Jacobian variety and Integrable system
— after Mumford, Beauville and Vanhaecke

井上 玲（東大・理） 小西 由紀子（東大・数理） 山崎 隆雄（東北大・理）

本講演の内容は次の図式で模式的にまとめられる：

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Mumford 系} & \xrightarrow{\text{変種}} & \text{even Mumford 系 (Vanhaecke)} & & \\
{\scriptstyle\text{拡張}}\downarrow & \Box & \downarrow & & \\
\text{Beauville の系} & \longrightarrow & \text{新しい系 } N_c/G & \subset & \text{新しい系 } M/G.
\end{array}$$

Beauville の系. [B] で導入された代数的完全可積分系を復習する。自然数 r, d を固定し、

(1) $$M = \{A(x) = (a_{ij}(x)) \in M_r(\mathbb{C}[x]) \mid \deg(a_{ij}) \le d\}$$

と置く。M はアフィン空間 $\mathbb{A}^{r^2(d+1)}$ と同型な代数多様体と見なせる。ここには $G = PGL_r(\mathbb{C})$ が共役で作用する。商多様体 M/G には（複数の）ポアソン構造を入れることが出来る。

(2) $$P(x, y) = y^r + s_1(x)y^{r-1} + \cdots + s_r(x) \qquad s_i(x) \in \mathbb{C}[x],\ \deg s_i \le di\ (i = 1, \cdots r)$$

という形の多項式 $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ に対し、$M_P = \{A(x) \in M \mid \det(y \cdot \mathbb{I}_r - A(x)) = P(x, y)\}$ は G の作用で安定な M の部分多様体である。方程式 $P(x, y) = 0$ が定める代数曲線を C_P とする。($\mathbb{P}^1$ の r 重被覆と見る。）generic な $P(x, y)$ に対して、次の同型が構成できる：

$$\Psi_P : M_P/G \cong J_P \setminus \Theta_P \qquad (J_P \text{ は } C_P \text{ のヤコビ多様体, } \Theta_P \text{ は } J_P \text{ のテータ因子}).$$

J_P は $g = \frac{1}{2}(r-1)(rd-2)$ 次元の複素トーラスだから、その上に g 個の可換で独立な不変ベクトル場がある。M 上のベクトル場 $D_1, \cdots, D_g$ で、次の性質を持つものが構成できる：

(a) どの点 $A(x) \in M$ に於いても $D_1, \cdots, D_g$ は $M_{\det(y \cdot \mathbb{I}_r - A(x))}$ に接する。
(b) 射影 $M \to M/G$ によって $D_1, \cdots, D_g$ は M/G 上のハミルトン・ベクトル場を導く。
(c) generic な P に対し (b) のベクトル場は Ψ_P で J_P 上の独立な不変ベクトル場へ移される。

等位集合 M_P がアーベル多様体（つまり、単にトーラスであるだけでなく複素解析多様体の構造を持つ）の開部分多様体であるという意味で、この力学系は代数的完全可積分系である。なお、ベクトル場 $D_1, \cdots, D_g$ は、適当な $i \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}$ により

(3) $$\dot{A}(x) = \frac{1}{x-a}[A(a)^i, A(x)]$$

と簡明に Lax 表示される。（ここでアフィン空間 M の接空間を M 自身と同一視した。）

Mumford 系との関係. M の閉部分多様体で M/G の完全代表系になるものを上手く取ることで、商空間を経由しない具体的な力学系の表示が可能である。（代表系へ制限することにより、ベクトル場の表示は煩雑となる。代表系の取り方は [DM]、ベクトル場の表示は [F] を参照。）$r = 2$ のとき、代表系によるこの系の記述は Mumford により古くから研究されていた [M]。

新しい系 M/G の構成. （この節の内容については [IKY §2-3] を参照。）Beauville の系の変種として新しい系を構成する。まず、M の定義 (1) を

$$M = \left\{ A(x) = (a_{ij}(x)) \in M_r(\mathbb{C}[x]) \;\middle|\; \begin{matrix} \deg a_{11} \le d,\ \deg a_{1j} \le d+1, \\ \deg a_{i1} \le d-1,\ \deg a_{ij} \le d \end{matrix} \quad (2 \le i, j \le r) \right\} \tag{4}$$

と変更する。ここには次の群が共役で作用する：

$$G = \left\{ g(x) = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\vec{b}_1 x + {}^t\vec{b}_0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| B \in GL_{r-1}(\mathbb{C}), \quad \vec{b}_1, \vec{b}_0 \in \mathbb{C}^{r-1} \right\}.$$

M/G には（複数の）ポアソン構造を入れることが出来る。(2) と同じ形の $P(x,y)$ に対し、M_P, C_P, J_P, Θ_P を前半と同様に定義する。代数曲線 C_P が $x = c \in \mathbb{P}^1$ で不分岐のとき、その上にある C_P の点を $c_1, \cdots, c_r$ とする。generic な P に対して、次の同型が構成できる：

$$\Psi_P : M_P/G \cong J_P \setminus \Big(\bigcap_{i=1}^{r} (\Theta_P + [c_i - c_1]) \Big). \tag{5}$$

（ここで $\Theta_P + [c_i - c_1]$ は Θ_P を J_P の点 $[c_i - c_1]$ で平行移動したもの。右辺は実は c に依らない。）M の上には $g = \frac{1}{2}(r-1)(rd-2) = \dim J_P$ 個のベクトル場 $D_1, \cdots, D_g$ で、上記の性質 (a)-(c) を持つものが構成できる。これらも式 (3) と同じ簡明な Lax 表示を持つ。

新しい系 N_c/G と even Mumford 系. （この節の内容については [IKY §4] を参照。）M の閉部分多様体で M/G の完全代表系となるものは存在し得ない。これは、式 (5) の右辺がアフィンでないことから分かる。そこで M/G 全体の代表系を探すことは諦めて、その開被覆を取って考える。すなわち、$\mathbb{P}^1$ の点 c でパラメータ付けされた M の開部分多様体 N_c の族で次の性質を満たすものを構成する：

(i) 各 c に対し N_c は G の作用で安定。

(ii) generic な P と c に対し、Ψ_P の制限は次の同型を与える：

$$(N_c \cap M_P)/G \cong J_P \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{r} (\Theta_P + [c_i - c_1]) \Big).$$

(iii) $c^{(1)}, \cdots, c^{(g+1)} \in \mathbb{P}^1$ が相異なる点ならば $M = N_{c^{(1)}} \cup \cdots \cup N_{c^{(g+1)}}$.

同型 (ii) の右辺はアフィンとなる。（今度は c に依存する。）そこで、Beauville の系と同じように、N_c の閉部分多様体で N_c/G の完全代表系となるものを上手く取ることが可能となる。かくして、（商空間を経由せず、具体的に表示された）代数的完全可積分系を得ることが出来る。やはり、ベクトル場の表示は格段に煩雑となる。$r = 2$ のとき、この代表系による力学系の記述は Vanhaecke が研究してきた even Mumford 系 [V] に一致する。

References.

[B] A. Beauville, Acta. Math. **164**, 211–235 (1990).
[DM] R. Donagi and E. Markman, LNM **1620**, 1–119 (1996).
[F] B. Fu, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **337**, no. 2, 105–110 (2003).
[M] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta II* (Birkhäuser, 1984).
[IKY] R. Inoue, Y. Konishi, and T. Yamazaki, ArXiv: math-ph/0512033.
[V] P. Vanhaecke, LNM **1638** (2001).