最適輸送理論，曲率次元条件と熱分布 *

(Optimal Transport, Curvature-Dimension Conditions and Heat Distributions)

桒田 和正 †
(Kazumasa Kuwada)
東京工業大学 理学院
(School of Scinece, Tokyo Institute of Technology)

平成 28 年 9 月 6 日

目 次

---

*2016 年度 確率論サマースクール 講義録

†URL: `http://www.math.titech.ac.jp/~kuwada/index.html` e-mail: `kuwada@math.titech.ac.jp`

1 導入

最適輸送理論とは，空間上に連続的に分布するもの (土砂などをイメージするとよい) を他の配置へと輸送する際の最小費用に関する問題を扱う理論である．終点配置は与えられており (例えば土砂で穴を塞ぐ状況を想定するとよい)，始点の分布と終点の分布の総量は等しいとする．この状況では「どの場所からどの場所へ，どの程度の量を運搬するか (輸送計画)」を，輸送費用をなるべく安くするように選択することになる．始点と終点の分布を (正規化して) 確率分布として定式化すると，最適輸送費用は確率速度の空間 (の直積) 上の関数となる．特に，遠くに運べばそれだけ余計に費用がかかる，という自然な状況を想定すると，最適輸送費用は 2 つの確率分布の「近さ」を測る指標の一種と考えられる．最適輸送問題の歴史的な背景などは他の文献に詳しいので ([178],[181, 1 章] 等)，ここではこれ以上の説明は割愛する．

標題の「熱分布」は，確率論的には，然るべき空間 (Euclid 空間，Riemann 多様体等) で定義されたブラウン運動あるいは (対称) 拡散過程 [1] の，ある時刻での分布の解析的な表現であり，初期条件と時刻で同定される．「2 つの熱分布間の最適輸送費用は，初期条件と時刻の 2 つのパラメータによってどのように制御されるのか」を調べることは，確率論における標準的な問題のひとつと言える．この問題は，この予稿全体を通じて取り扱うことになる．例えば，拡散過程が定常分布を持つ場合は，熱分布と定常分布の近さを測ることは古典的な問題である．その観点から見れば，測り方として最適輸送費用を用いることに対応している．

概念的には，最適輸送計画と確率測度のカップリングが対応する．従って，熱分布，あるいはその確率過程としての表現である Brown 運動の結合法 (coupling method) が最適輸送理論と関係することは自然であろう．実際，Euclid 空間上の Brown 運動の場合には，次のようなカップリングの存在が比較的容易に分かる．

[1] 後者に対しては，「熱分布」という言葉の伝統的な用法からすると濫用．だが，然るべき理由をもって，本文中ではこのような広い意味で「熱分布」という言葉を用いる．2 章の脚注 11 参照．

Theorem 1.1 (結合法による熱分布評価) 各 $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^m$，$\beta > \alpha > 0$ に対して，x_0, x_1 を出発点とする $\mathbb{R}^m$ 上の *2* つの *Brown* 運動のカップリング $(B_0(t))_{t\ge 0}, (B_1(t))_{t\ge 0}$ であって，次をみたすものが存在する：各 $t \ge 0$ で

$$\mathbb{E}[|B_1(2\beta t) - B_0(2\alpha t)|^2] \le |x_1 - x_0|^2 + 2m(\sqrt{\beta t} - \sqrt{\alpha t})^2.$$

初期分布を δ_x とする時刻 t での熱分布を ν_t^x としよう (即ち $\nu_t^x(\mathrm{d}y) := \mathbb{P}_x[B(2t) \in \mathrm{d}y]$)[2]．また，$N > 0$ を $m \le N$ に取る．Theorem 1.1 の評価に対応する最適輸送費用を考えることで，(Euclid) 距離 d の平方 d^2 を輸送費用を決める関数とする最適輸送費用 $\mathcal{T}_{d^2}$ (定義は (3.3) 参照) について，以下の不等式が成り立つと分かる：

$$\mathcal{T}_{d^2}(\nu_s^{x_0}, \nu_t^{x_1}) \le d(x_0, x_1)^2 + 2N(\sqrt{t} - \sqrt{s})^2. \tag{1.1}$$

ここで，これをひとつのモデルケースとして，「どのような設定において，熱分布は (1.1) をみたすのか」という問いを立ててみよう．実は，これと同等な不等式がより一般の設定で成り立ち，更に，この不等式が熱分布に対して成立する状況は幾何学的に特徴づけられる．例えば，完備で境界を持たない Riemann 多様体上で Laplace(-Beltrami) 作用素が定める熱方程式の解に対応するものとして熱分布を定めた場合，

$$\boxed{\text{(1.1) が成り立つことは，「Ricci 曲率が非負，かつ，次元が } N \text{ 以下」と同値}}$$

になる．Ricci 曲率の定義はここでは述べないが，空間の曲がり具合を記述する何種類かの曲率の中で，「各方向への曲がり具合を，方向について平均を取った量」になっている．ここで，関数の 2 階微分である Hesse 行列を 2 次形式と見て，方向について平均を取ると Laplace 作用素が現れることを思い出しておこう．この意味で Laplace 作用素と Ricci 曲率には類似しており，実際に幾つかの Riemann 幾何の定理 (Laplacian 比較定理，Bochner-Weitzenböck の公式等) を通じて，その対応を見ることができる．

