Cauchy-Shwartz の不等式と (5.55), 補題 5.17 の (2), 補題 5.35 の (1) から,

$$\begin{aligned}
I_2 &\ll n^{\frac{1}{3}} \log^{-30C} \left( \int_{\mathfrak{J}_1} |f_1^*(\alpha)| d\alpha \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |f_1(\alpha) f_2^3(\alpha) g^2(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2} \\
&\ll n^{\frac{1}{3}} \log^{-30C} \left( n^{-\frac{1}{3}} \log^{21C} n \right)^{1/2} \left( n^{\frac{73}{36}} \log^{12} n \right)^{1/2} \\
&\ll n^{\frac{85}{72}} \log^{-10C} n \qquad (5.60)
\end{aligned}$$

が従う.

最後に $I_3$ について, Cauchy-Shwartz の不等式と補題 5.17 の (2), 補題 5.35 の (2) から,

$$\begin{aligned}
I_3 &\ll \left( \int_{\mathfrak{J}_1} |h^*(\alpha)| d\alpha \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |f_1(\alpha) f_2^3(\alpha) g^2(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2} \\
&\ll \left( n^{-\frac{1}{3}} \log^{27C} n \right)^{1/2} \left( n^{\frac{73}{36}} \log^{12} n \right)^{1/2} \\
&\ll n^{\frac{85}{72}} \log^{-10C} n \qquad (5.61)
\end{aligned}$$

が従う.

よって, (5.51), (5.53), (5.59), (5.60), (5.61) より,

$$\int_{\mathfrak{m}_1} \mathcal{K}(\alpha) d\alpha \ll n^{\frac{85}{72}} \log^{-10C} n \qquad (5.62)$$

が成り立つ.

次に, $\alpha \in \mathfrak{m}_0$ に対して, 既約分数に近似されるときの分母を $q$ としたときに $q \geq Q_0^5$ が成立するので, $\mathfrak{m}_1$ と同様の議論から,

$$\int_{\mathfrak{m}_1} \mathcal{K}(\alpha) d\alpha \ll n^{\frac{85}{72}} \log^{-10C} n \qquad (5.63)$$

が成り立つ.

最後に $\alpha = \frac{a}{q} + \lambda \in \mathfrak{M}_0$ に対して, [13, p.875, Lemma 3] の証明と同様の議論から,

$$\mathcal{J}(n) \asymp n^{\frac{85}{72}} \qquad (5.64)$$

であり,

$$\int_{\mathfrak{M}_0} \mathcal{K}(\alpha) d\alpha = \sum_{d \leq D} a(d) \frac{\mathfrak{S}_d(n)}{d} \mathcal{J}(n) + O\left( n^{\frac{85}{72}} \log^{-C} n \right) \qquad (5.65)$$

が成り立つ.

よって, (5.48), (5.49), (5.62), (5.63), (5.65) より, 定理 5.10 が従う.

□

また, 上記の証明と同様にして, 次の定理が成り立つ.

**定理 5.66** (定理 1.41 の再掲)**.**

$$J_d^{(r)}(n) = \sum_{\substack{(dl)^3 + (mp)^3 + p_1^3 + p_2^3 + p3^3 + p_4^3 + p_5^4 + p_6^4 = n \\ dl, mp, p_3 \sim X_1,\ m \in \mathcal{N}_r,\ p_1, p_2, p_4 \sim X_2,\ p_5, p_6 \sim Y}} \prod_{i=1}^{6} \log p_i \frac{\log p}{\log(\frac{X_1}{m})}$$

とおく. 任意の $d \in \mathbb{N}$ に対して $|a(d)| \leq \tau(d)$ を満たす数論的関数 $a(d)$ に対して, 以下の評価が成立する.

$$\sum_{d \leq D} a(d) \Big( J_d^{(r)}(n) - c_r \frac{\mathfrak{S}_d(n)}{d} \mathcal{J}(n) \Big) \ll n^{\frac{85}{72}} \log^{-C} n. \qquad (5.67)$$

## 5.3 $\mathfrak{S}_d(n)$ と $\omega(d)$ について

この節では, 定理 1.43 と定理 1.45 の証明を行う. $\mathscr{P}$ を素数全体の集合とする.

定理 1.43 は, 具体的には定理 1.38 と定理 1.41 に出てくる $\mathfrak{S}_d(n)$ と, 篩法における $\omega(d)$ との対応を見るものであった.

**定理 5.68** (定理 1.43 の再掲)**.** $\mathfrak{S}(n)$ は収束し, $\mathfrak{S}(n) > 0$. また,

$$\omega(d) = \frac{\mathfrak{S}_d(n)}{\mathfrak{S}(n)} \tag{5.69}$$

とおけば, $\omega(d)$ は乗法的であり,

$$0 \le \omega(d) < p, \quad \omega(p) = 1 + O(p^{-1}).$$

その証明のため, いくつかの補題を示す.

**補題 5.70.** 以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{a(p)} e_p(ak) = \begin{cases} p & (p|k) \\ 0 & (p \nmid k) \end{cases} \tag{5.71}$$

**証明.** $p|k$ ならば, $e_p(ak) = 1$ なので, $\sum_{a(p)} e_p(ak) = p$.

$p \nmid k$ ならば, $e_p(k) \neq 1$ なので, 等比級数の公式より,

$$\sum_{a=1}^{p} e_p(ak) = \frac{e_p(kp) - 1}{e_p(k) - 1} = 0$$

が成り立つ. □

この補題は合同式の解の数え上げに用いられるものである.

**補題 5.72.** $K(q,n),\ H(q,n)$ をそれぞれ以下の合同式の解全体の集合とする.

$$y^3 + \sum_{i=1}^{4} x_i^3 + \sum_{j=1}^{2} y_j^4 \equiv n \pmod q \quad (1 \le y, x_i, y_j \le q,\ (yx_iy_j, q) = 1) \tag{5.73}$$

$$x^3 + y^3 + \sum_{i=1}^{4} x_i^3 + \sum_{j=1}^{2} y_j^4 \equiv n \pmod q \quad (1 \le x, y, x_i, y_j \le q,\ (yx_iy_j, q) = 1) \tag{5.74}$$

このとき, $\#K(p,n) < \#H(p,n)$ であり,

$$\#K(p,n) = p^6 + O(p^5), \tag{5.75}$$

$$\#H(p,n) = p^7 + O(p^6) \tag{5.76}$$

を満たす.

**証明.** 合同式

$$x^3 + y^3 + \sum_{i=1}^{4} x_i^3 + \sum_{j=1}^{2} y_j^4 \equiv n \pmod p \quad (1 \le x, y, x_i, y_j \le p-1) \tag{5.77}$$

の解全体の集合を $H^*(p,n)$ とする．(5.74) と (5.77) の条件を比べることで, $H^*(p,n) \subset H(p,n)$ は容易にわかる．ここで, $(x,y,\{x_i\},\{y_j\}) \in H(p,n) \backslash H^*(p,n)$ をとる．(5.74) の条件から,

$$1 \le x \le p, \quad 1 \le y, x_i, y_j \le p-1$$

を満たすので, $(x,y,\{x_i\},\{y_j\}) \notin H^*(p,n)$ より, $x=p$ である．よって, $(y,\{x_i\},\{y_j\})$ は (5.73) を満たす．逆に, $K(p,n)$ の元に $x=p$ を付け加えれば (5.74) を満たし,

$$x^3 \not\equiv 0 \quad (1 \le^{\forall} x \le p-1)$$

なので, $K(p,n)$ の元に任意の $x$ を付け加えても (5.77) を満たさない．

以上から,

$$\#H(p.n) = \#K(p,n) + \#H^*(p,n) \tag{5.78}$$

が成り立つので, $\#K(p,n) < \#H(p,n)$ を示すには, $\#H^*(p,n) > 0$ を示せばよい．

ここで,

$$\begin{aligned} S_3^{*6}(p,a) S_4^{*2}(p,a) e_p(-an) &= \left( \sum_{r(p)*} e_p(ar^3) \right)^6 \left( \sum_{r(p)*} e_p(ar^4) \right)^2 e_p(-an) \\ &= \sum_{1 \le x,y,x_i,y_j \le p-1} \exp\left\{ 2\pi i \frac{a}{p} \left( x^3 + y^3 + \sum_{i=1}^{4} x_i^3 + \sum_{j=1}^{2} y_j^4 - n \right) \right\} \end{aligned}$$

なので, 補題 5.70 より,

$$p\#H^*(p,n) = \sum_{a(p)} S_3^{*6}(p,a) S_4^{*2}(p,a) e_p(-an) \tag{5.79}$$

が成り立つ．また, $S_k^*(p,a) = p-1, \ e_p(-pn) = 1$ なので,

$$\delta_p = \sum_{a=1}^{p-1} S_3^{*6}(p,a) S_4^{*2}(p,a) e_p(-an) \tag{5.80}$$

とおけば,

$$p\#H^*(p,n) = (p-1)^8 + \delta_p \tag{5.81}$$

と表せることが分かる．

補題 5.12 の (4) より,

$$|\delta_p| \le (p-1)(2\sqrt{p}+1)^6(3\sqrt{p}+1)^2 \tag{5.82}$$

が分かるので, $p > 13$ ならば $|\delta_p| < (p-1)^8$ であり, (5.79) より $H^*(p,n) > 0$ である．また, $p = 2,3,5,7,11,13$ については実際に $H^*(p,n) > 0$ を確かめればよい．

