p-進世界へようこそ

山崎 隆雄

筑波大学数学系

1　ようこそ新しい数の世界へ

この講義では、みなさんを新しい数の世界へご案内します。その世界は p-**進数** の世界といいます。ここで、p は素数を表します。素数とは、自分自身と 1 の他に約数を持たない（1 以外の）自然数のことです。$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$ などは素数です。ですから、2-進数の世界、3-進数の世界、13-進数の世界など、さまざまな数の世界があります。

旅立つ前に注意をしておきますと、p-進世界はとても奇妙な世界です。それは不条理で無秩序な世界に感じられるかもしれません。でも、そこでひるまずに先へ進んでみてください。始めは不条理だと思っても、そうしているうちにだんだんと p-進世界には p-進世界なりの秩序があるということが感じられてくると思います。

2　2-進世界を覗いてみる

それでは始めに $p = 2$ の場合、つまり 2-進世界がどのような世界なのか、少しだけ覗いてみましょう。一つの極めて特徴的・刺激的な事実は、2-進世界では次の式が成り立つことです：

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^n + \cdots = -1 \tag{1}$$

私はこれを、比喩的に成り立つとか心情的に成り立つと言っているのではありません。2-進数の世界では、この式が１００％精密な意味で成り立つのです。これはかなり奇妙に感じられることでしょう。全くでたらめな世界だと感じられるかもしれません。ここはひとまず深入りを避け、退却することにします。

3　実数の世界

上と対照的に、我々がすでによく知っている数の世界、すなわち実数の世界では次の式が成り立ちます：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=2 \tag{2}$$

この式も始めは分かりにくいかもしれません。次のように考えてみましょう：

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{2} &= \frac{3}{2} &&= 2-\frac{1}{2}\\
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} &= \frac{7}{4} &&= 2-\frac{1}{4}\\
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} &= \frac{15}{8} &&= 2-\frac{1}{8}\\
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} &= \frac{31}{16} &&= 2-\frac{1}{16}
\end{aligned}$$

これら四つの式は、左辺を通分して計算すれば確認することが出来ます。そして、これらから次の式を類推することができるでしょう：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n} \tag{3}$$

実際、この式は高校の授業で学ぶ「等比数列の和の公式」を用いると証明できます。等比数列の和の公式は文末の付録で説明しておきましたので、気になる方はそちらの式 (17) 参照して下さい。ともかく、ここまでは（有限個の）数の間の四則演算（和差積商）しか行っていません。

ここで次の事実を確認しましょう：

> $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$ という数の列は 0 に近づいてゆく

これは当たり前のことのように感じられると思いますが、実はこれこそが実数世界を実数世界たらしめている顕著な特徴なのです。ここで述べていることは、数の間の **遠近感** に関わることであり、前段で行った数の間の **四則演算** とは全く別のことがらであることに注意してください。無限の和というような問題を議論するときのコツは、この二つをしっかりと峻別することです。

さて、この事実を式 (3) と見比べてみます。すると、式 (3) の右辺は 2 に近づくという結論が得られます。これが式 (2) の語っていることでした。

以上の議論をまとめます。式 (2) の左辺を理解するには、「有限個の数の足し算」だけでなく、「数と数の間の遠近感」という概念が必要になるのでした。標語的には次のように言えます：

> 無限和は有限和と遠近感で決まる

4　ふたたび 2-進世界へ

以上の反省を踏まえて、2-進世界における等式 (1) を見直しましょう。まず、有限個の数の足し算に関する次の計算をみてください：

$$
\begin{aligned}
1+2 &= 3 &&= 4-1\\
1+2+4 &= 7 &&= 8-1\\
1+2+4+8 &= 15 &&= 16-1\\
1+2+4+8+16 &= 31 &&= 32-1
\end{aligned}
$$

これらから次の式が類推できるでしょう。（これも公式 (17) を用いて証明できます。）

$$1+2+4+8+16+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1 \tag{4}$$

さて、ここで 2-進数の世界の遠近感を述べます：

$2, 4, 8, 16, \cdots, 2^n, \cdots$ という数の列は 0 に近づいてゆく

これはなんとも奇妙なことで、全く理不尽だと感じられるかもしれません。どうしてこんなことになるのだと聞きたくもなろうと思います。残念ながら、この「どうして」という質問には有効な答えを用意できません。数学的に誠実に答えるなら「そう決めたから」という答えにならない答えしかできないのです。