曲率次元条件と，本論の目的

上で枠囲いした性質の一般化として，$K \in \mathbb{R}$, $N \in (1, \infty]$ に対して，「Ricci 曲率が K 以上，かつ，次元が N 以下」という条件を考えることができる．(完備で境界を持たない)Riemann 多様体上でこれと同値な条件達を，**広義の曲率次元条件**と呼ぶことにする．例えば，上記 (1.1) は $K = 0$ のときの広義の曲率次元条件になっている．広義の曲率次元条件は，古くは 80 年代の Bakry と Émery の研究に登場しており [19]，近年になって更に複数が知られるようになった (例えば，[180] 参照)．ここで，(1.1) は熱分布と距離が定義されていれば意味を持つ式であり，Riemann 多様体以外の空間でこの式を考えてもよいように思われる．また，他の曲率次元条件も同様に，必ずしもその定義自体には Riemann 多様体としての構造を必要としない．例えば，後述のように，最適輸送理論を用いた条件で底空間の距離と測度しか必要としないものもある．一方，それら複数の広義の曲率次元条件の間の同値性を示そうとすると，しばしば，一旦 Ricci 曲率で記載された条件を経由する必要がある．そのため，拡張された意味での広義の曲率次元条件達に対して，その同値性が拡張された枠組で同様に成り立つかどうかは全く非自明な問題だったと言える．

近年，この問題はかなり一般的な設定で解決されており，その結果を前提として，測度距離空間上の幾何解析や熱分布の特性の研究は，一段深い段階に入りつつある．本論の主目的は，

[2]幾何学的特性との対応を見る上で，熱分布の生成作用素は $\Delta/2$ ではなく Δ を用いる．以下も同様．

そのような近年の研究の流れを紹介すること，**即ち，「最適輸送理論の概観の紹介」「複数の (広義の) 曲率次元条件の紹介」「Riemann 多様体を超えた枠組での，条件の同値性とその応用」について，特に熱分布の特性に焦点を当てて論じること**にある．

動機について

このような「枠組の一般化への志向」は，この文脈においては，素朴な「どれだけ一般的な枠組で理論が展開できるか？」という好奇心とは別に，幾つかの動機が背景にある．

ひとつには，Riemann 幾何学における空間列の (測度 Gromov-Hausdorff) 収束の理論にある．Riemann 多様体の列を測度距離空間 (距離と測度が与えられた空間) の列とみなし，その収束および極限空間の性質を調べることは，Riemann 幾何学の一分野として，今なお多くの数学者の叡智が注がれ続けている問題である．特に，対象となる空間族を確定させ包括的に研究を展開するため，同一の K, N について (広義の) 曲率次元条件をみたす Riemann 多様体の列とその極限 (**Ricci limit** と呼ばれる) を全て含む測度距離空間の族を定義することに興味が持たれてきた．これは，測度距離空間で意味を持ち，空間列の測度 Gromov-Hausdorff 収束で保たれるような (広義の) 曲率次元条件を定式化する，という問題に他ならない．そのような定式化のうち最初のものが 2005 年頃に K.-Th. Sturm [172] および J. Lott と C. Villani [135] によって与えられたことで，彼らの条件をみたす測度距離空間上での幾何解析の研究が急速に進み始めた．そこで，前述の，他の曲率次元条件との関係が問題になる．特に，Bakry-Émery によって創始された理論が幾何解析で強力な道具として機能することは広く知られていたが，彼らの (広義の) 曲率次元条件が測度距離空間で成り立つかどうかは，Ricci limit の場合にすら (当時は) 未知であった．これ以上のことは，歴史的背景等も含め，例えば [181, 2 章] とその参考文献を参照のこと．また Ricci limit については，日本語による現在の研究の進展状況の解説がある [185].

確率論においては，空間に標準的に与えられた確率過程と空間の (幾何学的) 特性との相関を調べることは古典的な問題意識と言え，多くの研究がこの立場から解釈できる．一般的な設定でも機能する理論を構築することは，問題から本質を抽出する作業を伴う．その結果として，古典的な設定においてすら理解を一段深めてくれるような新しい特性を見いだすこともある．実際，曲率次元条件の帰結として得られた熱分布の性質の幾つかは，それ自体が新しく，興味深い．(1.1) のような初等的な評価ですら，曲率次元条件との関係を通じて初めて考察されたのである [55, 121].

