代数閉包の存在の別証明

命題 0.1. K が代数閉体でなければ，K の代数拡大全体の集まりは集合ではない．

証明. L/K を自明でない代数拡大とし，$a \in L \setminus K$ とする．X を L に含まれない任意の集合，$x \in X$ とする．$L' = (L \setminus \{a\}) \cup \{x\}$ とすると，L' から L への全単射 ϕ で L 上では恒等写像，$\phi(x) = a$ となるものがある．L は K 上の代数拡大なので，L' も K 上の代数拡大の構造を持つ．もし K の代数拡大全体の集まりが集合なら，

$$Y = L \cup \bigcup L'$$

も集合だが，L に含まれない任意の元は Y の元であり，$L \subset Y$ なので，Y は任意の集合を含む．これは矛盾なので，K の代数拡大全体の集まりは集合ではない． □

定理 0.2. K の代数閉包が存在する．

証明. K が有限体なら，X を K を含む，連続濃度の集合とする．例えば，$\mathbb{F}_p$ の元を $\mathbb{C}$ の $\{0, \ldots, p-1\}$ と同一視すればよい．K が無限体なら，$X = \mathscr{P}(K)$ (部分集合全体の集合) とすると，X の濃度は K の濃度より大きい．$x \in K$ は $\{x\} \in X$ と同一視できる．K を含む X の部分集合 L と L の上の K の代数拡大の対全体は集合になる．なぜなら，X の部分集合は $\mathscr{P}(X)$ の元であり，$L \subset X$ なら，L 上の演算は写像 $L \times L \to L$ と同一視ができる．そのような写像はグラフを考えることにより $L \times L \times L$ の元とみなせる．$L \times L \times L$ の元は $X \times X \times X$ の元と同一視できる．体は二つの演算で定まるので，L と L の上の拡大体の構造は

$$\mathscr{P}(X) \times (X \times X \times X \coprod X \times X \times X)$$

の元と同一視できる．これは集合である．

Y をそのような拡大体 L 全体の集合とする．$L, L' \in Y$ で L'/L が拡大体なら，$L \leqq L'$ と定義すると，これは Y 上の順序になる．ツォルンの補題が使えることが容易に示せて，Y には極大元が存在する．L_0 を極大元とする．L_0/K は代数拡大である．L_0 が代数閉体であることを示せばよい．もし L_0 が代数閉体でなければ，2 次以上の既約多項式 $f(x) \in L_0[x]$ がある．

$F = L_0[x]/(f(x))$ は L_0 の自明でない代数拡大である．K が有限体なら，K の代数拡大は高々可算集合であり，K が無限体なら，K の代数拡大の濃度は K の濃度と等しい．どちらの場合も $X \setminus L$ の濃度は $F \setminus L_0$ の濃度よりも真に大きい．よって，単射 $i : F \setminus L_0 \to X \setminus L_0$ がある．$F' = L_0 \cup i(F \setminus L_0)$ には F と同型な体の構造が入るので，$L_0 < F'$ とみなせる．これは L_0 の極大性に反するので，L_0 は代数閉体である．したがって，K の代数閉包が存在する． □

代数閉包の存在が示せれば，K の代数拡大は $\overline{K}$ の部分体と同一視できるので，K の代数拡大の同型類は集合である．しかし，代数閉包の存在を示そうとしているときに K の代数拡大の同型類が集合であると仮定するのは循環論法になるのではないだろうか．

経験上，上のような証明は受け入れられない学生が多く，無限変数多項式環による証明のほうがだましだと思う．