ここで (5.79), (5.82) より,

$$\#H(p,n) = p^7 + O(p^4) \tag{5.83}$$

が導けるが, (5.75), (5.76) も同様に, それぞれ $S_3^{*5}(p,a) S_4^{*2}(p,a) e_p(-an)$,
$S_3(p,a) S_3^{*5}(p,a) S_4^{*2}(p,a) e_p(-an)$ の計算から求めることができる． □

**定理 5.68 の証明.** まず, $\mathfrak{S}(n)$ の収束性を示す. 補題 5.12 の (1) より,

$$
\begin{aligned}
|B_1(q,m)| &\leq \sum_{a(q)*} |S_3(q,a)S_3^{*5}(q,a)S_4^{*2}(q,a)e_q(-am)| \\
&\ll \phi(q)q^{\frac{2}{3}}q^{\frac{7}{2}+7\varepsilon} \\
&= \phi(q)q^{\frac{25}{6}+7\varepsilon} \qquad (5.84)
\end{aligned}
$$

であり, 任意の $\delta > 0$ に対して, $\phi(q) \gg q^{1-\delta}$ であるから ([6, p.59, THEOREM 21] 参照),

$$
\begin{aligned}
A(q,n) &= \frac{B_1(q,n)}{q\phi^7(q)} \\
&\ll \frac{q^{\frac{25}{6}+7\varepsilon}}{q^{8-7\varepsilon}} = q^{-\frac{23}{6}+14\varepsilon} \qquad (5.85)
\end{aligned}
$$

が成立する. 以上から,

$$
\mathfrak{S}(n) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q,n)
$$

は収束する.

次に, $A_d(q,n)$ が $q$ に関して乗法的であることを示す.

$$
A_d(q,n) = \frac{B_d(q,n)}{q\phi^7(q)}
$$

の分母は明らかに $q$ に関して乗法的なので, 分子 $B_d(q,n)$ をみる. ここで,

$$
B_d(q,m) = \sum_{a(q)*} S_3(q,ad^3)S_3^{*5}(q,a)S_4^{*2}(q,a)e_q(-am)
$$

であった. $(q,q') = 1$ に対して,

$$
e_{qq'}(\alpha) = e^{2\pi i\alpha/qq'} = e_q(\alpha)e_{q'}(\alpha)
$$

であるから, 中国式剰余定理より $r$ に対して $r_1, r_2$ を一意的に定めて,

$$
\begin{aligned}
S_k(qq',a) &= \sum_{r(qq')} e_{qq'}(ar^k) \\
&= \sum_{r_1(q)} \sum_{r_2(q')} e_q(ar^k)e_{q'}(ar^k) \quad (r \equiv r_1 \mod q, r \equiv r_2 \mod q') \\
&= \sum_{r_1(q)} e_q(ar^k) \sum_{r_2(q')} e_{q'}(ar^k) \\
&= \sum_{r_1(q)} e_q(ar_1^k) \sum_{r_2(q')} e_{q'}(ar_2^k) \\
&= S_k(q,a)S_k(q',a)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. $S_k^*(qq',a)$ についても同様の等式が成り立つので, 同じく $a$ に対して中国式剰余定理を

用いて,

$$\begin{aligned}
B_d(qq',m) &= \sum_{a(qq')*} S_3(qq',ad^3)S_3^{*5}(qq',a)S_4^{*2}(qq',a)e_{qq'}(-am) \\
&= \sum_{a_1(q)*} S_3(q,ad^3)S_3^{*5}(q,a)S_4^{*2}(q,a)e_q(-am) \\
&\quad \times \sum_{a_2(q')*} S_3(q',ad^3)S_3^{*5}(q',a)S_4^{*2}(q',a)e_{q'}(-am) \\
&= B_d(q,m)B_d(q',m) \qquad (5.86)
\end{aligned}$$

となるので, $B_d(q,m)$ は $q$ に関して乗法的である. よって, $A_d(q,n)$ は $q$ に関して乗法的.

以上より,

$$\mathfrak{S}_d(n) = \prod_{q=1}^{\infty} A_d(q,n) = \prod_p (1 + A_d(p,n)) \qquad (5.87)$$

が成り立つので, 次は $A_d(p,n)$ を調べる.

まず補題 5.12 の (3), (4) から,

$$|A(p,n)| \leq \frac{(p-1)\sqrt{p}(2\sqrt{p}+1)^5(3\sqrt{p}+1)^2}{p(p-1)^7} \qquad (5.88)$$

が成り立つので, $p > 11$ に対しては,

$$|A(p,n)| \leq \frac{100}{p^2} \qquad (5.89)$$

である. よって,

$$\prod_{p>1} (1 + A(p,n)) > \prod_{p>11} \left(1 - \frac{100}{p^2}\right) > 0 \qquad (5.90)$$

であり, (5.79) と同様の考察と補題 5.72 から,

$$1 + A(p,n) = \frac{H(p,n)}{(p-1)^7} > 0 \qquad (5.91)$$

が成り立つ.

(5.87), (5.89), (5.90) より,

$$\mathfrak{S}(n) = \prod_p (1 + A(p,n)) > 0 \qquad (5.92)$$

が成り立つので, 定理の前半は示された.

以下,

$$\omega(d) = \frac{\mathfrak{S}_d(n)}{\mathfrak{S}(n)}$$

について考察する. 分子 $\mathfrak{S}_d(n)$ を (5.87) より,

$$\mathfrak{S}_d(n) = \prod_{p|d} (1 + A_d(p,n)) \prod_{p\nmid d} (1 + A_d(p,n)) \qquad (5.93)$$

と二つに分けて考える.

ここで, $p \nmid d$ に対して, $r$ が $p$ を法とする剰余類全体を走るとき, $dr$ も同様に全体を走るので,

$$\begin{aligned}
S_k(p, ad^k) &= \sum_{r(p)} e_p(ad^k r^k) \\
&= \sum_{r(p)} \exp\left\{2\pi i a \frac{(dr)^k}{p}\right\} \\
&= \sum_{r(p)} \exp\left\{2\pi i a \frac{(r)^k}{p}\right\} = S_k(q, a)
\end{aligned}$$

が成り立つ. よって, $A_d(p, n) = A(p, n)$ である.

また, $p|d$ に対して,

$$S_3(p, ad^3) = \sum_{r(p)} e_p(ad^3 r^3) = p - 1 = S_3(p, ap^3)$$

なので, $B_d(p, n) = B_p(p, n)$, $A_d(p, n) = A_p(p, n)$ である.

よって, (5.69), (5.87), (5.93) より,

$$\begin{aligned}
\omega(p) &= \frac{\mathfrak{S}_p(n)}{\mathfrak{S}(n)} \\
&= \frac{(1 + A_p(p, n)) \prod_{p' \nmid p} (1 + A_p(p', n))}{\prod_p (1 + A(p, n))} \\
&= \frac{1 + A_p(p, n)}{1 + A(p, n)} \qquad (5.94)
\end{aligned}$$

が導かれる.

ここで, (5.79) と同様の考察から,

$$1 + A_p(p, n) = \frac{pK(p, n)}{(p-1)^7} \qquad (5.95)$$

が成り立つので, (5.91), (5.94) より,

$$\omega(p) = \frac{pK(p, n)}{H(p, n)} \qquad (5.96)$$

が成立する.

よって, 補題 5.72 より, $H(p, n) > K(p, n) \geq 0$ なので,

$$0 \leq \omega(p) < p \qquad (5.97)$$

が成り立ち, (5.75), (5.76) より,

$$\omega(p) = 1 + O(p^{-1}) \qquad (5.98)$$

が成り立つ. □

最後に証明するのは, 以下の定理である.

**定理 5.99** (定理 1.45 の再掲)**.** (5.69) で定義した $\omega(d)$ に対して

$$V(z) = \prod_{p|P(z)} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)$$

とおくと,

$$V(z) \asymp \frac{1}{\log z}$$

である. また, $\omega(d)$ はある定数 $K \geq 2$ に対して $\Omega(1, K)$ (定義 2.7参照) を満たす.

これは, 定理 5.68 と以下に記す Mertens の定理 ([15, p.65, (2.6)]) による.

**定理 5.100 (Mertens' theorm).**

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \asymp \frac{1}{\log x}. \tag{5.101}$$

**定理 5.99 の証明.** 定理 5.68, 定理 5.100 より,

$$\begin{aligned} V(z) = \prod_{p<z} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) &= \prod_{p<z} \left(1 - \frac{1}{p} + O(p^{-2})\right) \\ &\asymp \prod_{p<z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &\asymp \frac{1}{\log z} \end{aligned} \tag{5.102}$$

が成り立つ.