また，曲率次元条件の異なる定式化には，熱分布自体の性質を調べる上で有用なものもある．例えば上記の幾何学での動機にあった「空間の収束で安定な条件」という見方は，「熱分布列の収束で保存される性質」と読み替え得る．(測度距離) 空間列の収束と，各空間上の熱分布列の収束の間には強い繋がりがあると考えられるためである ([15, 76, 175, 174] 等参照)．実際，Bakry-Émery の曲率次元条件は，それを単独で眺める限り，空間列の収束で安定な性質であるとは考え難い．安定性などの新しい性質は，Sturm, Lott-Villani らの曲率次元条件達との同値性を通じて初めて認識された，と言えるだろう．

あるいは，曲率次元条件から得た新しい評価は，より一般の枠組で類似の条件を考える際の足掛かりにすることもできる．測度や距離を適切に選ぶことで，幾つかの確率模型は (Riemann 幾何の知識なしで) 測度距離空間に類する枠組に当てはめることができる．複雑な空間，離散的な空間や無限次元空間等の特異性を持つ空間において，ここで得た知見を土台にして解析を進める手掛かりが得られる可能性がある．実際にそのような形で進展してきた研究が既に少なからずある (8.3 節参照).

歴史的経緯：最適輸送理論および熱分布の役割

広義の曲率次元条件達の関係の中でも，Sturm, Lott-Villani の条件から Bakry-Émery らの条件を導出することが特に大事な問題とされてきた (これは少し正確ではないかもしれない；当初は，どう解けばいいのか見当もつかない問題と認識されていたように思う)．本論で扱う内容の紹介を兼ねて，この問題の解決に至るまでの研究の流れを概観しておこう．

Sturm, Lott-Villani の曲率次元条件は「確率測度の空間上の汎関数，特に相対エントロピー汎関数が，最適な輸送経路に沿って確率測度を連続的に変形した場合にどのような振る舞いをするか」という観点で定式化された．その定義の段階から，最適輸送理論が本質的な役割を果たしている．一方で，Bakry-Émery の曲率次元条件の定式化は熱分布の生成作用素を用いるもので，その時間積分版として，熱分布の微分評価が対応する．こう見ると，熱分布に対する (1.1) のような最適輸送費用の評価が曲率次元条件との関係で登場する以上，このふたつの条件を橋渡しすると期待するのは自然なことであろう．

(1.1) は，ある意味での熱分布の「差分」を評価していると言える．従って，差分評価の極限として微分評価が出ると考えるのは自然であろう．その意味で Bakry-Émery 理論への繋がりはある程度自然に了解できる．他方においては，最適輸送理論における，いわゆる Otto 解析に基づく発見的考察を実現することが要になる．Otto 解析とは，確率測度の空間上で，最適輸送費用と整合性のある微分法を (発見的考察として) 展開するための形式的な枠組である．熱分布を確率測度の空間上の (時間をパラメータとする) 曲線とみなし Otto 解析を適用すると，相対エントロピー汎関数をポテンシャル関数とする勾配流 (gradient flow)[3] になることが分かる．そこで，Sturm, Lott-Villani の条件が与える相対エントロピー汎関数の条件を利用して熱分布の性質を解析することが可能になり，実際にその結果として (1.1) のような条件を発見的考察から導出できる．

(1.1) 型の条件と Bakry-Émery 理論との橋渡しは，熱半群の微分評価と (1.1) 型評価との双対性として実現された ([117, 119, 121])．一方で，Sturm, Lott-Villani の条件との対応はより難解であった．相対エントロピーの勾配流を扱うための枠組としては，距離空間上の勾配流の理論が存在していた [7]．一方で，古典的な熱分布の解釈である「Dirichlet エネルギー汎関数の，L^2-空間上の勾配流」(確率論の立場からは，Dirichlet 形式の理論との関係で，こちらの方が馴染みが深い) として熱分布を定義できることはよく知られている．この観点が通常の可微分構造を持たない (測度距離) 空間でもある程度有効であることも当時判明していた．そこで，まず解析学の問題として，「この，異なる定式化で与えられる 2 種の熱分布は同定できるか？」という問いがあった (6.3 節の冒頭参照)．その後，通常の可微分構造に依存しない方法による (肯定的な) 解答が特別な場合に登場し [74]，その設定では Sturm, Lott-Villani の条件から Bakry-Émery の条件が従うことが示された．そして，そこで提示された道筋に沿って，一般の測度距離空間へと (熱分布の定義の仕方を含め，多くの新概念が投入・開発されながら) 話が一気に拡張された．[6, 10, 11] において $N = \infty$ での理論がほぼ完成し，続いて [13, 55] により $N < \infty$ の場合が補完された．

応用

動機で述べたように，広義の曲率次元条件達の間の関係が判明したことで，測度距離空間上の幾何解析でそれぞれの条件の利点が同時に利用可能になった．実際，まず，Sturm, Lott-Villani の条件をみたす空間族として，Ricci limit を含む測度距離空間という大きな枠組で理論が展開でき，また同条件の各種幾何学的操作での安定性から多くの例が得られる．