しかし、実数の世界で $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$ が 0 に近づくという単純な事実も「どうして」と聞かれたらなんと答えればいいのでしょう。これは「どうして $1+1$ は 2 なの？」という質問にも似て、質問者を（回答者でなく）納得させる回答は私には出来そうにありません。またしても、数学的に誠実に回答するなら「遠近感（『近づく』という言葉の意味）をそう決めたから」という程度になってしまいます。

先ほどみたとおり、「数の間の遠近感」は「四則演算」とは独立した概念です。「四則演算」については実数と同じように振る舞うのだけど、「遠近感」だけが全く異なるという数の世界というのを想像してください。それが 2-進数の世界です。ひとたびこの 2-進世界の遠近感を認めれば、式 (1) が成り立つ事情も理解できます。式 (4) で右辺の 2^{n+1} が 0 に近づくとみればよいのです。

5　p-進世界

p を素数とします。p-進世界は次の遠近感を持つ世界です：

$p, p^2, p^3, p^4, \cdots, p^n, \cdots$ という数の列は 0 に近づいてゆく

2-進数の世界におけるこの様子は、前節で説明しました。別の例として 3-進数の世界において次の等式が成り立つことをみてみましょう：

$$1-3+9-27+81-243+\cdots+(-3)^n+\cdots=\frac{1}{4} \tag{5}$$

前と同じように、始めの数項の和を計算してみると

$$\begin{aligned}
&1-3 && =-2\\
&1-3+9 && =7\\
&1-3+9-27 && =-20\\
&1-3+9-27+81 && =61
\end{aligned}$$

これらをみても何ら規則性が見えませんが、右辺の四倍したものを並べてみると次のようになります：

$$\begin{aligned}
(-2)\times 4 &= & -8 &= & 1-9\\
7\times 4 &= & 28 &= & 1+27\\
(-20)\times 4 &= & -80 &= & 1-81\\
61\times 4 &= & 244 &= & 1+243
\end{aligned}$$

これらをみれば、次の式が類推できるでしょう（証明には公式 (17) を用います）：

$$4\times(1-3+9-27+81-243+\cdots+(-3)^n)=1\pm 3^{n+1}$$

n が大きくなると 3^{n+1} は 0 に近づくのだから、式 (5) が確認できました。

もう一つの例を挙げます。5-進数の世界においては次の式が成り立ちます。少し複雑ですが、いままでと同じ方針で証明できますので試してみてください。（あとで別の証明を与えます。）

$$1+3\times 5+1\times 25+3\times 125+\cdots+1\times 5^{2n}+3\times 5^{2n+1}+\cdots=-\frac{2}{3} \tag{6}$$

注. 実数には数の間に大小関係がありました。実は、この大小関係は遠近感と密接に関わっています。例えば、実数の大小関係 $a<b<c$ は「a より b の方が c に近い」ことを示します。さらに、実数には符号（プラス・マイナス）という概念もあります。これは 0 との大小関係ということですから、やっぱり遠近感と密接に関わってきます。

$$\text{遠近感} \approx \text{大小関係} \approx \text{符号}$$

p-進世界は実数とは大きく異なる遠近感を持っています。そのため、p-進世界では数の間の大小関係や符号は、考えることができない概念となってしまいます。なお、複素数の世界でも大小関係や符号は考えることはできません。

6　p-進法

数を表す方法として p-**進法** というものがあります。p-進数と p-進法は基本的には別々のことがらですが、名前からも連想されるとおり、関係がないでもありません。このことについて、このさき三つの節で説明します。やや技術的な計算が含まれますので、面倒に感じたならとばして第 9 節から読んでもかまいません。

p-進法は、p が素数でなくとも（2 以上の自然数であれば）考えることが出来ます。もちろん $p = 10$ の場合が我々の慣れ親しんだ十進法です。この文章でもこれまで何の断りもなく使ってきました。十進法の核心は、次の事実にあります：