また, (5.102) より $w < z$ に対して,

$$\frac{V(w)}{V(z)} \asymp \frac{\log z}{\log w} \tag{5.103}$$

が成立するので, 十分大きな $K$ に対して $\Omega(1, K)$ を満たす. $\square$

# 第6章　Iwaniecの篩

この章では, 第 4 章で扱った Rosser の篩の誤差項の部分を改良した, Iwaniec の篩を [10] を参考に解説する．6.1 節で主定理とその証明の流れの説明, 6.2 節で誤差項の評価, 6.3 節で主要項の評価を行う．

この章の $\ll$-記法,$O$-記法に付随する定数は絶対定数である．

## 6.1　本章の主定理

この章では $\omega(p)$ に対して以下の二つの条件をつける．

$$\prod_{\substack{w\le p<z\\ p\in\mathscr{P}}}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1}\le\left(\frac{\log z}{\log w}\right)\left(1+\frac{K}{\log w}\right)\tag{6.1}$$

$$\sum_{\substack{w\le p<z\\ p\in\mathscr{P}}}\sum_{\alpha\ge 2}\frac{\omega(p^\alpha)}{p^\alpha}\le\frac{L}{\log 3w}\tag{6.2}$$

上の二式は「ある定数 $K$, $L$ に対して全ての $z>w\ge 2$ で成立する」という意味の条件である．条件 (6.1) からわかるように, これは 1 次元の篩である．

また, 位数 $D$ の Rosser の重み $\mu_d^{\pm}$ に対して,

$$M^{\pm}(D,\mathscr{P},z)=\sum_{d|P(z)}\mu_d^{\pm}\frac{\omega(d)}{d}\tag{6.3}$$

と定める．

この章の主定理を述べる．

**定理 6.4.** $0<\varepsilon<\frac{1}{3}, M>1, N>1$ を定数として定め, $D=MN$ とおく．条件 (6.1), (6.2) が満たされているとき, 全ての $2\le z\le D^{\frac{1}{2}}$ に対して, $s=\log D/\log z$ とおくと,

$$S(\mathscr{A},\mathscr{P},z)\le V(z)X\{F(s)+E(\varepsilon,D,K,L)\}+R^{+}(\mathscr{A},M,N)\tag{6.5}$$

$$S(\mathscr{A},\mathscr{P},z)\ge V(z)X\{f(s)-E(\varepsilon,D,K,L)\}-R^{-}(\mathscr{A},M,N)\tag{6.6}$$

が成立する．ここで, 誤差項 $E$ は, $E(\varepsilon,D,K,L)\ll\varepsilon+\varepsilon^{-8}e^{K+L}(\log D)^{-1/3}$ を満たす．

また $\nu=\pm$ に対し, $R^{\pm}$ は, 絶対値 1 以下の実係数 $a_{m,l}^{\nu}, b_{n,l}^{\nu}$ を用いて,

$$R^{\nu}(\mathscr{A},M,N)=\sum_{l<\exp(8\varepsilon^{-3})}\sum_{\substack{m<M\\ m|P(z)}}\sum_{\substack{n<N\\ n|P(z)}}a_{m,l}^{\nu}(M,N,\varepsilon)b_{n,l}^{\nu}(M,N,\varepsilon)r(\mathscr{A},mn)\tag{6.7}$$

という形に表せる． さらに, 式 (6.7) の和に現れる $n,m$ の条件に $mn|P(z)$ を加えても不等式 (6.5), (6.6) は成立する．

証明の方針は, (6.5), (6.6) より精密な不等式を示し, その系として定理 6.4 を導出する, というものである. 以下その不等式の主張の準備をする. 与えられた整数 $R \geq 1$ に対して,

$$W_R^+(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) + \sum_{r=0}^{R} \sum_{w^+(p_1, \cdots, p_{2r+1})} S(\mathscr{A}_{p_1 \cdots p_{2r+1}}, \mathscr{P}, p_{2r+1}) \tag{6.8}$$

$$W_R^-(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) - \sum_{r=1}^{R} \sum_{w^-(p_1, \cdots, p_{2r})} S(\mathscr{A}_{p_1 \cdots p_{2r}}, \mathscr{P}, p_{2r}) \tag{6.9}$$

と定める. ここで, 和の条件 $w^+(p_1, \cdots, p_{2r+1})$, $w^-(p_1, \cdots, p_{2r})$ はそれぞれ,

$$(w^+) \qquad \begin{aligned} &p_{2r+1} < \cdots < p_1 < z, \\ &p_{2l+1}^3 p_{2l} \cdots p_1 < D \ ({}^\forall l < r), \\ &p_{2r+1}^3 p_{2r} \cdots p_1 \geq D \end{aligned}$$

$$(w^-) \qquad \begin{aligned} &p_{2r} < \cdots < p_1 < z, \\ &p_{2l}^3 p_{2l-1} \cdots p_1 < D \ ({}^\forall l < r), \\ &p_{2r}^3 p_{2r-1} \cdots p_1 \geq D \end{aligned}$$

を満たす全ての $\mathscr{P}$ の元の組 $(p_1, \cdots, p_i)$ について和を取ることを意味する. $W^\pm(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z)$ で $W_\infty^\pm(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z)$ を表す.

この $W_R^\pm$ に対して, Rosser の重みを用いた以下の命題が成立する.

**命題 6.10.** 任意の篩 $(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z)$ に対して以下が成立する.

$$W_R^+(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = \sum_{d \mid P(z)} \mu_d^+ |\mathscr{A}_d|, \quad W_R^-(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = \sum_{d \mid P(z)} \mu_d^- |\mathscr{A}_d|$$

**証明.** 補題 4.26 の証明と全く同じ議論であるため割愛する. □

$0 < \varepsilon < 1/3$, $D \geq 2$ を定数として定め, $\eta = \varepsilon^9$ とおく. また, 以下の集合を定める.

$$\begin{aligned} \mathscr{G} &= \{D^{\varepsilon^2(1+\eta)^n} ; n \geq 0\} \\ \mathscr{H} &= \{(D_1, \cdots, D_r) \ ; \ r \geq 1, D_l \in \mathscr{G} \ \ (1 \leq^\forall l \leq r), D_r \leq \cdots \leq D_1 < D^{1/2}\} \\ \mathscr{D}^+ &= \{(D_1, \cdots, D_r) \in \mathscr{H} \ ; \ D_1 \cdots D_{2l} D_{2l+1}^3 < D \ \ (0 \leq^\forall l \leq (r-1)/2\} \\ \mathscr{D}^- &= \{(D_1, \cdots, D_r) \in \mathscr{H} \ ; \ D_1 \cdots D_{2l-1} D_{2l}^3 < D \ \ (0 \leq^\forall l \leq r/2)\} \end{aligned}$$

**注 6.11.** 元論文では, $\nu = \pm$ に対して $|\mathscr{D}^\nu| < \exp(8\varepsilon^{-3})$ であるとしているが, 本論文では確認できなかった.

また, $(D_1, \ldots, D_r) \in \mathscr{D}^\pm$ に対して, $I(D_1, \ldots, D_r)$ を,

$$I(D_1, \ldots, D_r) \subset \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq r\} \tag{6.12}$$

を満たす任意の添え字の集合とする.

以上の準備の下, 定理 6.4 の証明に用いる定理を記す.

**定理 6.13.** $R \geq 1,\ 0 < \varepsilon < 3^{-R},\ D \geq 2$ とする．条件 (6.1), (6.2) が満たされているとき，$s = \log D/\log z$ に対して，

$$W_R^+(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) \leq V(z)X\{F(s) + E\} + R_1^+ + R^+ \quad (z \leq D) \tag{6.14}$$

$$W_R^-(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) \geq V(z)X\{f(s) - E\} - R_1^- - R^- \quad (z \leq D^{1/2}) \tag{6.15}$$

が成立する．ここで，誤差項 $E$ は，$E = E(\varepsilon, D, K, L) \ll \varepsilon + \varepsilon^{-8}e^{K+L}(\log D)^{-1/3}$ を満たす．また $\nu = \pm$ に対して，$R^\nu, R_1^\nu$ は，絶対値 1 以下の実係数 $\varphi_d^\nu(D^\varepsilon)$，$\lambda_d^\nu(\varepsilon, D_1, \cdots, D_r)$ と，

$$H_d(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z\ ;\ \varepsilon, D_1, \cdots, D_r) = \sum_{\substack{D_1 \leq p_1 < D_1^{1+\eta}, \cdots, D_r \leq p_r < D_r^{1+\eta} \\ p_1 | P(z), \cdots, p_r | P(z) \\ p_i \neq p_j\ ({}^\forall(i,j) \in I(D_1, \ldots, D_r))}} r(\mathscr{A}, dp_1 \cdots p_r)$$

を用いて，

$$R_1^\nu = \sum_{\substack{d < D^\varepsilon \\ d | P(D^{\varepsilon^2})}} \varphi_d^\nu(D^\varepsilon) r(\mathscr{A}, d)$$

$$R^\nu = \sum_{(D_1, \cdots, D_r) \in \mathscr{D}^\nu} \sum_{\substack{d < D^\varepsilon \\ d | P(D^{\varepsilon^2})}} \lambda_d^\nu(\varepsilon, D_1, \cdots, D_r) H_d(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z\ ;\ \varepsilon, D_1, \cdots, D_r)$$