[3] より正確には「勾配曲線 (gradient curve)」と呼ぶべきものだが，この業界では誰もそう呼ばない．

Dirichlet 形式の理論において，熱半群には L^p 空間 (特に $p = 2$) での関数解析的な実現とFeller 半群としての測度論的な実現があり，ポテンシャル論を介してこれらの実現が橋渡しされていた．一方で，最適輸送理論を通じて (1.1) のような評価が利用可能な設定では，従来とは異なる経路で 2 つの熱半群が同定される．実際，この設定では熱半群を (連続な) 熱核密度による積分作用素として実現でき (Proposition 7.11; 熱半群の，ある種の正則性)，更に，熱半群が有界可測関数を Lipschitz 連続関数にうつす，という意味での Lipschitz 平滑化効果まで得られる (Remark 7.13)．熱核密度を経由する方法自体は先例があるが，そこではやはりポテンシャル論的な解析が要になる．この設定では，volume doubling 条件などポテンシャル論的な方法で不可欠な仮定を利用せずに論が展開できる (勿論，その代わりに課している (広義の) 曲率次元条件は，別の意味で空間に強い制約を設けてはいる)．

更に，Bakry-Émery 理論が利用可能になることで，既存の幾何解析の技法が (然るべき修正の上で) 適用可能になる．これを最適輸送理論を元に構築された幾何解析の理論と相補的に複合させることで，Riemann 多様体あるいは Ricci limit における諸定理が測度距離空間の枠組に拡張されてきた (8.2 節)．その拡張は，剛性定理などで実際に Riemann 多様体ではない空間が自然に登場する等，新しい現象を見出したものにもなっている．

また，理論を展開する過程で，Bakry-Émery 理論から逆向きに (1.1) のような熱分布の最適輸送費用評価を導出する手法が開発された．これを用いると，Bakry-Émery 理論を通じて得られる熱半群の微分に関する関数不等式を通じて，標準的な距離平方以外の，別の最適輸送費用の評価を得ることができる (9.2 節)．そのような評価を通じて，測度距離空間上の Brown 運動に対する結合法を論じることまでもが可能になる (Theorem 9.11)．

これらのうちの多くは Riemann 多様体上では既知あるいは自明であったが，その証明は空間の可微分構造を用いた議論に基づいており，測度距離空間への拡張は全く非自明であった．一方で，(1.1) 型評価を含む幾つかの性質は，Riemann 多様体あるいは Ricci limit においても未知であった．「測度距離空間でも有効な議論を構築する」という目的の下で研究が展開された結果として，Riemann 多様体の場合にすら一段深い理解が得られたことになる．

話の構成

ここで, 以下の章の構成について概略を述べる．2 章では, 古典的な話題の復習として, Bakry, Émery らが導入した広義の曲率次元条件を重みつき Riemann 多様体の枠組で述べる．熱分布の微分評価等，幾つかの関数不等式への応用も紹介する．3 章で，最適輸送理論のうち本論で用いる基本的な事実について概説する．2 章と 3 章は独立した内容であり，これは次の章で結合する．4 章では Otto 解析を扱う．まず形式的な Riemann 構造を導入し (4.1 節)，熱分布が相対エントロピー汎関数の勾配流となることを検証する (4.2 節)．そして，Bakry-Émery の条件から，確率測度の空間上で相対エントロピーがみたすべき条件を導出する (この条件は，のちに厳密な定式化を経て広義の曲率次元条件のひとつと検証される)．また，その条件と勾配流の性質を合わせて，(1.1) に相当する評価を導出する (4.3 節)．これらは全て形式的な議論ではあるが，後の話の展開の基礎になる多くの式がここで導入される．

5, 6 章は，4 章の議論を厳密にするための枠組と，それに関連する話題について扱う．5 章では，前章で形式的に導入された相対エントロピーの性質の最適輸送理論に基づく厳密な定式化を行う．更に，Sturm, Lott, Villani らが導入した同種の他の条件を紹介し，それらの基本的な性質と条件間の関係を簡単に述べる．6 章では，距離空間上の勾配流の理論を扱う．特に，5 章で考察した条件を取り込んだ勾配流の定式化を与えると共に，それを熱分布にどのように適用できるのかを述べる．

7 章では，5, 6 章での準備を基に，測度距離空間の枠組で広義の曲率次元条件達の関係を述べる．この枠組でどのように熱分布を定義するのか，という問題は，実は広義の曲率次元条件の定式化にも関わる．最初の 2 節 (7.1, 7.2 節) でこの点について論じた後で，条件の対応を次の 2 節 (7.3, 7.4 節) で述べる．

8, 9 章は，7 章で得た結果の応用と関連する話題を扱う．8 章では，前半 2 節 (8.1, 8.2 節) で関数不等式への応用と幾何学的な応用を簡潔に紹介する．今回は幾何学が主題ではないので扱いを小さくしている．一方で，かなり重要な結果が多く含まれるため，全く紹介しないのは不適切と判断した．実際，確率論の問題にも応用可能と思われる結果もある．また後半 2 節 (8.3, 8.4 節) で，7 章の条件の成立が期待できない枠組での曲率次元条件の拡張と，最適輸送に関係する確率論の別種の問題を紹介する．9 章では，幾つかある解析的な応用のうち，熱分布間の最適輸送費用評価に関係するものを扱う (他の応用は冒頭で少しだけ述べる)．Bakry-Émery 理論の精密化と，そこから従う関数不等式を 9.1 節にまとめ，その応用のひとつとして，熱分布間の最適輸送費用評価を 9.2 節で扱う．9.3 節では，(1.1) の評価が (他の関数不等式と組み合わせることで) いわゆる $\mathcal{W}$-エントロピーの解析に応用できることを紹介する．9.2, 9.3 節で扱う結果の一部は私の最近の研究に基づくもので，まだ論文に執筆していない内容を含む．

