

訳者あとがき

本書は、トルケル・フランセーン著 Godel's Theorem: An Incomplete Guide to its Use and Abuse (A K Peters, 2005) の全訳である。

原書は出版されるやいなや、この分野の専門家や関係者たちから絶賛されて、フランセーンはゲーデル生誕 100 年を祝うウィーンでの会議『真理の地平』の招待講演者に選ばれた。ところが不遇にも、骨癌に冒されていた著者は、ゲーデルの誕生記念日 (2006 年 4 月 28 日) を目前の同年 4 月 19 日に、惜しまれて亡くなっている。

ゲーデルといえば、かつて TIME 誌が 20 世紀の偉大な科学者・発明家 20 人 (組) の一人にあげたほど、欧米では知名度の高い人物である。本書の序で、フランセーンが、インターネットのどんなニュースグループも遅かれ早かれ誰かがゲーデルの不完全性定理を持ち出すと語っているように、ゲーデルの名やその定理の引用は欧米の知的会話にかなりの頻度で現れる。そして、本書の目的は、まさにそういう一般的な引用においての間違いを正すことにあるのだ。欧米知識人にはとりあえず備えておきたい識見を与えてくれる。

そこへもって本書では、アメリカ文化に浸っている人にとって刺激的な例文が次々と現れる。たとえば、「ランドの哲学は矛盾しているか不完全である」という例文が突如現れれば、ドキッとする人も多いだろう。原書には写真や図解も一切ないのだが、こういう刺激的な文がイラストの代役となり、読者を飽きさせない。また不思議なことに、日本語のローマ字文も登場する。第 3 章のはじめに「watashi wa neko dayo」といった文章がある。

だが、日本の読者にとっては、アメリカで熱狂的ファンの多い女流作家アイン・ランドの名も「私は猫だよ」の日本語文も、刺激にもユーモアにもならないだろう。そこで、日本語版作成にあたって、原書の軽妙さを保ちつつ、原著書が真に伝えたい内容を日本の読者にうまく伝えるにはどうしたらいいかと苦心惨憺した。その結論、イラストや図解などをたくさん挿入して、日本的な体裁に手直しすることにした。原書にない脚注や文字飾りや網掛けなどもうるさくならない程度に加えた。入れ物の形が多少変わっても、内容は全く同じであるから、読者が原書の真のメッセージを少しでも容易に受け取れるようになっていれば幸いである。逆に、この体裁が別の誤謬を生じるようなことがあれば、その責めは挙げて訳者に帰する。

さて、さまざまな話題や誤解を生むゲーデルの定理は、そもそもどのような主張だったのか？ 1931 年のゲーデルのドイツ語原論文は、厳密に言えば、形式体系 P の拡大において決定不能な命題の存在を示しただけで、一般の不完全性定理の主張には到達していない。ゲーデル自身が、不完全性定理について最も明確に述べているのは、本人公認の英語訳に附記された次の文言 (1963 年 8 月 28 日) である。

ある程度の有限的算術を含むどんな無矛盾な形式体系にも決定不能な算術命題が存在し、さらにそのような体系の無矛盾性はその体系においては証明できない。

この定理を「決定不能な算術命題が存在する」という前半部と、「無矛盾性はその体系においては証明できない」という後半部に分け、前半を第一不完全性定理、後半を第二不完全性定理と呼ぶことが多い。ゲーデルは慎重に慎重を重ねて言葉を選んでいたので、この表現を安易に変えようとする、必ず不具合を生じる。実際、この定理に対する誤解の多

くはそのどれかの条件を落とすことで生じると、本書は考察する。とくに、フランセーンが注目するのは、「有限的算術を含む」という条件を落とすことによる誤解である。なお、有限的算術は、本書では初等的算術と呼ばれることが多いのだが、要するに自然数についての算数計算が何らかの形でおこなえることを意味する。