という形に表せる．

定理 6.13 から定理 6.4 の導出は，以下の補題から示される．

任意の列 $(D_1, \cdots, D_r)$ が $\mathscr{D}^\nu$ の元であることを，$\nu$-admissible であると呼ぶ． 空な列も $\nu$-admissible であるとする．

**補題 6.16.** 任意の $\nu$-admissible な列 $(D_1, \cdots, D_r)$ は，$M, N > 1$，$MN = D$，$s+t = r$，$M_1 \cdots M_s \leq M$，$N_1 \cdots N_t \leq N$ を満たす交わりを持たない二つの $\nu$-admissible な列 $(M_1, \cdots, M_s)$，$(N_1, \cdots, N_t)$ を集合としてみたときの和集合に集合として一致する．

**証明.** $r$ に関する帰納法で証明する．$r = 1$ の時は，$(D_1)$ 自身と空な列の和と考えればよい．$D_1 \leq D^{1/2}$ であるから，$M \geq D^{1/2}$ ととれば条件は満たされる．$r \geq 2$ の場合を考える．$\nu$-admissible な列 $(D_1, \cdots, D_r)$ を任意に取る. 明らかに $(D_1, \cdots, D_{r-1})$ も $\nu$-admissible であるので，帰納法の仮定から，$(D_1, \cdots, D_{r-1})$ は disjoint な分解 $(M_1, \cdots, M_{s'})$，$(N_1, \cdots, N_{t'})$ を持つ． ここで，$D_1 \cdots D_r^2 \leq D_1 \cdots D_{r-1}^3$ であるから，$r$ の偶奇，$\nu$ にかかわらず，$D_1 \cdots D_r^2 \leq D$ が成立する．つまり，$M_1 \cdots M_{s'} D_r \leq M$ または $N_1 \cdots N_{t'} D_r \leq N$ が成立するので，その方に $D_r$ を付け加えた列ともう一方そのものが求める分解である．付け加えた列が $\nu$-admissible であることは明らかである． □

## 6.2 定理 6.13 の証明 $R^\pm$ の評価

まず，定理 6.13 は $z \geq D^{-1/\log\varepsilon}$ において証明すれば十分であることを示す．$z < D^{-1/\log\varepsilon}$ と仮定し，$z_1 = D^{-1/\log\varepsilon}$ における定理 6.13 の不等式が成り立つとする．

$\mathscr{P}_z = \{p\ ;\ p|P(z)\}$, $s_1 = \log D/\log z_1 = -\log\varepsilon$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
W_R^+(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) &= W_R^+(\mathscr{A}, \mathscr{P}_z, z_1) \le V(z)X\{F(s_1) + E\} + R_1^+ + R^+ \\
W_R^-(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) &= W_R^-(\mathscr{A}, \mathscr{P}_z, z_1) \ge V(z)X\{f(s_1) - E\} - R_1^- - R^-
\end{aligned}
$$

が成立する. 等式の両辺で篩にかける際に考える素数の集合が変化していないことに注意すると,

$$
\begin{aligned}
F(s_1) &= 1 + O(e^{-s_1}) = 1 + O(\varepsilon) \le F(s) + O(\varepsilon) \\
f(s_1) &= 1 + O(e^{-s_1}) = 1 + O(\varepsilon) \ge f(s) + O(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

より定理 6.13 の主張を得る.

以下, $z \ge D^{-1/\log\varepsilon}$ と仮定する.

次の記号を定義する.

$$
\begin{aligned}
u = D^{\varepsilon^2}, \quad P(z,u) = P(z)/P(u), \quad V(z,u) = V(z)/V(u), \\
\tilde{\mathscr{A}} = \{a \in \mathscr{A}\ ;\ \bigl(a, P(u)\bigr) = 1\}, \quad \tilde{\mathscr{P}} = \{p \in \mathscr{P}\ ;\ p \nmid P(u)\}
\end{aligned}
$$

まず, 以下の二つの不等式を示す.

$$
W_R^+(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) \le W^+(\tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mathscr{P}}, z) \tag{6.17}
$$

$$
W_R^-(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) \ge W^-(\tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mathscr{P}}, z) \tag{6.18}
$$

定義から, $S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = S(\tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mathscr{P}}, z)$ は明らかである.

以下の補題を示す.

**補題 6.19.** $r$ を自然数とする. $\{p_i\}$ を正の狭義減少列とすると以下が成り立つ.

(1) 全ての $l < r$ に対して $p_1 \cdots p_{2l} p_{2l+1}^3 < D$ ならば, $p_1 \cdots p_{2r} < D^{1-3^{-r}}$

(2) 全ての $l < r$ に対して $p_1 \cdots p_{2l-1} p_{2l}^3 < D$ ならば, $p_1 \cdots p_{2r-1} < D^{1-\frac{1}{2}3^{-r-1}}$

**証明.** (1) のみ証明を行う. (2) も同様の議論から従う.

$r$ に関する帰納法により証明する. $r = 1$ のとき, 仮定より $p_1^3 < D$, すなわち $p_2 < p_1 < D^{1/3}$ なので, $p_1 p_2 < D^{2/3}$ より成り立つ.

次に, $r-1$ の時成り立つと仮定する. すなわち,

$$
p_1 \cdots p_{2(r-1)} < D^{1-3^{-(r-1)}}
$$

であるとする. $p_{2r-1} > p_{2r}$ と, 補題の仮定から,

$$
\begin{aligned}
p_1 \cdots p_{2(r-1)} p_{2r-1}^3 &< D \\
p_1 \cdots p_{2(r-1)} p_{2r}^3 &< D
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 上の三つの不等式を辺々掛け合わせ三乗根を取れば,

$$
\begin{aligned}
p_1 \cdots p_{2r} &< D^{\frac{1}{3}(3-3^{-(r-1)})} \\
&= D^{1-3^{-r}}
\end{aligned}
$$

より, $r$ の時も成立. よって帰納法が回り, 題意が示される. □

$r \le R$ において, $w^+(p_1, \cdots p_{2r+1})$ が成立すると仮定すると, 上の補題から $p_1 \cdots p_{2r} < D^{1-3^{-r}}$ であるから, $p_{2r+1} > D^{3^{-r-1}} > u$ である ($\because 0 < \varepsilon < 3^{-R} < 3^{-r} < 3^{-1}$). 同様に, $w^-(p_1, \cdots p_{2r})$ が成立すると仮定すると, 上の補題から $p_1 \cdots p_{2r-1} < D^{1-\frac{3}{2}3^{-r}}$ であるから, $p_{2r} > D^{\frac{1}{2}3^{-r}} > u$ である.

よって, $W_R^{\pm}(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z)$ の定義式 (6.8), (6.9) における $\Sigma$ で足し上げられるような $S(\mathscr{A}_{p_1 \cdots p_r}, \mathscr{P}, p_r)$ は, $S(\tilde{\mathscr{A}}_{p_1 \cdots p_r}, \tilde{\mathscr{P}}, p_r)$ に等しく, $W^{\pm}(\tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mathscr{P}}, z)$ においても足し上げられる.

よって (6.17), (6.18) が成立するので, 以下 $W^+(\tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mathscr{P}}, z)$ の評価を目指す.

まず, 命題 6.10 を篩 $(\tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mathscr{P}}, z)$ に用いることで,

$$\begin{aligned} W^{\pm}(\tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mathscr{P}}, z) &= \sum_{d | P(z,u)} \mu_d^{\pm} |\tilde{\mathscr{A}}_d| \\ &= \sum_{d | P(z,u)} \mu_d^{\pm} S(\mathscr{A}_d, \mathscr{P}, u) \end{aligned}$$

を得る.

ここで, $d = p_1 \cdots p_r, D^{1/2} > p_1 > \cdots > p_r \ge u$ と $\mathscr{H}$ の元 $(D_1, \ldots, D_r)$ に対して, 「$d$ が $(D_1, \ldots, D_r)$ に属する」と書いて,

$$D_1 \le p_1 < D_1^{1+\eta}, \ldots, D_r \le p_r < D_r^{1+\eta}$$

が成立することを表すとする. また,

$$H_{(D_1,\ldots,D_r)}(\mathscr{A}, \mathscr{P}, u) = \sideset{}{^*}\sum_{D_i \le p_i < D_i^{1+\eta} \ (1 \le \forall i \le r)} S(\mathscr{A}_{p_1 \cdots p_r}, \mathscr{P}, u) \tag{6.20}$$

と置く. ただし, $\sideset{}{^*}\sum$ は, $P(z,u)$ を割る $p_1, \ldots, p_r$ であって, $p_i \ne p_j(\forall(i,j) \in I(D_1, \ldots, D_r))$ を満たすもの全体で和を取ることを意味する.