注意事項

- 本文中では，確率過程・確率解析に関する話は，Dirichlet 形式の幾つかの概念を除き，あまり登場しない．確率過程の愛好家にとっては物足りないかもしれない．ただ，表立って登場しないだけで，関係のある話はそれなりにある．

- 確率論と最適輸送理論の双方に関連する (が，主題からやや外れる) 近年の研究も，私の力量が及ぶ範囲でなるべく取り入れた (主に 8 章)．少し背伸びをして執筆したので，説明が不十分 (あるいは見当違い) の箇所もあるかもしれない．「詳しくないから書かない」という路線も考えたが，多少の誤りを恐れず，より多くの情報に触れる機会を読者に提供することを良しとした．必要とあらば他日に修正版を用意する所存であるので，不適切な記述があれば，どしどしご指摘・ご指導を頂きたい．

- 多くの読者の専門は確率論であり，Riemann 幾何にあまり詳しくない人も少なくないと思われる．一方，そうであっても，本論を通じて何らかの有益な知見が得られると考えている．なるべく Riemann 幾何の知識なしでも話の筋がつかめるように配慮した．

  一方で，Riemann 幾何に関する話を完全に避けることは困難であった．どうしても，幾つかの場面で用語・概念・定理が登場する (実際，既に「Ricci 曲率」等が登場している)．説明が大変なものは，天与のものとして認めさえすれば読めるように書いたつもりである．

  和洋問わず Riemann 幾何の良い入門書は多くあるので，ちゃんと分かりたいと思う人はそれらを眺めてみるとよい．また，この書き方が不満な人向けに，幾何を前面に出した (日本語の) 文献として [181, 182] を挙げておく (ただ，[182] は情報がやや古い)．なお，本稿の内容の一部は [181](の，私の執筆部分) と重複している．

- 本稿では，当該分野の概要を伝えることを主目的に置いている．そのため，きちんとした証明を与えている主張はあまり多くない．ただし，参考文献はその都度挙げてあるので，厳密な証明が必要であればそちらに当たって頂きたい．一方で，かなりの主張に「なぜそれが正しいのか」を感覚的にでも分かってもらうための説明をつけた．分野の雰囲気の把握あるいは厳密な証明の解読の際の道標になれば，幸いに思う．

- 多くの場合，参考文献は，網羅的にする代わりに先行結果をよく引用してある代表的なものに限定した．
- 以下文中では，特に指示がなければ $K \in \mathbb{R}$, $N \in (1,\infty)$ とする．K は「Ricci 曲率の下限」，N は「次元の上限」にそれぞれ相当するパラメータとして用いる．パラメータとしては $N=\infty$ の場合も意味があるが，以下では分けて考えるようにしている．
- 以下文中で「容易に」と書いている場合は，「高々，修士課程の大学院生向けの演習問題程度」の難度のことを指しているものとする．「直ちに」は，定義を組み合わせるだけで分かる等，もっと易しい場合にのみ用いる．

2 Bakry-Émery 理論入門

1 章で述べたように，Bakry, Émery は 80 年代の半ばに拡散過程の生成作用素を用いた (広義の) 曲率次元条件を提唱した．この条件を土台とする幾何解析・関数不等式は，今なお活発に研究されている．ここでは，彼らの条件とその簡単な帰結について復習しておく．

まず簡単のため，Euclid 空間 $\mathbb{R}^m$ 上で，$V \in C^2(\mathbb{R}^m)$ を用いて

$$\mathcal{L}f := \Delta f - \langle \nabla V, \nabla f \rangle \tag{2.1}$$

と定義される 2 階楕円型線形微分作用素を考えよう．この作用素は，確率微分方程式

$$\mathrm{d}X_t = \sqrt{2}\mathrm{d}W_t - \nabla V(X_t)\,\mathrm{d}t$$

の解の生成作用素になっている (W_t は $\mathbb{R}^m$ 上の標準 Brown 運動)．このとき，ある定数 $K \in \mathbb{R}$ と $N \in [m,\infty]$ で，不等式

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}|\nabla f|^2 - \langle \nabla f, \nabla \mathcal{L}f \rangle \geq K|\nabla f|^2 + \frac{1}{N}(\mathcal{L}f)^2 \tag{2.2}$$

が任意の $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ で (各点で) 成り立つことを，**Bakry-Émery の曲率次元条件** (Bochner 不等式，あるいは energetic curvature-dimension condition とも呼ばれる) という [4]．N は 1 章で「次元の上限」として述べたが，「次元に依存する量をパラメータと見る」くらいの意味で理解しておけばよい．例えば，Bessel 過程の「次元」はまさにそういう意味になっている．