「ある程度の有限的算術を含む」という条件を、「十分大きな」「十分複雑な」「十分表現力のある」などといった曖昧な条件に置き換える悪癖が一般向けの解説などに横行している。曖昧というよりも、これは本当は間違いであって、大きな理論で完全なものもあれば、小さな理論で不完全なものもあることが、本書中でいくつかの実例によって指摘されている(2.2節, 8.1節など)。

しかし、さらに見落やすい点は、不完全性定理の前提に算術の条件があるだけでなく、結論部にも算術の条件が掛かっていることである。つまり、第一不完全性定理は、算術を含む体系がその算術部分で不完全であるという主張であり、含まれている算術の外側が完全か不完全かはこの定理は何も語っていないのである。

これによってフランセーンにばっさり切り捨てられるのが、高名な物理学者のフリーマン・ダイソンとスティーヴン・ホーキングの論説である。彼らは、万物理論の可能性を否定するのにゲーデルの定理を持ち出したのだが、仮に物理理論に不完全性定理が適用できたとしても、不完全性はその算術部分に見つかるだけで、その理論が物理世界の記述として完全か不完全かは別問題なのである(4.4節)。

第二不完全性定理の場合、算術に関する仮定はさらに本質的である。その結論部は無矛盾性が証明できないという主張であるが、より詳しくは、無矛盾性を表していると自然に解釈できるような命題を定義して、その命題の証明不可能性を言うことになる。そういう解釈をとまなう命題を作るためには第一定理以上に強い算術の仮定が必要であり、さらに、何が自然な表現かを問題にする議論もある。詳細は本文に委ねるが、フランセーンは「無矛盾性の証明不可能性は本当のところ“無矛盾性の主張不可能性”である」と述べている(5.1節, 6.4節)。

第二不完全性定理を「どんな整合的機械システムについても、それが整合的であることはそのシステム内で証明できない」と言い換えてみよう。これを使って、われわれ人間が(整合的)機械ではないことを導きだす議論がいくつかあるが、大概何らかの論理的ギャップを含んでいる。例えば、このような第二定理を証明できる整合的機械があるとしてもよいが、その機械でも「自らの整合性を証明できない」ことを証明できるわけではない。これに関連しては、第6章にルーカスやペンローズによる種々の議論とその問題点が紹介されている。

以上のように、不完全性定理の誤解や誤用の多くが、この定理の用いる際に「ある程度の算術を含む」という条件を落とすことに起因している。では、この条件そのものを数学的に、計算可能性理論を用いて、分析すると何が導けるだろうか？ フランセーンが繰り返し強調する事実は、彼が「ゴールドバッハ類」と呼ぶ(ふつう計算可能理論では、 Π_1^0 と呼ぶ)形の言明については、(算術を含む)どんな無矛盾な体系においても証明できさえすれば、真であることがわかるというものである。

計算可能性理論は、そもそもゲーデルの定理の証明から派生したものだが、逆にこの定理を観察する際にも多くの示唆を与えてくれる。本書では、専門家以外はまだほとんど知られていないようなこの分野の事実のいくつかを分かりやすく紹介している。

著者のフランセーンは、スウェーデンのルレオ工科大学の計算機科学・電子工学科でプログラミングの講義を担当していたが、研究者としての出発点は数理哲学者である。ストックホルム大学でD. プラヴィッツ教授に師事し、「証明可能性と真理」という論文で1987年に哲学の博士号を取得している。この論文は、数学の存在論について論じたものであるが、本書にしばしば現れる「ゴールドバッハの予想が<真>であることは、2より大きな偶数は2つの素数の和で表せるということである」といったフレーズもここですでに使われている。

学位取得後はあまり目立つ研究活動はしていなかったが、本書の前年に書かれた著書[1]と論文[2]によって突然学界に返り咲き、注目を集めるようになった。

[1] Inexhaustibility. A non-exhaustive treatment. Lecture Notes in Logic vol. 16, Association for Symbolic Logic, A K Peters, 2004.