すべての自然数 n は、次の形に表すことができる。

$$n = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 \tag{7}$$

ここで $a_0, a_1, \cdots, a_m$ は $0, 1, 2, \cdots, 9$ のいずれかである。

こういわれてもピンとこないかもしれませんが、次の式はすぐ分かると思います。

$$43210 = 4 \times 10000 + 3 \times 1000 + 2 \times 100 + 1 \times 10 + 0 \tag{8}$$

ここで $100 = 10^2, 1000 = 10^3, 10000 = 10^4$ であることに注意して式 (7) をみてください。$n = 43210$ のとき、$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, m = 4$ とおいたものが式 (8) に他ならないことに気づくでしょう。このように、すべての自然数 n はふつう通りに数字で書いたとき、その各桁の数字を右から順に $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m$ とおけば、式 (7) のように表すことができます。実はこの事実が先にあり、それを利用して「この自然数 n は、$a_m, a_{m-1}, \cdots a_1, a_0$ を順に並べたもので表せる」と考えたのが、十進法のアイデアです。

ふつうは十進法を用いて数を表記しますが、以下の文章では他の表記法（p-進法）も使うことがあります。断りがなければ十進法での表記ですが、特に十進法を使っていることをはっきりさせたいときは $n = (a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0)_{10\text{-進}}$ の様に書くことにしましょう。例えば、いままでは単に $n = 43210$ と書いていましたが、$n = (43210)_{10\text{-進}}$ と書くことになります。

以上の話は 10 を p で置き換えることができます。（p は 2 以上の自然数です。）

すべての自然数 n は、次の形に表すことができる。

$$n = a_m \times p^m + a_{m-1} \times p^{m-1} + \cdots + a_1 \times p + a_0 \tag{9}$$

ここで $a_0, a_1, \cdots, a_m$ は $0, 1, 2, \cdots, p-1$ のいずれかである。また、このとき $n = (a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0)_{p\text{-進}}$ と書いて、これを n の p-進法による記法とよぶ。

$p=5$ として例を挙げてみましょう。

$$
\begin{aligned}
(16)_{10\text{-進}} &= 3\times 5+1 && = (31)_{5\text{-進}}\\
(41)_{10\text{-進}} &= 1\times 5^2+3\times 5+1 && = (131)_{5\text{-進}}\\
(416)_{10\text{-進}} &= 3\times 5^3+1\times 5^2+3\times 5+1 && = (3131)_{5\text{-進}}
\end{aligned}
$$

7　p-進法と小数

ここまでは自然数だけを考えてきましたが、小数を用いればどんな実数も十進法で表すことができます。いくつか例を挙げましょう。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{7} &= 0.142\cdots && = 0+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{2}{1000}+\cdots\\
\sqrt{2} &= 1.414\cdots && = 1+\frac{4}{10}+\frac{1}{100}+\frac{4}{1000}+\cdots\\
\pi &= 3.141\cdots && = 3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots
\end{aligned}
$$

最後の π は円周率です。式 (7) と同じようにまとめると、次のようになります：

すべての正の実数 r は、次の形に表すことができる。

$$
r = a_m\times 10^m+\cdots+a_1\times 10+a_0+\frac{a_{-1}}{10}+\frac{a_{-2}}{100}+\cdots\frac{a_{-n}}{10^n}+\cdots \tag{10}
$$

ここで $a_m,\cdots,a_0,a_{-1},\cdots,a_{-n},\cdots$ は $0,1,2,\cdots,9$ のいずれかである。このとき、$r=(a_m\cdots a_1a_0.a_{-1}\cdots a_{-n}\cdots)_{10\text{-進}}$ と書いて、これを r の十進法による表記という。（a_0 と a_{-1} の間に書いてある . は小数点です。）

これらの式をみて、前半の話との類似に気づかれたでしょうか。式 (10) は **無限和** の形をしています。無限和は有限和と **遠近感** で決まるのでした。ですから、式 (10) は実数の遠近感に依存したことがらなのです。実際、式 (10) の無限和が意味を持つのは次の事実に依っています。

$\frac{1}{10},\frac{1}{100},\frac{1}{1000},\frac{1}{10000},\cdots,\frac{1}{10^n},\cdots$ という数の列は 0 に近づいてゆく