(2.2) が成立するための V の条件を考えてみよう．まず，具体的な計算で次が分かる：

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}|\nabla f|^2 - \langle \nabla f, \nabla \mathcal{L}f \rangle = \sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + \sum_{i,j}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

右辺第 1 項は f の Hesse 行列の成分の平方和であり，対角化によって Hesse 行列の固有値の平方和に一致する．よって，Schwarz 不等式より，

$$\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 \geq \frac{1}{m}(\Delta f)^2$$

[4] $N=\infty$ のときは，右辺第 2 項を 0 と解釈する．

を得る．この式から，Bakry-Émery の曲率次元条件は任意の $u = (u_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$ で

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j - \frac{1}{N-m} \left(\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} u_i \right)^2 \geq K \sum_i u_i^2$$

と同値であることが容易に確認できる [5]．

(2.2) が「曲率次元条件」と呼ばれる理由を確認する意味も込めて，完備 Riemann 多様体の設定に話を一般化しておこう [6]．その前に，上記の設定で $\mathcal{L}$ は重みつき測度 $\mathfrak{m} = \mathrm{e}^{-V} \mathfrak{L}^m$ ($\mathfrak{L}^m$ は m 次元 Lebesgue 測度) を対称化測度として持つことを注意しておく．別の言い方をすれば，$\mathcal{L}$ はエネルギー汎関数

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla f|^2 \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \tag{2.3}$$

が定める双線形形式に対応する生成作用素になっている．これを踏まえると，完備 Riemann 多様体 (M, g) 上で Riemann 体積測度 vol_g に重みをつけた測度 $\mathfrak{m} = \mathrm{e}^{-V} \mathrm{vol}_g$, $V \in C^\infty(M)$ を考えることが自然な一般化になっていると分かる．この場合にも，(2.3) を用いてエネルギー汎関数を考え，対応する生成作用素 $\mathcal{L}$(および，$\mathcal{L}$ が生成する拡散過程) を考えることができる．更に，$\mathcal{L}$ は Laplace-Beltrami 作用素 Δ を用いて (2.1) の形に表示できる．$(M, g, \mathfrak{m})$ の組を**重みつき Riemann 多様体 (weighted Riemannian manifold)** という．重みつき Riemann 多様体上で曲率次元条件を論じる場合，Ricci 曲率の代わりに (Bakry-Émery の) **重みつき Ricci テンソル** Ric_V^N を用いる．$\dim M = m$ とすると，Ric_V^N ($N \in [m, \infty]$, $K \in \mathbb{R}$) は次で定義される $(0, 2)$-テンソルである [7]：

$$\mathrm{Ric}_V^N := \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, V - \frac{1}{N-m} \nabla V \otimes \nabla V.$$

さて，重みつき Riemann 多様体上で，次の式 ($V = 0$ のときが，Bochner-Weitzenböck 公式) が知られている：$f \in C^\infty(M)$ に対して，

$$\frac{1}{2} \mathcal{L} |\nabla f|^2 - \langle \nabla f, \nabla \mathcal{L} f \rangle = \| \mathrm{Hess}\, f \|_{\mathrm{HS}}^2 + \mathrm{Ric}_V^\infty (\nabla f, \nabla f).$$

ここで，$\| \cdot \|_{\mathrm{HS}}^2$ は Hilbert-Schmidt ノルムを表す．即ち，$\{e_i\}_{i=1}^n$ を $T_x M$ の正規直交基底とすると，$\| \mathrm{Hess}\, f \|_{\mathrm{HS}}(x)^2 = \sum_{i,j} \mathrm{Hess}\, f(x)(e_i, e_j)^2$．右辺第 1 項について，Euclid 空間の場合と同様にして，$\| \mathrm{Hess}\, f \|_{\mathrm{HS}}^2 \geq \dfrac{1}{m} (\mathrm{tr}\, \mathrm{Hess}\, f)^2 = \dfrac{1}{m} (\Delta f)^2$ が分かる．これを用いると，$\mathrm{Ric}_V^N \geq K g$ (2 次形式の意味で) のとき，(2.2) が成り立つことが容易に分かる．更に，各点毎に，その点の近傍で試験関数 f をうまく取ることで (2.2) から $\mathrm{Ric}_V^N \geq K g$ が従う．即ち，この 2 条件は同値.

Remark 2.1 (重みつき Ricci テンソル) Ric_V^N は様々な形で幾何解析に自然に現れる．重みつきでない m 次元 *Riemann* 多様体上で，$\mathrm{Ric} \geq K$ の条件の下 m をパラメータとして成り立つ幾つかの不等式は，$\mathrm{Ric}_V^N \geq K$ の仮定の下で m を N に置き換えた形で成立する．一例として，*Bonnet-Myers* の定理を挙げておこう．これは,

[5] $N = m$ は，V が定数関数のときのみ許容される．またそのとき，左辺第 2 項は 0 と解釈する．

[6] 読解に困難を感じる読者は，Remark 2.1 の終わりまで飛ばしてもよい；その場合には，以下本文で登場する「重みつき Riemann 多様体」は全て $\mathbb{R}^m$ や $\mathbb{T}^m$ に前述の方法で重みつき測度 $\mathfrak{m}$ を入れたものと思って読めば，ある程度読めるはずである