[2] Transfinite progressions: a second look at completeness. Bull. Symbolic Logic 10 (2004), no. 3, 367--389.

これらの研究テーマは、本書でもところどころで議論されている理論の拡大列に関するものである。もともとは、ゲーデルの原論文の脚注48aに書かれたアイデアから出発して、その後チューリングがチャーチのもとで書いた学位論文のなかでこれを定式化し、さらにソロモン・フェファーマンによって再検討された。フランセーンの仕事はそれらに続く、いわば数学基礎論本道の研究であった。このような優れた研究を中絶せざるを得なくなったのは、故人はもとより、この分野の多くの研究者が惜しむところである。

生前の彼のウェブページには、倫理学者のスピノザや禅僧の盤珪永琢の言葉が掲げられ、ネット上での空しい口論を戒める彼の深慮が表れていた。本書についても、ゲーデルの定理とその関連事実について、数学的に正しい説明を与え、かつ数学外の誤用を冷静に正すという以上に、論争を煽るようなところは決してない。また、他人の揚げ足を取ったり、逆に故意に無視したり、素人の間違いを蔑むようなところもない。

たまたまこの原書と同じ頃書店に並んだ米国の女性哲学者によるゲーデル関係の本が、専門誌の書評でひどく叩かれていた。その本は全体として読み易く、一般読者からの評判は上々であったが、証明の核である不動点定理のところに根本的な勘違いがあるのだ。同じような間違いは他の入門書でもときどき見かけるから、当然フランセーンもそうした非専門家のミスはたくさん知っていただろう（一般の哲学者は、論理の専門家ではない）。しかし、本書では、侮蔑的で他書を批判するようなところはまったくない。ときどき百科事典の解説をからかうのは、相手がそれだけの権威を与えられているからだ。

本書の全体構成を見ておこう。本書は、8つの章で構成されている。最初の章は、2つの不完全性定理の簡単な説明と、ゲーデルの人生や他の仕事について最小限の紹介である。そして、第2章は、不完全性定理をめぐる議論の概要であり、それは本書の要約でもある。特徴としては、2.1節で算術とは何かについて、かなり丁寧かつ具体的に説明していることである。珍しい導入の仕方だが、不完全性定理の主張を数学的に正しく理解するためには、うまい布石になっている。そのあと、第一、第二不完全性定理に関する様々な基本事

項が説明される。ほとんどが標準的なものであるが、2.7 節において、ゲーデルの証明がどこまで自己言及的かを分析しているのは、他書にない鋭い洞察である。その後、2.8 節ではゲーデルの定理がポストモダン的情勢を引き起こすというカドバニーの主張について、2.9 節ではルーカスの反機械論について簡単なコメントが述べられ、それらは後の章の詳しい議論の導入になっている。

第3章と本書最後の2つの章が、とくに数学色の強い部分である。第3章では、ゲーデルの証明を踏まえてチューリングらが始めた計算可能性理論の基本を解説し、それに基づいて第一不完全性の別証明が紹介される。章末にあるゲーデルの加速定理は、一般の方にはあまり知られていないと思うが、計算可能性理論の効力を示す興味深い事実である。

第4, 5, 6章は、ゲーデルの定理の「応用もどき」について検討する。主な内容はすでに上でも述べたものである。第4章は、第一不完全性定理が万物理論の否定など用いられる場合の問題点を扱う。第5章は、第二不完全性定理が導くと思われる懐疑論について議論する。この章では、数学的な話題として、レープの定理の説明もある。そして、第6章では、ルーカスとペンローズの反機械論について詳しく検討する。

第7章では、ゲーデルが不完全性定理を発見する前の年に証明した、1階論理の完全性について解説する。この定理は、「1階論理」とよばれる仕組み（ホワイトヘッド＝ラッセルの階型理論をヒルベルトが簡易化したもの）が、論理装置として改良の余地がないほど完成していることを示すものである。そして、論理装置が完成しているからこそ、その上に数学のさまざまな公理系を乗せることで、数学の形式理論が定式化されるというゲーデルの発想が生まれ、これが不完全性定理の発見の重要な背景にもなっている。完全性定理の証明の要所は、「無矛盾な理論はモデルをもつ」ことであり、この論法によってさまざまなモデルが構成できるようになり、それが今日の超準解析学などの発展につながった。