十進法の原理式 (7) を、**実数世界において** 拡張したものが式 (10) です。同じように p-進法の原理式 (9) を拡張したものを考えてみましょう。ここで、せっかく p-進法を考えるのですから、実数世界でなく p-**進世界における** 拡張を考えてみましょう。復習しておきますと、p-進世界における遠近感は次のようなものでした

$p,p^2,p^3,p^4,\cdots,p^n,\cdots$ という数の列は 0 に近づいてゆく

逆に $\frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \frac{1}{p^3}, \frac{1}{p^4}, \cdots, \frac{1}{p^n}, \cdots$ という数の列は 0 から遠ざかってゆくのです。だから、単純に式 (10) で 10 を p に置き換えたのでは、0 から遠い数を無限に加えることになってしまい、意味を持ちません。p-進世界で意味を持つ無限和は何かと考えると次の式にたどり着きます。

すべての p-進数 r は、次の形に表すことができる。

$$r = \cdots + a_m \times p^m + \cdots + a_1 \times p + a_0 + \frac{a_{-1}}{p} + \frac{a_{-2}}{p^2} + \cdots \frac{a_{-n}}{p^n} \tag{11}$$

ここで $\cdots, a_m, \cdots, a_0, a_{-1}, \cdots, a_{-n}$ は $0, 1, 2, \cdots, p-1$ のいずれかである。このとき、$r = (\cdots a_m \cdots a_1 a_0 . a_{-1} \cdots a_{-n})_{p\text{-進}}$ と書いて、これを r の p-進法による表記という。

式 (11) も無限和の形をしていますが、無限の数は **左側へ** 続いていることに注意してください。p-進数の遠近感ではこのような無限なら和を考えることができるのです。結果として、p-進数の小数展開では数字が **左側に無限に続いてゆく** ことになりました。例を挙げてみましょう。2-進世界では次の式が成り立ちます。

$$(\cdots 111111.)_{2\text{-進}} = -1$$

（右端の . は小数点です。）これは式 (1) の言い換えです。同じように式 (6) を小数で書くと、 5-進数における次の式になります。

$$(\cdots 313131.)_{5\text{-進}} = -\frac{2}{3} \tag{12}$$

この式の両辺を $5 = 1 \times 5 + 0 = (10)_{5\text{-進}}$ で割ると次のようになります。小数点がずれてゆく様子を観察してください。

$$(\cdots 31313.1)_{5\text{-進}} = -\frac{2}{15}$$

注. 式 (10) においては、r が **正の** 実数という制限が付いていましたが、式 (11) においてはそのような制限はありません。そもそも、p-進数には正・負の区別がないのでした。また、実数を十進小数に展開する方法は必ずしも一通りとは限りません。その例が

$$1.00000000 \cdots = 0.99999999 \cdots$$

という等式です。一方で、p-進数を p-進小数に展開する方法は一通りしかありません。ですから、これによって p-進数の定義を与えることもできます。

8 5-進世界の算術

実数世界で小数どうしの四則演算をする方法（筆算）は、小学校で学んで以来よくなじんでいます。この方法は p-進世界でも（ほぼ）同じように通用します。こ

の節では 5-進世界における小数の計算を、例を挙げて説明します。すこし面倒ですが、ここまで読み進まれた方はぜひ根気を出して追ってみてください。

まず足し算の例です。

$$\begin{array}{rr} & \cdots\cdots 000000002 \\ +) & \cdots\cdots 444444443 \\ \hline & \cdots\cdots 000000000 \end{array}$$