[7] $N = \infty$, $N = m$ の場合の扱いは，脚注 4,5 に準ずる．

$$「\mathrm{Ric}_V^N \geq K > 0 \text{ のとき } \mathrm{diam}(X) \leq \sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi \text{ が成り立つ}」$$

という主張 *(*$\mathrm{diam}(X) := \sup_{x,y\in X} d(x,y)$ を X の直径という*)* である[8]．パラメータ N が大きい方が評価は悪くなるので，この例では，「空間次元が N 以下」という解釈が，ある程度自然に見えるのではないかと思う．ここでは幾何学的な例を挙げたが，*Li-Yau* 不等式 *(*(9.15) に登場する*)* など，解析的な例もある．

Bakry-Émery の曲率次元条件 (2.2) は，極めて強力かつ根源的な道具として，その応用が幾何解析で盛んに研究されてきた[9]．また，(2.2) は生成作用素の言葉のみで書き直すことができ，より一般的な枠組で意味を持つ (Remark 2.2 参照)．一方で，式の形を見ると分かるように，(2.2) における曲率や次元の情報は微分演算から抽出している．そのため，可微分構造を持たない特異な空間で (2.2) が成り立つかどうかの判定は，極めて非自明な問題であった (特異空間では，微分の対応物が定義できても，曲率の情報を微分から直接引き出すことは絶望的であろう)．実際，特異な空間で (2.2) が検証できた状況は，ごく近年までほとんどなかったと言ってよい (無限次元空間および離散空間では若干の例がある；後者については 8.3 節 (9) 参照)．また，(2.2) が検証できたとしても，既存の Γ-calculus では，(2.2) を有効に応用する上で追加の仮定がしばしば必要になる (Remark 2.2 参照)．その検証がもう一段の困難を引き起こし，理論の有効性を損ねていた．

1 章で述べたように，最適輸送理論によって定式化された曲率次元条件は Bakry-Émery の曲率次元条件と然るべき意味で同値になる．ここで，前者の条件は広い範囲の測度距離空間で意味を持ち，様々な幾何学的な操作で安定であることから，この条件をみたす空間はある程度豊富にあることが保証されている．更に，前述の「追加の仮定」を避ける手段も提唱されており，その有効性も明らかになりつつある (9.1 節参照)．結果として，既存の Γ-calculus とは若干異なる方法で，Bakry-Émery 理論の新たな展開がもたらされつつある，と言える．

Remark 2.2 (Γ-calculus) *Bakry-Émery* 理論の抽象化である Γ-*calculus* の枠組を簡単に紹介しておく．Γ-*calculus* では，まず測度空間とその L^2-空間上の *(*非有界*)* 自己共役作用素 $\mathcal{L}$ を与えるところを出発点とする．この文脈では，$\langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle$ に相当するものとして**平方場作用素 *(square field operator/carré du champ)*** $\Gamma(f_1, f_2)$ を

$$\Gamma(f_1, f_2) := \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(f_1 f_2) - f_1\mathcal{L}f_2 - f_2\mathcal{L}f_1\right) \tag{2.4}$$

として *(*$\mathcal{L}$ を用いて*)* 定める[10]．底空間の距離は，この Γ を用いた内在的距離として定める *(7.5* 節参照*)*．また，上記の Γ を作る操作を関数の各点毎の積 $f_1 f_2$ の代わりに $\Gamma(f_1, f_2)$ に対して適用することで，次の定義を得る：

$$\Gamma_2(f_1, f_2) := \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\Gamma(f_1, f_2) - \Gamma(f_1, \mathcal{L}f_2) - \Gamma(\mathcal{L}f_1, f_2)\right).$$

この枠組では，(2.2) は次のように書ける：

$$\Gamma_2(f, f) \geq K\Gamma(f, f) + \frac{1}{N}(\mathcal{L}f)^2.$$

[8] この不等式はより一般の枠組で成り立つ．Theorem 5.9 参照．

[9] 重みつき Ricci テンソルも，Bakry, Émery 以前から Riemann 幾何では知られていた．[181, 3 章] 参照．

[10] 前述の重みつき Riemann 多様体の枠組では，$f \in C_0^\infty(M)$ に対し $\Gamma(f, f) = |\nabla f|^2$ になる．

これらの概念を正しく定義し豊かな応用を得るためには，然るべき *regularity* の仮定 *(*別の言い方をすれば，様々な計算を正当化できる，適切かつ充分に大きな部分空間 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{L}$ の定義域から取れること；*[18, 124], [20, 3.3* 節*]* 等参照*)* が必要になる．仮定なしでは，Γ, Γ_2 が定義できる関数のクラスがどの程度広いのかすら明らかではない．