簡単な不等式評価から, $d$ が $(D_1, \ldots, D_r)$ に属し, $\mu_d^+ \ne 0$ ならば, $0 \le l \le (r-1)/2$ に対して $D_1 \cdots D_{2l} D_{2l+1}^3 < D$ が成立する. 同様に, $d$ が $(D_1, \ldots, D_r)$ に属し, $\mu_d^- \ne 0$ ならば, $1 \le l \le r/2$ に対して $D_1 \cdots D_{2l-1} D_{2l}^3 < D$ が成立するので,

$$\begin{aligned} W^+(\tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mathscr{P}}, z) \le & S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, u) \\ & - \sum_{r \ge 0} \sum_{\substack{D_1 > \cdots > D_{2r+1} \\ D_1 \cdots D_{2l} D_{2l+1}^3 < D^{1/(1+\eta)} \ (0 \le \forall l \le r)}} H_{(D_1, \cdots, D_{2r+1})}(\mathscr{A}, \mathscr{P}, u) \\ & + \sum_{r \ge 1} \sum_{\substack{D_1 \ge \cdots \ge D_{2r} \\ D_1 \cdots D_{2l} D_{2l+1}^3 < D \ (0 \le \forall l < r)}} H_{(D_1, \cdots, D_{2r})}(\mathscr{A}, \mathscr{P}, u), \end{aligned} \tag{6.21}$$

また,

$$\begin{aligned} W^-(\tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mathscr{P}}, z) \ge & S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, u) \\ & - \sum_{r \ge 0} \sum_{\substack{D_1 \ge \cdots \ge D_{2r+1} \\ D_1 \cdots D_{2l-1} D_{2l}^3 < D^{1/(1+\eta)} \ (0 \le \forall l \le r)}} H_{(D_1, \cdots, D_{2r+1})}(\mathscr{A}, \mathscr{P}, u) \\ & + \sum_{r \ge 1} \sum_{\substack{D_1 > \cdots > D_{2r} \\ D_1 \cdots D_{2l-1} D_{2l}^3 < D^{1/(1+\eta)} \ (0 \le \forall l \le r)}} H_{(D_1, \cdots, D_{2r})}(\mathscr{A}, \mathscr{P}, u) \end{aligned} \tag{6.22}$$

が成立する.

ここで, 位数 $D^{\varepsilon}$ の Rosser の重みを $\varphi_d^{\pm}$ とすれば, 補題 6.10 から,

$$\sum_{d|P(u)} \varphi_d^{-} |\mathscr{A}_{dq}| \le S(\mathscr{A}_q, \mathscr{P}, u) \le \sum_{d|P(u)} \varphi_d^{+} |\mathscr{A}_{dq}|$$

および,

$$\pm H_{(D_1,\cdots,D_r)}(\mathscr{A}, \mathscr{P}, u) \le \sum_{d|P(u)} \varphi_d^{\pm} \sideset{}{^*}\sum_{D_i \le p_i < D_i^{1+\eta}\ (1 \le \forall i \le r)} |\mathscr{A}_{dp_1\cdots p_r}|$$

が従う.

よって, (6.21) より,

$$\begin{aligned}
&W^{+}(\tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mathscr{P}}, z) \\
&\le S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, u) - \sum_{r \ge 0} \sum_{\substack{D_1 > \cdots > D_{2r+1} \\ D_1 \cdots D_{2l} D_{2l+1}^3 < D^{1/(1+\eta)} \\ \text{for all } 0 \le l \le r}} H_{(D_1,\cdots,D_{2r+1})}(\mathscr{A}, \mathscr{P}, u) \\
&\qquad + \sum_{r \ge 1} \sum_{\substack{D_1 \ge \cdots \ge D_{2r} \\ D_1 \cdots D_{2l} D_{2l+1}^3 < D \\ \text{for all } 0 \le l < r}} H_{(D_1,\cdots,D_{2r})}(\mathscr{A}, \mathscr{P}, u) \\
&\le \sum_{d|P(u)} \varphi_d^{+} |\mathscr{A}_d| \\
&\quad - \sum_{r \ge 0} \sum_{\substack{D_1 > \cdots > D_{2r+1} \\ D_1 \cdots D_{2l} D_{2l+1}^3 < D^{1/(1+\eta)} \\ \text{for all } 0 \le l \le r}} \sum_{d|P(u)} \varphi_d^{-} \sum_{D_i \le p_i < D_i^{1+\eta}\ (1 \le \forall i \le 2r+1)} |\mathscr{A}_{dp_1\cdots p_{2r+1}}| \\
&\quad + \sum_{r \ge 1} \sum_{\substack{D_1 \ge \cdots \ge D_{2r} \\ D_1 \cdots D_{2l} D_{2l+1}^3 < D \\ \text{for all } 0 \le l < r}} \sum_{d|P(u)} \varphi_d^{+} \sideset{}{^*}\sum_{D_i \le p_i < D_i^{1+\eta}\ (1 \le \forall i \le 2r)} |\mathscr{A}_{dp_1\cdots p_{2r}}|
\end{aligned}$$

が従う. $W^{+}(\tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mathscr{P}}, z)$ についても同様.

よって, $|\mathscr{A}_q|$ を $\frac{\omega(q)}{q} X + r(\mathscr{A}, q)$ という形に置き換えれば以下のような評価が得られる.

$$W^{+}(\tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mathscr{P}}, z) \le X\Lambda^{+} + R_1^{+} + R^{+}, \tag{6.23}$$

$$W^{-}(\tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mathscr{P}}, z) \ge X\Lambda^{-} - R_1^{-} - R^{-}. \tag{6.24}$$

ここで, $R_1^{\pm}$, $R^{\pm}$ は所望の形をしており,

$$\begin{aligned}
\Lambda^{+} = &\sum_{d|P(u)} \varphi_d^{+} \frac{\omega(d)}{d} \\
&- \sum_{r \ge 0} \sum_{\substack{D_1 > \cdots > D_{2r+1} \\ D_1 \cdots D_{2l} D_{2l+1}^3 < D^{1/(1+\eta)} \\ \text{for all } 0 \le l \le r}} \sum_{d|P(u)} \varphi_d^{-} \sum_{D_i \le p_i < D_i^{1+\eta}\ (1 \le \forall i \le 2r+1)} \frac{\omega(dp_1 \cdots p_{2r+1})}{dp_1 \cdots p_{2r+1}} \\
&+ \sum_{r \ge 1} \sum_{\substack{D_1 \ge \cdots \ge D_{2r} \\ D_1 \cdots D_{2l} D_{2l+1}^3 < D \\ \text{for all } 0 \le l < r}} \sum_{d|P(u)} \varphi_d^{+} \sideset{}{^*}\sum_{D_i \le p_i < D_i^{1+\eta}\ (1 \le \forall i \le 2r)} \frac{\omega(dp_1 \cdots p_{2r})}{dp_1 \cdots p_{2r}},
\end{aligned} \tag{6.25}$$

また,

$$\Lambda^- = \sum_{d|P(u)} \varphi_d^- \frac{\omega(d)}{d}$$
$$- \sum_{r\geq 0} \sum_{\substack{D_1 \geq \cdots \geq D_{2r+1} \\ D_1 \cdots D_{2l} D_{2l+1}^3 < D \\ \text{for all } 1 \leq l \leq r}} \sum_{d|P(u)} \varphi_d^+ \sideset{}{^*}\sum_{D_i \leq p_i < D_i^{1+\eta}\ (1 \leq {}^\forall i \leq 2r+1)} \frac{\omega(dp_1 \cdots p_{2r+1})}{dp_1 \cdots p_{2r+1}}$$
$$+ \sum_{r\geq 1} \sum_{\substack{D_1 > \cdots > D_{2r} \\ D_1 \cdots D_{2l} D_{2l+1}^3 < D \\ \text{for all } 1 \leq l \leq r}} \sum_{d|P(u)} \varphi_d^- \sum_{D_i \leq p_i < D_i^{1+\eta}\ (1 \leq {}^\forall i \leq 2r)} \frac{\omega(dp_1 \cdots p_{2r})}{dp_1 \cdots p_{2r}} \tag{6.26}$$

である. 以上より, 誤差項に関しては評価ができた.

## 6.3 $\Lambda^\pm$の 評価

この節では, 主要項 $\Lambda^\pm$ の評価を行い, 定理 6.13 の証明を完成させる. それには,

$$\Lambda^+ \leq V(z)\big(F(s) + E(\varepsilon,\ D,\ K,\ L)\big) \tag{6.27}$$

および,

$$\Lambda^- \geq V(z)\big(f(s) - E(\varepsilon,\ D,\ K,\ L)\big) \tag{6.28}$$

を示せばよい. 二つの証明は同様の議論であるため, $\Lambda^+$ についてのみ証明を行う.