（ここではすべての数が 5-進法で表記してあります。）この計算は次のようになされます。まず、一番右側の数 2 と 3 を加えます。すると $2+3=5=(10)_{5\text{-進}}$ となります。そこで 1 が繰り上がったことを記憶した上で 0 を一番右側の欄に記します。つぎに、上段の右から二番目の数 0 と、その下の 4 を加え、さらに先ほど繰り上りが出た 1 を加えます。すると、$0+4+1=5=(10)_{5\text{-進}}$ です。1 が繰り上がったことを記憶した上で 0 を右側から二文字目の欄に記します。さて、上段の右から三番目の数 0 とその下の 4 と繰り上りの 1 を加えると、また $0+4+1=5=(10)_{5\text{-進}}$ です。そこで 0 を右側から三文字目の欄に記します。以下、繰り返しです。この計算から次のことが分かりました。

$$2+(\cdots 444444443)_{5\text{-進}}=0$$

言い換えると、次のようになります。

$$(\cdots 444444443)_{5\text{-進}}=-2 \tag{13}$$

次に掛け算をやってみましょう。

$$\begin{array}{rr} & \cdots\cdots 131313131 \\ \times) & \cdots\cdots 000000003 \\ \hline & \cdots\cdots 444444443 \end{array}$$

計算の方法は足し算と同じです。まず右端の 1 と 3 を掛けると、$1\times 3=3=(3)_{5\text{-進}}$ なので（繰り上がりも出ずに）右端に 3 を書き入れます。次に、上段右から二文字目の 3 と 3 を掛け合わせると、$3\times 3=9=1\times 5+4=(14)_{5\text{-進}}$ です。1 が繰り上がったことを記憶した上で 4 を右から二文字目の欄に記します。つぎに上段右から三番目の数 1 と 3 を掛けて、繰り上りの 1 を加えると、$3+1=4=(4)_{5\text{-進}}$

です。そこで 4 を右側から三文字目の欄に記します。以下、繰り返しです。この計算から次のことが分かりました。

$$3 \times (\cdots 131313131)_{5\text{-進}} = (\cdots 444444443)_{5\text{-進}}$$

式 (13) をみると、右辺は -2 です。すると、これは式 (12) に他なりません。式 (12) は式 (6) の言い換えでしたから、式 (6) が証明できたことになります。

9　有理数の平方根

これまで実数と p-進数の話をしてきましたが、これらより基本的な数として**有理数**があります。（整数と整数の比で表せる数を有理数と呼びます。ですから $\frac{1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{3141}{1000}$ などが有理数です。）これまでの話で当然のことのようにして明記してきませんでしたが、有理数は実数でもあり、p-進数にもなっています。つまり、数の世界の間には次の関係があります。

$$\{\text{実数}\} \supset \{\text{有理数}\} \subset \{p\text{-進数}\}$$

この関係のうち、前半部分 $\{\text{実数}\} \supset \{\text{有理数}\}$ に注目します。有理数は実数でもあるわけですが、逆に有理数ではない実数はあるでしょうか。答えは「有る」です。2 の平方根 $\sqrt{2}$ は有理数ではないのです。（次の節ですこし風変わりな証明を紹介します。）

この事実はいまから二千五百年くらい前に、ギリシャのピタゴラス学派によって発見されました。この発見はピタゴラスにとって驚愕だったようで、学派の外には漏らすことを禁止までしたのですが、こっそり話してしまったヒッパソスという人が「神の怒りにふれて溺死した」という伝説が残っています。「崖から海に突き落とされた」という異説もあるそうです。いずれにしても、人が死ぬほど大変なことだったようです。

この事実のよく知られている証明は、背理法の典型的な例として現代の高校の（あるいは中学の）数学の教科書にも載っています。一風変わった論法なので、よかれ悪しかれ強い印象を受けた人も多いようです。ハーディーという数学者は、初等数学の中でひときわ美しい二つの証明うちのひとつとしてこの証明を挙げています。（もう一つは素数が無限にあることの証明です。）一方で、私は「納得できない」とか「屁理屈だ」という感想も、複数の友人から聞きました。ちなみに、『オイディプス王』などのギリシャ悲劇が書かれたのはほぼ同時代です。二千五百年前のギリシャ人の発見や戯曲が現代の日本においても現役で学校や劇場で用いられていること、これこそ驚愕に値すると私は思います。

ところで、そもそも $\sqrt{2}$ とは何であったかというと、「自乗すると 2 になる数」のことです。つまり $x^2 = 2$ を満たす数です。（正確にはそのうち正のものです。）それでは「自乗すると -2 になる実数」は存在するでしょうか。存在しません。なぜなら、どんな実数も自乗したら正もしくはゼロになるからです。このように $\sqrt{-2}$ が実数でないことはたちどころに分かってしまいます。