第8章のテーマの一つは、ランダム性である。ランダム性は定式化が難しい概念であり、計算可能性理論の概念を借りて厳密な定義が与えられるようになったのは、ここ二、三十年のことである。そして、ランダム性と不完全性定理を結びつけるいくつかの興味深い研究がチャイティンによっておこなわれている。チャイティンの数学的発見は素晴らしいのだが、彼は自分の研究を意味不明な比喻で語る。本書では、彼の数学と非数学をきちんと分けてうまく解説している。最後の8.3節では、巨大基数を仮定することで決定不能命題を決定しようという所謂「ゲーデル・プログラム」と、新しい算術独立命題を示したパリス＝ハーリントンの定理について説明している。

また補遺では、算術の形式体系の厳密な定義が与えられ、本書のキーワードである「ゴルドバッハ類」についても詳しく説明されている。

いま試みに、フランス・ベーコンの4つのイドラ説を用いて、ゲーデルの定理のさまざまな誤用を分類してみよう。イドラ（偶像）というのは、真理を正しく見ることを阻む偏見、ないしそれによって生じる虚偽のことで、ベーコンは4つの種類をあげている。まず、人類一般に共通な「種族のイドラ」。人間の悟性が陥りやすい間違っただけの傾向のことだ。たとえば、自分が思い付く有意義そうな体系がどれもこれも不完全であるならば、有意義な体系はすべて不完全であると思ひ込み、さらにその原因を定理か何かに帰着させようとする傾向は誰にもあるだろう(2.3節)。

次に、「洞窟のイドラ」は、各個人の境遇や習慣や教育等によって形成される偏見であり、いわば井の中の蛙の自説である。ゲーデルは、彼より先に「完全性定理」のパーツをすべて入手していたスコーレムが、それを「定理」として組み立てられなかった理由を、彼の「有限主義」へのこだわりの所為と述べている（1.2 節）。これからもわかるように、ゲーデル自身は少なくとも彼の 20 代においては、特定の思想に偏らず、純粋に数学的なモチベーションで研究を進めていた。したがって、不完全性定理を、たとえば「ヒルベルトのプログラム」の否定といった特定の思想面だけで捉えるのは洞窟のイドラといえよう（2.6 節および 5.2 節）。

われわれにとって、とくに重要なのが残りの 2 つだ。まず、言語の使用から生ずる「市場のイドラ」がある。ベーコンの言によれば、「人は自分の理性が言語を支配すると信じているが、言語が悟性を支配することもまた事実である」という。不完全性定理の主張に含まれる「矛盾」「完全」「体系(システム)」などの語は日常言語において多様な使われ方をしており、ゲーデルの定理がこれらのインフォーマルな意味と結びつけられてしまっても不思議はないとフランセーンは指摘する（1.1 節、第 4 章）。

最後に「劇場のイドラ」である。大別して、諸学説の脚色に起因するものと、論証の誤りから生じるものがあるが、ここで考量すべきは前者である。ベーコンは、哲学の学説も芝居の脚本と同じようだと言い切る。学説を唱える場合に、合理派や経験派の一方に偏ると洞窟のイドラがもたらされるが、中間的であろうとしても妄想や懐疑が入り込む危険がある。最も危ない例として、「迷信的哲学」や「アカタレプシア(不可知論)」を唱えるプラトン学派が批判される。迷信的哲学は反機械論(2.9 節、第 6 章)、アカタレプシアは懐疑論(2.8 節、第 5 章)に相応するであろうか。以上でうまい整理ができたとも思えないが、読者の考察の一助になれば幸いである。

謝辞省略。皆さん、どうもありがとう。