$0 \leq \omega(p) < p \quad (p \in \mathscr{P})$ より,

$$\sum_{q|P(z,u)} \frac{\omega(q)}{q} = \prod_{p|P(z,u)} \Big(1 + \frac{\omega(p)}{p}\Big)$$
$$\leq \prod_{p|P(z,u)} \Big(1 - \frac{\omega(p)}{p}\Big)^{-1} = \frac{V(u)}{V(z)}$$

である. このことと仮定 (6.1), また $M^\pm(D^\varepsilon, \mathscr{P}, u)$ に補題 4.2 を $s = \log D^\varepsilon / \log u = \varepsilon^{-1}$ であることに注意して用いれば,

$$\Big(\sum_{d|P(u)} \varphi_d^+ \frac{\omega(d)}{d} - \varphi_d^- \frac{\omega(d)}{d}\Big)\Big(\sum_{q|P(z,u)} \frac{\omega(q)}{q}\Big)$$
$$\ll V(u)\{F(s) - f(s) + e^{\sqrt{K}-s}(\log D^\varepsilon)^{-1/3}\} \frac{V(u)}{V(z)}$$
$$\ll V(z)e^{-1/\varepsilon}\{1 + e^{\sqrt{K}}(\varepsilon \log D)^{-1/3}\}\Big(\frac{V(u)}{V(z)}\Big)^2$$
$$\ll V(z)e^{-1/\varepsilon}\{1 + e^{\sqrt{K}}(\varepsilon \log D)^{-1/3}\}\Big(\frac{\log z}{\log u}\Big)^2\Big(1 + \frac{K}{\log u}\Big)^2$$
$$= V(z)e^{-1/\varepsilon}\{1 + e^{\sqrt{K}}(\varepsilon \log D)^{-1/3}\}\varepsilon^{-4}\Big(1 + \frac{K}{\varepsilon^2 \log D}\Big)^2$$
$$= E'(\varepsilon, D, K)V(z)$$

を得る．よって,

$$
\begin{aligned}
\Lambda^+ = & \sum_{d|P(u)} \varphi_d^+ \frac{\omega(d)}{d} \\
& - \sum_{d|P(u)} \varphi_d^- \frac{\omega(d)}{d} \sum_{r\ge 0} \sum_{\substack{D_1>\cdots>D_{2r+1} \\ D_1\cdots D_{2l}D_{2l+1}^3<D^{1/(1+\eta)} \\ \text{for all } 0\le l\le r}} \sum_{D_i\le p_i<D_i^{1+\eta}\ (1\le{}^\forall i\le 2r+1)} \frac{\omega(p_1\cdots p_{2r+1})}{p_1\cdots p_{2r+1}} \\
& + \sum_{d|P(u)} \varphi_d^+ \frac{\omega(d)}{d} \sum_{r\ge 1} \sum_{\substack{D_1\ge\cdots\ge D_{2r} \\ D_1\cdots D_{2l}D_{2l+1}^3<D \\ \text{for all } 0\le l<r}} \sideset{}{^*}\sum_{D_i\le p_i<D_i^{1+\eta}\ (1\le{}^\forall i\le 2r)} \frac{\omega(p_1\cdots p_{2r})}{p_1\cdots p_{2r}} \\
& = \sum_{d|P(u)} \varphi_d^+ \frac{\omega(d)}{d} \\
& \times \Big(1 - \sum_{r\ge 0} \sum_{\substack{D_1>\cdots>D_{2r+1} \\ D_1\cdots D_{2l}D_{2l+1}^3<D^{1/(1+\eta)} \\ \text{for all } 0\le l\le r}} \sum_{D_i\le p_i<D_i^{1+\eta}\ (1\le{}^\forall i\le 2r+1)} \frac{\omega(p_1\cdots p_{2r+1})}{p_1\cdots p_{2r+1}} \\
& \qquad + \sum_{r\ge 1} \sum_{\substack{D_1\ge\cdots\ge D_{2r} \\ D_1\cdots D_{2l}D_{2l+1}^3<D \\ \text{for all } 0\le l<r}} \sideset{}{^*}\sum_{D_i\le p_i<D_i^{1+\eta}\ (1\le{}^\forall i\le 2r)} \frac{\omega(p_1\cdots p_{2r})}{p_1\cdots p_{2r}} \Big) \\
& + \Big( \sum_{d|P(u)} \varphi_d^+ \frac{\omega(d)}{d} - \varphi_d^- \frac{\omega(d)}{d} \Big) \\
& \times \sum_{r\ge 0} \sum_{\substack{D_1>\cdots>D_{2r+1} \\ D_1\cdots D_{2l}D_{2l+1}^3<D^{1/(1+\eta)} \\ \text{for all } 0\le l\le r}} \sum_{D_i\le p_i<D_i^{1+\eta}\ (1\le{}^\forall i\le 2r+1)} \frac{\omega(p_1\cdots p_{2r+1})}{p_1\cdots p_{2r+1}} \\
& = M^+(D^\varepsilon, \mathscr{P}, u) L^+\big(\varepsilon, D, P(z)\big) + O\big(E'(\varepsilon, D, K) V(z)\big) \qquad (6.29)
\end{aligned}
$$

と置き, 評価する．$M^+(D^\varepsilon, \mathscr{P}, u)$ には定理 4.2 が使えるので, 以下 $L^+\big(\varepsilon, D, P(z)\big)$ の評価を目指す．

そこで, 定理 4.2 が使える別の関数 $M^+(D, \tilde{\mathscr{P}}, z)$ と $L^+\big(\varepsilon, D, P(z)\big)$ を比べることで評価する．どちらも, ある条件を満たす $q$ について $\frac{\omega(q)}{q}$ の和をとったものである．

**注 6.30.** ある $q$ が双方の和の条件を満たすならば, その素因数の個数の偶奇を考えることで, $\omega(q)/q$ の符号は同じであることがわかる．

また, $q = p_1\cdots p_r \quad (p_1 > \cdots > p_r)$ が $M^+$ に現れる条件は, 任意の $0 \le l \le (r-1)/2$ に対して $p_1 p_2 \cdots p_{2l} p_{2l+1}^3 < D$ であった．

そのどちらか一方の和にだけ現れる $q$ を 4 つのクラスに分けて調べる．まずは平方因子を持つような $q$ のクラスである．

$$A = \{q = p_1\cdots p_t \ ; \ p_l | P(z,u) \text{ for all } 1 \le l \le t,\ \mu(q) = 0\}.$$

次に, $M^+$ には出てきて, $L^+$ には出てこないような $q$ のクラスを考える．$B_n = D^{\varepsilon^2(1+\eta)^n}$ とおく．そのような $q$ は,

$$B = \{q \ ; \ q|P(z,u),\ \text{ある } n \text{ に対して } q \text{ の少なくとも 2 つの素因数が } [B_n,\ B_{n+1}) \text{ に入っている.}\}$$

に属するか, または,

$$C=\left\{q\,\middle|\,\begin{array}{l}q|P(z,u),\ q=p_1\cdots p_{2r+1},\ p_1>\cdots>p_{2r+1},\\ \text{ある } 0\le l<r \text{ に対して},\ D^{1/(1+\eta)}\le p_1\cdots p_{2l}p_{2l+1}^3<D.\end{array}\right\}$$

に属する.

最後に, $L^+$ には出てきて, $M^+$ には出てこないような $q$ のクラスは,

$$D=\{q\,;\,q|P(z,u),\ q=p_1\cdots p_{2r},p_1>\cdots>p_{2r},D\le p_1\cdots p_{2l}p_{2l+1}^3<D^{1+\eta}\text{ for some }0\le l<r\}$$

である.

以上のことから,

$$|L^+\bigl(\varepsilon,D,P(z)\bigr)-M^+(D,\tilde{\mathscr{P}},z)|\le\sum_{q\in A\cup B\cup C\cup D}\frac{\omega(q)}{q} \tag{6.31}$$

を得るので, それぞれのクラスごとに評価する.

- A について

簡単のため, $U=\sum_{p|P(z,u)}\sum_{a\ge2}\frac{\omega(p^a)}{p^a}$ と置く. $x\ge0,y\ge1$ において $x+y\le ye^x$ となることを用いると, 簡単な考察から,

$$\begin{aligned}\sum_{q\in A}\frac{\omega(q)}{q}&\le\Bigl(\sum_{p|P(z,u)}\sum_{a\ge2}\frac{\omega(p^a)}{p^a}\Bigr)\prod_{p|P(z,u)}\Bigl(\sum_{a\ge0}\frac{\omega(p^a)}{p^a}\Bigr)\\&=U\prod_{p|P(z,u)}\Bigl(1+\frac{\omega(p)}{p}+\sum_{a\ge2}\frac{\omega(p^a)}{p^a}\Bigr)\\&\le U\prod_{p|P(z,u)}\Bigl(1+\frac{\omega(p)}{p}\Bigr)\exp\sum_{a\ge2}\frac{\omega(p^a)}{p^a}\\&\le Ue^U\frac{V(u)}{V(z)}\end{aligned}$$

である.

よって, 仮定 (6.1), (6.2) から,

$$\begin{aligned}\sum_{q\in A}\frac{\omega(q)}{q}&\le\frac{L}{\log3u}e^{\frac{L}{\log3u}}\cdot\frac{\log z}{\log u}\bigl(1+\frac{K}{\log u}\bigr)\\&\ll\varepsilon^{-4}KLe^{\frac{L}{\varepsilon^2\log D}}(\log D)^{-1}\\&\ll\varepsilon^{-4}Ke^L(\log D)^{-1}\end{aligned}\tag{6.32}$$

が成り立つ.