先に述べた「有理数は実数でもある」ということを反対側から述べると（対偶をとると）「実数でない数は有理数でもない」となります。ですから、$\sqrt{-2}$ が実数でないということは $\sqrt{-2}$ が有理数でもないということを導きます。$\sqrt{2}$ の場合とは違い、この事実を発見しても誰も感動しなかったようで、発見者の名前すら伝わっていません。当たり前だと思われているのでしょう。このことは次の節でもう一度ふれます。

10　有理数の平方根と p-進数

しかし p-進数の世界では事情が変わってきます。例えば $\sqrt{-2}$ は 3-進数の世界に入っているのです。始めの数桁を書くと次のようになります。

$$\sqrt{-2} = (\cdots 200211)_{3\text{-進}}, \qquad (\cdots 022012)_{3\text{-進}}$$

注. p-進数の小数計算の節を読んだ方は、ぜひこれらがちゃんと -2 の平方根であることを確認してみてください。それには

$$(\cdots 200211)_{3\text{-進}} \times (\cdots 200211)_{3\text{-進}} + 2 = 0$$
$$(\cdots 022012)_{3\text{-進}} \times (\cdots 022012)_{3\text{-進}} + 2 = 0$$

を計算すればいいのです。余力があったら次の桁がどんな数字になるか考えてみてください。なお、平方根がふたつ存在する事情は、実数の場合でも正と負の二つがあったのと同様です。3-進数の世界でも、この二つはちゃんと「正と負」になっています。つまり、

$$(\cdots 200211)_{3\text{-進}} + (\cdots 022012)_{3\text{-進}} = 0$$

が成り立っています。小数を用いた計算をして、確認してみて下さい。

反対に $\sqrt{2}$ は 3-進数の世界には入っていません。この事実の証明は、この節の最後に注として載せておきます。（やはり p-進数の小数を使います。その節をとばしてしまった方、この証明に興味を持たれたらそこを読み返してから挑戦してください。）これまで述べたことをまとめると次のようになります。

	実数世界	3-進世界
$\sqrt{2}$	存在	非存在
$\sqrt{-2}$	非存在	存在

実数の世界に $\sqrt{2}$ が存在して $\sqrt{-2}$ が存在しないことは極めて簡単に分かってしまうことでした。一方で 3-進数の世界での $\sqrt{2}$ や $\sqrt{-2}$ の存在・非存在をは難しいと感じたかもしれません。しかし、おそらくそれは我々が 3-進世界に慣れていないからです。3-進世界に生まれ落ち、3-進世界の小学校で 3-進数の小数を学んできた 3-進人間にとっては（おそらく）当たり前のことなのです。（逆に、3-進人間が「実数世界に $\sqrt{2}, \sqrt{-2}$ が存在するか」ということを考えると難しく感じるでしょう。）つまり、実数人間は実数世界のこと、3-進人間は 3-進世界のことなら相当簡単に分かってしまう能力を持っているのです。

それでは、**有理数**についての問題を考えるとき、実数人間と 3-進人間のどちらが有利でしょうか。これらの世界の間の関係を思い出してください。

$$\{\text{実数}\} \supset \{\text{有理数}\} \subset \{3\text{-進数}\}$$

$\sqrt{2}$ と $\sqrt{-2}$ はどちらも有理数ではありません。このうち、$\sqrt{2}$ が有理数でないことを知るには 3-進人間の方が有利な立場にあります。それは、3-進人間にとっては次のように推論できるからです。

- $\sqrt{2}$ は 3-進数でない（3-進人間にとっては簡単）
- 「3-進数でなければ有理数でもない」という関係より $\sqrt{2}$ は有理数でもない

実数人間にはこの推論は使えません。なぜなら、$\sqrt{2}$ は実数世界には存在するからです。実際、実数世界においては $\sqrt{2}$ が有理数でないということは二千五百年後に地球の反対の国の教科書に載るほどの大発見なのでした。

他方、実数人間にとっては $\sqrt{-2}$ が有理数でないということは、ごく簡単に分かることでした。その推論を復習すると、上でみた 3-進人間の推論と全く同様です。

