

マンフォード系の退化ファイバーと有理関数解

井上 玲 (東大・理)

山崎 隆雄 (東北大・理)

Pol Vanhaecke (Poitiers 大)

マンフォード系は講義録 *Tata Lectures on Theta II* で詳しく扱われた有限次元の古典力学系であり、代数的完全可積分系の代表的な例である。はじめに、その性質を復習する。

g を自然数とする。マンフォード系の相空間は、次の形の Lax 行列の集合

$$\mathcal{M}_g = \left\{ l(x) = \begin{pmatrix} v(x) & w(x) \\ u(x) & -v(x) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}[x]) \mid \begin{array}{l} \deg(u) = g, \deg(v) \leq g-1, \\ \deg(w) = g+1; u, w \text{ はモニック} \end{array} \right\}$$

である。行列成分の多項式の係数を標準的な座標にとることで、 \mathcal{M}_g はアフィン空間 \mathbb{A}^{3g+1} と同型な代数多様体となる。 \mathcal{M}_g 上の関数 f_0, \dots, f_{2g} を

$$(*) \quad -\det l(x) = x^{2g+1} + f_{2g}x^{2g} + \dots + f_0$$

により定義する。 \mathcal{M}_g にはポアソン構造 $\{\cdot, \cdot\}$ が入る。 $2g+1$ 個の関数 f_0, \dots, f_{2g+1} のうち $g+1$ 個はカシミール元 (すなわち $\{f_i, \cdot\} = 0$ が成り立つ) で、残りの g 個に付随するハミルトンベクトル場 D_1, \dots, D_g は可換で独立な時間発展を定める。特に f_0, \dots, f_{2g+1} は保存量である。(ポアソン構造の取り方には任意性があり、その選択によって f_i がカシミール元となるような i は変化する。ただし、ベクトル場 D_1, \dots, D_g はポアソン構造の選択に依存しない。) 十分な数の保存量が存在するという意味でマンフォード系は「完全可積分」であるが、より強く「代数的」完全可積分でもあることを次の段落で説明する。

$2g+1$ 次のモニックな多項式 $f(x)$ に対し、等位集合を

$$\mathcal{M}_{g,f} = \{l(x) \in \mathcal{M}_g \mid -\det l(x) = f(x)\} \subset \mathcal{M}_g$$

と定める。これは (*) が定めるモーメント写像 $\mathcal{M}_g \rightarrow \mathbb{C}[x]$ のファイバーとも定義できる。ベクトル場 D_1, \dots, D_g は $\mathcal{M}_{g,f}$ に接しているので、積分多様体は必ず $\mathcal{M}_{g,f}$ に含まれる。 $f(x)$ が重根を持たなければ両者は一致する。実際、 $f(x)$ が重根を持たないとき等位集合とベクトル場 D_1, \dots, D_g は次の (1) (2) のように記述される。スペクトル曲線 C_f を $y^2 = f(x)$ で定義されるアフィン代数曲線に無限遠点を (一点) 添加して得られる完備代数曲線を C_f として定義する。 $f(x)$ が重根を持たないとき、 C_f は非特異な超楕円曲線である。

- (1) $\mathcal{M}_{g,f}$ は C_f のヤコビ多様体 J_f のザリスキ開集合と同型である。(補集合はテータ因子の平行移動と一致する。)

(2) $\mathcal{M}_{g,f}$ 上のベクトル場 D_1, \dots, D_g は J_f 上で線形化される。すなわち、上の同型によって J_f 上の不変ベクトル場に移る。

なお、二つ目の性質から、テータ関数により表されるマンフォード系の解が構成できる。さらに、マンフォード系は KdV 方程式と直接の繋がりをもつため、テータ関数で表される KdV 方程式の解も与えられる。

上記の事実 (1) (2) においては $f(x)$ が重根を持たないという仮定が本質的である。 $f(x)$ が重根を持つ場合、積分多様体は $\mathcal{M}_{g,f}$ に含まれるが一致するとは限らない。つまり、 $\mathcal{M}_{g,f}$ が複数の積分多様体に分かれることがある。 $f(x)$ の重根の重複度がちょうど 2 の場合は、等位集合 $\mathcal{M}_{g,f}$ 内の最大次元の積分多様体 $\mathcal{M}_{g,f}^0$ (ザリスキ開集合となる) に対して上記の事実 (1) (2) の類似が成り立つ。その際、ヤコビ多様体 J_f はセールの教科書 *Algebraic groups and class fields* で解説されている「一般化されたヤコビ多様体 J'_f 」で置き換えられる。マンフォードの本では、 $f(x)$ が重複度 2 の重根を g 個持つとき (すなわち C_f が通常二重点を g 個持つ特異有理曲線となる場合) が特に詳しく考察されている。このとき J'_f は乗法群 \mathbb{C}^* の g 個の直積と同型となり、指数関数により表されるマンフォード系の解が構成できる。さらに、上と同じ方法により指数関数で表される KdV 方程式の解 (ソリトン解) も与えられる。

本講演ではより極端なケースとして $f(x)$ が根を一つだけ持つ場合、すなわち $f(x) = x^{2g+1}$ のような場合を考える。セールの理論では、このような曲線 C_f に対しては ($g = 1$ のときを除き) 一般化されたヤコビ多様体が定義されていない。われわれの結果は次の通りである。

- 上のような曲線 C_f に対し、一般化されたヤコビ多様体の代替物 J''_f を構成した。
- $\mathcal{M}_{g,f}$ 内の最大次元の積分多様体 $\mathcal{M}_{g,f}^0$ が J''_f のザリスキ開集合と同型となることを示した。
- $\mathcal{M}_{g,f}$ 上のベクトル場 D_1, \dots, D_g が J''_f 上で線形化されることを示した。

この場合 J''_f は加法群 \mathbb{C} の g 個の直積と同型であり、有理関数により表されるマンフォード系の解が構成できる。それをを用いて KdV 方程式の有理関数解も得られる。さらに、 $\mathcal{M}_{g,f}$ 内の次元が低い積分多様体の構造を、自由度の低いマンフォード系 \mathcal{M}_{g-1} と関連づけて解析した。