- B について

簡単な考察から,

$$\sum_{q\in B}\frac{\omega(q)}{q}\le\sum_{\substack{G\in\mathscr{G}\\u\le G<z}}\Bigl(\sum_{\substack{G\le p<G^{1+\eta}\\p\in\mathscr{P}}}\frac{\omega(p)}{p}\Bigr)^2\sum_{q|P(z,u)}\frac{\omega(q)}{q}$$

である.

$\omega(p)/p < 1$ より, $\log(1-x)$ のマクローリン展開から,

$$\log \frac{V(G)}{V(G^{1+\eta})} = -\sum_{\substack{G \le p < G^{1+\eta} \\ p \in \mathscr{P}}} \log\left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)$$
$$\ge \sum_{\substack{G \le p < G^{1+\eta} \\ p \in \mathscr{P}}} \frac{\omega(p)}{p}$$

なので, 仮定 (6.1) と, $x > 0$ において $\log(1+x) \le x$ であることを用いると,

$$\sum_{\substack{G \le p < G^{1+\eta} \\ p \in \mathscr{P}}} \frac{\omega(p)}{p} \le \log \frac{V(G)}{V(G^{1+\eta})} \le \log(1+\eta) + \log\left(1 + \frac{K}{\log G}\right) < \varepsilon^9 + \frac{K}{\log u}.$$

また, $x > 3$ において, $2\log x < x$ であることを用いると,

$$\sum_{\substack{G \in \mathscr{G} \\ u \le G < z}} \sum_{\substack{G \le p < G^{1+\eta} \\ p \in \mathscr{P}}} \frac{\omega(p)}{p} \le \sum_{\substack{u \le p < z \\ p \in \mathscr{P}}} \frac{\omega(p)}{p}$$
$$\le \log \frac{V(u)}{V(z)} < \log \varepsilon^{-2} + \frac{K}{\log u} < \varepsilon^{-1} + \frac{K}{\log u}$$

である.

これらと,

$$\sum_{q | P(z,u)} \frac{\omega(q)}{q} \le \frac{V(u)}{V(z)} < \varepsilon^{-2}\Big(1 + \frac{K}{\log u}\Big)$$

を合わせると,

$$\sum_{q \in B} \frac{\omega(q)}{q} \le \Big(\varepsilon^9 + \frac{K}{\log u}\Big)\Big(\varepsilon^{-1} + \frac{K}{\log u}\Big)\varepsilon^{-2}\Big(1 + \frac{K}{\log u}\Big)$$
$$\ll \varepsilon^6 + \varepsilon^{-5} K^3 (\log D)^{-1} \tag{6.33}$$

を得る.

- C と D について

平方因子を持たない $q$ のある素因数 $p$ に注目する. $q$ の $p$ より大きい素因数全ての積を $m$, $p$ より小さい素因数全ての積を $n$ と置けば, $q = mpn$ であり, 求めたい和は,

$$\sum_{q \in C \cup D} \frac{\omega(q)}{q} \le \sum_{\substack{mpn | P(z,u) \\ D^{1/(1+\eta)} \le mp^3 < D^{1+\eta}}} \frac{\omega(mpn)}{mpn}$$

と評価できる. この右辺の和は, 条件を満たす全ての $m, p, n$ についての和である. ここで, $m_1 = \max\{u^3, D^{1/(1+\eta)}/m\}$, $m_2 = \min\{z^3, D^{1+\eta}/m\}$ とおくと,

$$\sum_{q \in C \cup D} \frac{\omega(q)}{q} \le \Big(\sum_{m | P(z,u)} \frac{\omega(m)}{m} \sum_{\substack{p | P(z,u) \\ m_1 \le p^3 < m_2}} \frac{\omega(p)}{p}\Big)\Big(\sum_{n | P(z,u)} \frac{\omega(n)}{n}\Big)$$

であり,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{p|P(z,u)\\ m_1\le p^3<m_2}} \frac{\omega(p)}{p} &\le \log \frac{V(m_1^{1/3})}{V(m_2^{1/3})} \\
&\le \log \left\{ \Big( \frac{\log m_2^{1/3}}{\log m_1^{1/3}} \Big) \Big( 1 + \frac{K}{\log m_1^{1/3}} \Big) \right\} \\
&\le \log \Big( \frac{\log m_2}{\log m_1} \Big) + \frac{K}{\log u}
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

この第一項について, 以下の補題を示す.

**補題 6.34.** $m_1, m_2$ を上で定めたものとするとき,

$$
\log \Big( \frac{\log m_2}{\log m_1} \Big) < \varepsilon^7
$$

が成立する.

**証明.** (a), (b) の二つの場合に分けて考える.

(a) $u^3 \ge D^{1/(1+\eta)}/m$ の時, $\log m \ge \big( \frac{1}{1+\eta} - 3\varepsilon^2 \big) \log D$ なので,

$$
\begin{aligned}
\frac{\log m_2}{\log m_1} &\le \frac{(1+\eta)\log D - \log m}{3\varepsilon^2 \log D} \\
&\le \frac{(1+\eta)\log D - \big(\frac{1}{1+\eta} - 3\varepsilon^2\big)\log D}{3\varepsilon^2 \log D} \\
&\le \frac{(1+\eta)^2 - \big(1 - 3\varepsilon^2(1+\eta)\big)}{3\varepsilon^2(1+\eta)} \qquad (6.35) \\
&< \frac{2\varepsilon^9 + \varepsilon^{18} + 3\varepsilon^2 + 3\varepsilon^{11}}{3\varepsilon^2} \\
&= 1 + \frac{2}{3}\varepsilon^7 + \varepsilon^9 + \frac{1}{3}\varepsilon^{16} < 1 + \varepsilon^7
\end{aligned}
$$

最後の不等号には, $\varepsilon < \frac{1}{3}$ を用いた.

よって, $x > 0$ で, $\log(1+x) < x$ となることを用いれば,

$$
\log \Big( \frac{\log m_2}{\log m_1} \Big) < \log(1+\varepsilon^7) < \varepsilon^7
$$

となり, 目的の評価を得る.

(b) $u^3 < D^{1/(1+\eta)}/m$ の時, $\log m < \big( \frac{1}{1+\eta} - 3\varepsilon^2 \big) \log D$ である.

$$
\frac{\log m_2}{\log m_1} \le \frac{(1+\eta)\log D - \log m}{\frac{1}{1+\eta}\log D - \log m}
$$

と評価できるが, $x = \log m / \log D$ と置き,

$$
f(x) = \frac{(1+\eta) - x}{\frac{1}{1+\eta} - x}
$$

の, $x < \frac{1}{1+\eta} - 3\varepsilon^2$ での単調性を考えれば,

$$
f(x) < f\left( \frac{1}{1+\eta} - 3\varepsilon^2 \right) = \frac{(1+\eta) - \big(\frac{1}{1+\eta} - 3\varepsilon^2\big)}{3\varepsilon^2}
$$

となり, (6.35) に帰着する. よって示された. □

上の補題から,

$$\sum_{\substack{p|P(z,u)\\ m_1\le p^3<m_2}} \frac{\omega(p)}{p} \le \varepsilon^7 + \frac{K}{\log u}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}\sum_{q\in C\cup D} \frac{\omega(q)}{q} &\le \Big(\frac{V(u)}{V(z)}\Big)^2\Big(\varepsilon^7+\frac{K}{\log u}\Big) < \varepsilon^{-4}\Big(1+\frac{K}{\log u}\Big)^2\Big(\varepsilon^7+\frac{K}{\log u}\Big)\\ &\ll \varepsilon^3+\varepsilon^{-6}K^3(\log D)^{-1} \end{aligned}\tag{6.36}$$

を得る.

よって, (6.29), (6.31), (6.32), (6.33), (6.36) から,

$$\begin{aligned}\Lambda^+ &= M^+(D^\varepsilon,\mathscr{P},u)\Big\{M^+(D,\tilde{\mathscr{P}},z)+O\big(\varepsilon^{-4}Ke^L(\log D)^{-1}\big)+O\big(\varepsilon^6+\varepsilon^{-5}K^3(\log D)^{-1}\big)\\ &\qquad +O\big(\varepsilon^3+\varepsilon^{-6}K^3(\log D)^{-1}\big)\Big\}+O\big(E'(\varepsilon,D,K)V(z)\big)\\ &= M^+(D^\varepsilon,\mathscr{P},u)\Big\{M^+(D,\tilde{\mathscr{P}},z)+O\big(\varepsilon^3+\varepsilon^{-6}K^3e^L(\log D)^{-1}\big)\Big\}+O\big(E'(\varepsilon,D,K)V(z)\big)\end{aligned}\tag{6.37}$$

を得る.

(6.23), (6.37) より, 定理 4.2 を示すには

$$\begin{aligned}&M^+(D^\varepsilon,\mathscr{P},u)\Big\{M^+(D,\tilde{\mathscr{P}},z)+O\big(\varepsilon^3+\varepsilon^{-6}K^3e^L(\log D)^{-1}\big)\Big\}+O\big(E'(\varepsilon,D,K)V(z)\big)\\ &\quad\ll V(z)\{F(s)+O(\varepsilon+\varepsilon^{-8}e^{K+L}(\log D)^{-1/3})\}\end{aligned}\tag{6.38}$$

を示せばよい.