- $\sqrt{-2}$ は実数でない（実数人間にとっては簡単）
- 「実数でなければ有理数でもない」という関係より $\sqrt{-2}$ は有理数でない

$\sqrt{-2}$ は 3-進世界には存在するから 3-進人間にはこの推論が使えません。だから、3-進世界においては $\sqrt{-2}$ が有理数でないという事実の発見には（3-進世界の）ピタゴラス並の天才が必要とされ、その発見は人が死んだりするような大事件になったことでしょう。まとめると次の表のようになります。

	実数世界	3-進世界
$\sqrt{2}$ が有理数でないこと	難しい	易しい
$\sqrt{-2}$ が有理数でないこと	易しい	難しい

注. $\sqrt{2}$ が 3-進数でないことを証明します。まず $\sqrt{2}$ が 3-進数だと仮定して、3-進小数で表します。

$$\sqrt{2} = (\cdots a_m \cdots a_1 a_0 . a_{-1} \cdots a_{-n})_{3\text{-進}}$$

ここで $\cdots, a_m, \cdots, a_0, a_{-1}, \cdots, a_{-n}$ は $0, 1, 2$ のいずれかです。ただし、a_{-n} はゼロではないとします。$a_{-n} = 0$ だった場合はその数字を削ってしまい、$a_{-(n-1)}$ までで小数展開を終わりにすればよいからです。($n < 0$ のこともありえます。)

さて、この式の両辺を自乗してみましょう。左辺はもちろん 2 になります。右辺を計算するとどうなるでしょうか。全部の計算はできませんが、一番右側の桁がどうなるかは分かります。というのは、a_{-n} は 1 か 2 ですので、その両方の可能性をみてみると

$$1 \times 1 = 1, \qquad 2 \times 2 = 4 = 1 \times 3 + 1 = (11)_{3\text{-進}}$$

となり、どちらの場合でも一番右側の桁は 1 になります。(後者の場合、繰り上がりがあるけれど、それは一番右側の桁には影響を与えません。) すると、できあがった式は次のようになります。(ここで、右辺の 1 は、小数点以下 $2n$ 桁目に位取りします。)

$$2 = (\cdots\cdots 1)_{3\text{-進}}$$

両辺の一番右側の数字を比較すれば矛盾となります。

11 世界の違いを越えて

前節の表をみると、実数人間と 3-進人間では難しいことと易しいことが正反対になっていることが分かります。ということは、実数人間がある問題(例えば「$\sqrt{2}$ は有理数か?」)を難しいと感じたとき、3-進人間に聞いたら簡単に教えてくれることがありうるわけです。もちろんその逆もあり得ます。ここで、他にも 2-進世界や 17-進世界など、たくさんの数の世界があることを思い出しましょう。これらの世界の人がみんなで力を合わせれば、もっとずっと難しい問題でも、簡単に解けてしまうのではないでしょうか。

「ずっと難しい問題」の例を挙げてみます。次の方程式を満たす有理数の組 (x, y) はあるでしょうか?

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{14}$$

$$-3x^2 - 4y^2 = 1 \tag{15}$$

$$2x^2 + 5y^2 = 1 \tag{16}$$

式 (14) については、答えは「有る」です。例えば $(x, y) = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ が答えです。他にも $(x, y) = (\frac{15}{17}, \frac{8}{17})$ など、無数の答えがあります。また、式 (15) については、

答えは「無い」です。なぜなら左辺は必ず 0 以下の数になるからです。実数世界に解がない、だから有理数の解もないという、例の論法です。

では式 (16) についてはどうでしょう。実数世界には解があります。例えば $(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ が答えになってしまいます。ですが、これはもちろん有理数の解ではありませんから、これだけでは有理数の解については何も分かりません。実は、2-進数や 5-進数の世界では式 (16) には解が存在しません。ここにその証明は書けませんが、2-進人間や 5-進人間は簡単にこの事実が分かってしまうのです。(ちょうど実数人間は簡単に式 (15) のことが分かったように。) すると「p-進数でなければ有理数でもない」という例の方法で、式 (16) には有理数の解もないということが結論できます。

