2013 年度・幾何学概論 B 演習　レポート問題の講評

担当：見村 万佐人

第 1 回レポート

問題 1. よくできていました．(2) と (3) で両方とも「完全である」と解答した人もいましたが，これはおかしいですね．

問題 2. これは本当に良くできていました．これらの結果があると議論がしやすいため，問題 1 より先にこちらを解いた人もいました．

問題 3. $N = \mathbb{Z}/150\mathbb{Z}$ の場合に関しては良くできていました．もうひとつの $N = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ のときに写像を作る際に苦戦をしている人が多かったです．

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} &\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \\ &\simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}\end{aligned}$$

なので，このように見ると写像の構成は一発です．このことに気づいて感銘に議論をしている人も数人いました．

問題 4. (i) および (ii) (1) はよくできていました．(ii) は，(2) で「L が自由加群である」ことがどこで本質的に効いているのか，が説明できた人は 10 人程度でした.「全ての元を 1 次結合で表せる」ところで使う，と書いていた人が多かったですがこれは本質的ではありません（自由でなくても有限生成加群なら同じことが成り立ちます）．本質的なのは「自由加群では元の基底による 1 次結合の表示が一意なので,（安直に作った）写像 χ が well-defined になる」ことです．加群が自由でないときは，(1)，(2) のようにして作った "写像" χ は同じ元の異なる表示に対し異なる像を与えてしまう可能性があり，すると χ が well-defined でなくなってしまいます．(3) は単射性のみを示せた人もいましたが，ここまで辿りついている人の多くが全射性も示せていました．

　本問は提出時に「全員必ず取り組んでほしい」と書いたので，レポートの評価の際の配分を大きくしました．

問題 5. 本問は例を挙げるだけでよいのですが，$N \simeq \mathbb{Z}$ のみを挙げた人が大変多かったです．$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ に気づくとあと 2 個挙がりますが（これらで全てです），それに気づいた人はごくわずかでした．

問題 6. 分裂していたら後者の条件を満たすことは問題 4 より簡単で，ある程度の人ができていました．逆はまず問題 4 (ii) (3) のような議論をする必要があり，それに気づいた人はできていました．

問題 7. (i) は取り組んでいる人の多くはできていました．(ii) は $N \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ のときを排除し，さらに $N \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ のときの例を構成することが本題ですが，これらはそれぞれ難しかったようです．

問題 8. 本問は難しく，証明を完結させた人はいませんでした．

第 2 回レポート

問題 1. 本問は難しかったので発展問題としましたが，おのおのの分割でマイヤー・ヴィートリス完全列を作って正しく計算している人も何人かいました．立派です．

問題 2. よくできていましたが，想定したよりは良くできてはいませんでした．誤答の全ては,「$F(x,t) := (1-t)f_1(x)+tf_2(x)$ のようなホモトピーを作る」という議論でした．一般の位相空間では線型構造は入っていないので，上式の右辺はナンセンスです．もしユークリッド空間に埋め込まれた位相空間のみを考えるとしても，右辺がその位相空間の点である保証はどこにもないので（例えば，“穴の開いた”弧状連結な図形を考えて下さい），やはり上の議論は意味をもちません．

この間違いをした人は結構多かったのですが，要注意です．

問題 3. 本問は,「円周を z 軸方向に持ち上げていって 1 点につぶす」という方針がつけばできると思います．実際，いろいろな表記でそれを議論してくれていました．ひとつ注意ですが，2 次元以上の球面の「極座標」にはいろいろな表記があるので（例えば S^2 でも，どの軸を「緯度」関係に対応させるかの選び方があります．通常はには z 軸をそうしますが，それが自然なわけでも数学的に canonical なわけでもありません），使うときにはどのように極座標を入れているのかを必ず明記して下さい．また，ホモトピーを作るとき，像が S^2 に入っていない人もいました．このあたりも注意深く構成してください．

大変まずい “解答”をしていた人もある程度いたので注意を喚起しておきます：以下の “写像”

$$F\colon S^1 \times I \to S^1;\ F(\cos\theta, \sin\theta, t) := (\cos(1-t)\theta, \sin(1-t)\theta)$$

に準ずるものを作っていた人がいますが，<u>これは well-defined ではありません</u>．例えば $(1,0)$ は $\theta = 0$ と見ても $\theta = 2\pi$ と見ても良いわけですが，上の “定義式”ではどちらで見るかによって像が変わってしまいます．そもそも上の “写像”がちゃんと定義できてしまったら S^1 は可縮になってしまいますが，$H_1(S^1;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ なのでこれはおかしいですね．

もうひとつ大変まずい解答をしているタイプがありました．これは問題 2. (1) を拡大解釈したもので，“弧状連結な位相空間の間の連続写像は定値写像とホモトピック”と勘違いしてしまうものです．弧状連結な位相空間では固定した点に対し任意の点 p をその点にもっていく道を作れますが，<u>それらの道を p を動かしたときに「連続に」とれるかどうかはわかりません</u>ね．例えば，S^1 の各点を $(1,0)$ にもっていこうとする時の事を考えてください．実際，S^1 の恒等写像の写像度は 1，定値写像の写像度は 0 なので，S^1 の恒等写像は定値写像とはホモトピックではありません．

以上二つのまずい解答をしてしまった人たちは要反省です．

問題 4. これらは，問題 3 ができている人は同じようにできた人が多かったです．極座標などを使っていた人は n 次元のときに苦戦していた人もいました．

問題 3 でまずい解答をしていた人は，こちらでも同じ謝った議論をしているケースもありました．

問題 5. 皆さんいろいろ議論して，正しく証明をしていました．配布解答のように誘導される写像を考えて簡明に議論していた人が一人だけいました．うまいですね．

問題 6. 配布解答のように,「例のトリック」を使って議論をしていた人がそれなりにいました．多数派の解答は，前期の多様体の内容でもあった「立体射影」を用いて，S^n から一点を抜いた空間が $\mathbb{R}^n$ と同相で，従って可縮であることを利用して議論していました．こちらも大変うまい解答だと思います．

問題 7. 長さで割る，ことに気づいた人はできていました．手を付けた人はほとんどできていたと思います．

問題 8. 問題 6 ができていた人は，気づいた人は同様にしてできていました．

問題 9. こちらも問題 1 と同じく発展問題ですが，気合を入れてマイヤー・ヴィートリス完全列を繰り返して解いていた立派な人が何人かいました.

問題 10. 問 9 は有名問題なのでそれを除けば，本問が一番難しかったかもしれません．ごく少数の人が挑戦してくれて，2 人くらい解けていました.

問題 11. 実はこちらはそんなに難しくありません.「錘」のイメージがあれば写像を作ることができたのではないでしょうか．写像を作った人が 4 人ほど，連続性までしっかりと議論できていたのが 2 人ほどでした.

第 2 回のレポートは 11 問全てをしっかり解ききった人も 1 人だけいました．極めて立派だと思います.