まず, $M^+(D^\varepsilon,\mathscr{P},u)$ に, $s=\log D^\varepsilon/\log u=\varepsilon^{-1}$ に注意して定理 4.2 を用いると,

$$M^+(D^\varepsilon,\mathscr{P},u)\le V(u)\Big\{F(\varepsilon^{-1})+O\big(e^{\sqrt{K}-\varepsilon^{-1}}(\log D)^{-1/3}\big)\Big\}\tag{6.39}$$

である.

また, 関数 $V(z)$ が $\mathscr{P}$ にもよることに注意して, (6.1) と定理 4.2 を用いれば,

$$\begin{aligned}&M^+(D,\tilde{\mathscr{P}},z)+O\big(\varepsilon^3+\varepsilon^{-6}K^3e^L(\log D)^{-1}\big)\\ &\le \frac{V(z)}{V(u)}\{F(s)+O\big(e^{\sqrt{K}-s}(\log D)^{-1/3}\big)\}+O\big(\varepsilon^3+\varepsilon^{-6}K^3e^L(\log D)^{-1}\big)\\ &= \frac{V(z)}{V(u)}\{F(s)+O\big(e^{\sqrt{K}-s}(\log D)^{-1/3}\big)+\frac{V(u)}{V(z)}O\big(\varepsilon^3+\varepsilon^{-6}K^3e^L(\log D)^{-1}\big)\}\\ &\le \frac{V(z)}{V(u)}\Big\{F(s)+O\big(e^{\sqrt{K}-s}(\log D)^{-1/3}\big)+\Big(\frac{\log z}{\log u}\Big)\Big(1+\frac{K}{\log u}\Big)O\big(\varepsilon^3+\varepsilon^{-6}K^3e^L(\log D)^{-1}\big)\Big\}\\ &\le \frac{V(z)}{V(u)}\Big\{F(s)+O\big(e^{\sqrt{K}-s}(\log D)^{-1/3}\big)+\varepsilon^{-2}(1+K)O\big(\varepsilon^3+\varepsilon^{-6}K^3e^L(\log D)^{-1}\big)\Big\}\\ &\le \frac{V(z)}{V(u)}\Big\{F(s)+O\big(\varepsilon+\varepsilon^{-8}e^{K^{\frac{3}{4}}+L}(\log D)^{-1/3}\big)\Big\} \qquad (6.40)\end{aligned}$$

(6.41)

が成り立つ.

ここで, 篩関数 $F(t)$ に関する評価,

$$F(t) = 1 + O(e^{-t})$$

と, $z$ が下に有界なので, $F(s)$ が上下に有界であることを用いると,

$$\begin{aligned}
&\Big\{F(\varepsilon^{-1}) + O\big(e^{\sqrt{K}-\varepsilon^{-1}}(\log D)^{-1/3}\big)\Big\}\Big\{F(s) + O\big(\varepsilon + \varepsilon^{-8}e^{K^{\frac{3}{4}}+L}(\log D)^{-1/3}\big)\Big\} \\
&= \Big\{1 + O\big(e^{-\varepsilon^{-1}} + e^{\sqrt{K}-\varepsilon^{-1}}(\log D)^{-1/3}\big)\Big\}\Big\{F(s) + O\big(\varepsilon + \varepsilon^{-8}e^{K^{\frac{3}{4}}+L}(\log D)^{-1/3}\big)\Big\} \\
&\leq F(s) + O\big(\varepsilon + \varepsilon^{-8}e^{K^{\frac{3}{4}}+L}(\log D)^{-1/3} + e^{-\varepsilon^{-1}} + e^{\sqrt{K}-\varepsilon^{-1}}(\log D)^{-1/3} \\
&\qquad + \varepsilon e^{\sqrt{K}-\varepsilon^{-1}}(\log D)^{-1/3} + \varepsilon^{-8}e^{K^{\frac{3}{4}}+\sqrt{K}+L-\varepsilon^{-1}}(\log D)^{-2/3}\big) \\
&\leq F(s) + O(\varepsilon + \varepsilon^{-8}e^{K+L}(\log D)^{-1/3}) \qquad (6.42)
\end{aligned}$$

が成り立つ.

最後に誤差項 $E'(\varepsilon, D, K)$ の評価について,

$$E'(\varepsilon, D, K) = e^{-1/\varepsilon}\{1 + e^{\sqrt{K}}(\varepsilon \log D)^{-1/3}\}\varepsilon^{-4}\Big(1 + \frac{K}{\varepsilon^2 \log D}\Big)^2$$

だったので,

$$\begin{aligned}
O\big(E'(\varepsilon, D, K)\big) &\leq O\Big(\varepsilon\big(1 + e^{\sqrt{K}}(\varepsilon \log D)^{-1/3}\big)\big(1 + \frac{K^2}{\varepsilon^2 \log D}\big)\Big) \\
&= O(\varepsilon + \varepsilon^{-1}K^2(\log D)^{-1} + \varepsilon^{\frac{2}{3}}e^{\sqrt{K}}(\log D)^{-1/3} + \varepsilon^{-1}K^2e^{\sqrt{K}}(\log D)^{-4/3} \\
&\leq O(\varepsilon + \varepsilon^{-8}e^{K+L}(\log D)^{-1/3}) \qquad (6.43)
\end{aligned}$$

が成り立つ.

よって, (6.39), (6.40), (6.42), (6.43) より, (6.38) が従い, 定理 6.13 が従う.

# 関連図書


[1] Jörg Brüdern. On Waring's problem for cubes and biquadrates. *J. London Math. Soc. (2)*, Vol. 37, No. 1, pp. 25–42, 1988.

[2] Jörg Brüdern. A sieve approach to the Waring-Goldbach problem. I. Sums of four cubes. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, Vol. 28, No. 4, pp. 461–476, 1995.

[3] Jörg Brüdern. A sieve approach to the Waring-Goldbach problem. II. On the seven cubes theorem. *Acta Arith.*, Vol. 72, No. 3, pp. 211–227, 1995.

[4] Y. C. Cai. The Waring-Goldbach problem: one square and five cubes. *Ramanujan J.*, Vol. 34, No. 1, pp. 57–72, 2014.

[5] Y. C. Cai and Q. W. Mu. Waring-Goldbach problem: two squares and some unlike powers. *Acta Math. Hungar.*, Vol. 145, No. 1, pp. 46–67, 2015.

[6] K. Chandrasekkharan. *Introduction to Analytic Number Theory.* Izdat. "Mir", Moscow, 1974. Translated from the English by S. A. Stepanov, Edited by A. I. Vinogradov.

[7] H. Halberstam and H.-E. Richert. *Sieve methods.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1974. London Mathematical Society Monographs, No. 4.

[8] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. Some problems of "partitio numerorum": II. Proof that every large number is the sum of at most 21 biquadrates. *Math. Z.*, Vol. 9, No. 1-2, pp. 14–27, 1921.

[9] L. K. Hua. *Additive theory of prime numbers.* Translations of Mathematical Monographs, Vol. 13. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1965.

[10] Henryk Iwaniec. A new form of the error term in the linear sieve. *Acta Arith.*, Vol. 37, pp. 307–320, 1980.

[11] Henryk Iwaniec. Rosser's sieve. *Acta Arith.*, Vol. 36, No. 2, pp. 171–202, 1980.

[12] Koichi Kawada and Trevor D. Wooley. On the Waring-Goldbach problem for fourth and fifth powers. *Proc. London Math. Soc. (3)*, Vol. 83, No. 1, pp. 1–50, 2001.

[13] Koichi Kawada and Lilu Zhao. The Waring-Goldbach problem for cubes with an almost prime. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, Vol. 119, No. 4, pp. 867–898, 2019.

[14] U. V. Linnik. On the representation of large numbers as sums of seven cubes. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S.*, Vol. 12(54), pp. 218–224, 1943.

[15] J. Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld. Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois J. Math.*, Vol. 6, pp. 64–94, 1962.

[16] Sanying Shi and Li Liu. On the Waring-Goldbach problem for six cubes and two biquadrates. *Chin. Ann. Math. Ser. B*, Vol. 39, No. 6, pp. 1033–1046, 2018.

[17] E. C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1986. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.

[18] R. C. Vaughan. Sums of three cubes. *Bull. London Math. Soc.*, Vol. 17, No. 1, pp. 17–20, 1985.

[19] R. C. Vaughan. *The Hardy-Littlewood method*, Vol. 125 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1997.

[20] I. M. Vinogradov. *Elements of number theory*. Dover Publications, Inc., New York, 1954. Translated by S. Kravetz.

[21] Edward Waring. *Meditationes algebraicæ*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991. Translated from the Latin, edited and with a foreword by Dennis Weeks, With an appendix by Franz X. Mayer, translated from the German by Weeks.

[22] 本橋洋一. ‘篩法’ 概観. 数学, Vol. 57, No. 2, pp. 138–163, 2005.