この方法で結論を出すには 2-進人間か 5-進人間の協力がどうしても必要です。というのは、3-進数の世界や 7-進数の世界にも式 (16) には解があるからです。なんと、2-進数と 5-進数の世界の他はすべての数の世界に解があるのです。無数にある数の世界のうち、方程式 (16) に有理数の解が無いという答えを出せるのはたった二つの世界だけなのです。こう考えると、どの数の世界もおろそかにできないことが分かるでしょう。

次の定理はハッセにより証明されました。

有理数 a,b を係数に持つ方程式

$$(*) \qquad ax^2+by^2=1$$

に対して、次の二条件は同値である。

1. 方程式 $(*)$ を満たす有理数 x,y が存在する。
2. 方程式 $(*)$ を満たす実数 x,y が存在する。さらに、p がどんな素数であっても方程式 $(*)$ を満たす p-進数 x,y が存在する。

世にも美しいこの定理にも限界があります。それは二次式にしか適用できないということです。実はセルマーという数学者が次のことを発見しました。

次の方程式に対して次の二つが成立する。

$$(**) \qquad \frac{3}{5}x^3 + \frac{4}{5}y^3 = 1$$

1. 方程式 $(**)$ を満たす有理数 x, y は存在しない。
2. 方程式 $(**)$ を満たす実数 x, y が存在する。さらに、p がどんな素数であっても方程式 $(**)$ を満たす p-進数 x, y が存在する。

このように、三次式になると事態が大きく変わってしまい、有理数の解の存在を判定する方法は（近年大きな発展がみられるものの）まだ見つかっていません。しかし、三次やそれ以上の次数の方程式についても、実数世界とすべての p-進世界が力を合わせれば（力の合わせ方がもっと難しくなるのですが）、解の様子についてとても深いことまで分かると、多くの数学者は信じて研究を進めています。

12 付録： 等比数列の和

本文で何度も使った「等比数列の和の公式」は次の公式です：

r を 1 と異なる定数とするとき、次の式が成り立つ：

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \tag{17}$$

この式が成り立つ理由を簡単に説明します。次の計算をみてください。

$$\begin{aligned}
&(1-r)(1 + r + r^2 + \cdots + r^n) \\
&\quad = (1 + r + r^2 + \cdots + r^n) - r(1 + r + r^2 + \cdots + r^n) \\
&\quad = (1 + r + r^2 + \cdots + r^n) - (r + r^2 + \cdots + r^{n+1}) \\
&\quad = 1 + (r + r^2 + \cdots + r^n) - (r + r^2 + \cdots + r^n) - r^{n+1} \\
&\quad = 1 - r^{n+1}
\end{aligned}$$

この両辺を $1 - r$ で割ったものが上記の公式(17) です。

この式 (17) に $r = 1/2$ を代入してみましょう。すると

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$$

となって式 (3) が証明できます。式 (4) なども同様に示すことができます。

13　参考文献

p-進数について本格的に勉強するには、次の本をお勧めします。第二章が p-進数の解説です。この部分は比較的少ない予備知識でもある程度読めると思います。また、ハッセの定理の証明も載っています。

『数論 I - Fermat の夢と類体論』
加藤和也、黒川信重、斎藤毅（著）岩波書店

無限和の問題は実数の場合でも十分やっかいな問題です。例えば、アキレスと亀のパラドックスは式 (2) をどう捉えるかという問題に他なりません。この点について書かれた本はとてもたくさんあります。古典的な本と最近の本をひとつづつ紹介します。

『零の発見 - 数学の生い立ち』
吉田洋一（著）岩波新書

『数学が生まれる物語（２） 数の世界』
志賀浩二（著）岩波書店

本文中でふれた、ハーディという数学者の発言は次の本にあります。一流の数学者による世界観・人生観の告白です。数学とはどういうものか、数学者がどのように世界をみているか、というようなことに興味を引かれる方にお勧めします。

『ある数学者の生涯と弁明』
ハーディ、スノー (著)、柳生孝昭 (翻訳) シュプリンガー

〒 305-8571 つくば市天王台 1-1-1 筑波大学数学系
山崎 隆雄
ytakao@math.tsukuba.ac.jp