この章を終える前に，簡単な応用例をふたつ挙げることで，理論の雰囲気を伝えておこう．空間は前述の重みつき Riemann 多様体 $(M, g, \mathfrak{m})$ とする．まず，$\mathcal{L}$ が生成する**熱半群** [11] $P_t = \mathrm{e}^{t\mathcal{L}}$ を用いた (2.2) の定式化を述べる．関数解析的な半群の定義としては，$P_t : L^2(\mathfrak{m}) \to L^2(\mathfrak{m})$ は有界線形作用素で，$u(t,x) := P_t f(x)$ は熱方程式 [12]

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \mathcal{L}u, \quad \lim_{t\downarrow 0} u(t,\cdot) = f \tag{2.5}$$

を各 $f \in L^2(\mathfrak{m})$ でみたすものとする (極限は L^2-強収束の意味で取る；[64, 82, 159] 等を参照)．また，P_t は対称作用素かつ Markov 的であることから，各 $p \in [1,\infty]$ に対して $L^p(\mathfrak{m})$ からそれ自身への有界線形作用素として一意拡張できる．あるいは今の設定ならば，$\mathcal{L}$ が生成する拡散過程 $((X_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in M})$ を用いて，$f \in C_0^\infty(M)$ に対しては $P_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)]$ と書ける．

Theorem 2.3 (**P_t の微分評価による曲率次元条件** [**19**, **20**, **23**]) 次は同値：

(1) 任意の $f \in C_0^\infty(M)$ で (2.2) 成立．

(2) 任意の $f \in C_0^\infty(M)$, $t > 0$ で $|\nabla P_t f|^2 + \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2Kt}}{NK}|\mathcal{L}P_t f|^2 \leq \mathrm{e}^{-2Kt}P_t(|\nabla f|^2)$.

ただし，$K=0$ のときは (2) の左辺第 *2* 項は $K \to 0$ の極限と解釈する *(*この先，この予稿を通じて類似した量は全て同様に解釈する*)*.

(2) は，関数に熱半群を作用させたとき，その 1 階・2 階の微分がどの程度の大きさになるのかを，f 自身の微分の言葉を用いて評価した式になっている．「Theorem 2.3 は，熱半群 P_t の言葉で (2.2) に相当する条件を与えている」という意味で，後に扱う熱分布の解析の話と (2.2) を繋ぐ役割を果たす重要な関係式のひとつである．

Proof. 微分の順序交換等，形式的な計算は全てうまくいくものとして概略を述べる．

(1) ⇒ (2): $h \in L^2(\mathfrak{m})$ が $\mathcal{L}$ の定義域に入っていれば $\mathcal{L}P_t h = P_t\mathcal{L}h$ が成り立つことを注意しておく．また，$f \geq 0$ であれば $P_t f \geq 0$ となるので，$P_t(f^2) \geq (P_t f)^2$ が成り立つ．$t > 0$, $s \in (0,t)$ に対して $\Phi(s) := \mathrm{e}^{-2K(t-s)}P_{t-s}(|\nabla P_s f|^2)$ とおく．このとき，(2.2) を $P_s f$ に対して用いると，

$$\begin{aligned}\Phi'(s) &= \mathrm{e}^{-2K(t-s)}\big(-P_{t-s}(\mathcal{L}|\nabla P_s f|^2) + 2P_{t-s}(\nabla P_s f, \nabla\mathcal{L}P_s f)\big) + 2K\Phi(s)\\ &\leq -\frac{2}{N}\mathrm{e}^{-2K(t-s)}P_{t-s}(\mathcal{L}P_s f)^2 \leq -\frac{2}{N}\mathrm{e}^{-2K(t-s)}(\mathcal{L}P_t f)^2\end{aligned}$$

を得る (最初に注意した性質も用いている)．この式を 0 から t まで積分すれば (2) を得る．

(2) ⇒ (1): 目標の式は $t=0$ で等式なので，両辺を $t=0$ で微分したものについても同じ向きの不等式が成り立つ．この不等式が (2.2) になることが，簡単な計算から分かる． □

[11] 正確には拡散半群と呼ぶべきもの．だが，この枠組の拡張である測度距離空間では標準となる測度 ($\mathfrak{L}^m$ や vol_g) の概念がないので，この形で与えられる半群を全て熱半群と呼ぶ．その枠組での標準測度の候補として Hausdorff 測度があるが，標準測度と見るべきものであるかどうかは，まだ充分に研究が進んでいない．

[12] 脚注 11 と同様，本来は拡散方程式と呼ぶべきもの．

次に，関数不等式への応用を述べよう．

Theorem 2.4 (対数 Sobolev 不等式) M はコンパクトとする [13]．また，(2.2) が $N=\infty$, $K>0$ で成り立っているとする．このとき，任意の $f\in C^\infty(M)$, $f>0$, $\int_M f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}=1$ に対して次が成り立つ：

$$\int_M f\log f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\le\frac{1}{2K}\int_M\frac{|\nabla f|^2}{f}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

この不等式を**対数 Sobolev 不等式**という (8.1 節で，より抽象的な枠組で再登場する)．確率分布 $f\mathfrak{m}$ に対して，この不等式の左辺を相対エントロピーといい (Definition 4.4)，右辺の積分を Fisher 情報量という (Remark 4.6)．対数 Sobolev 不等式は解析学・確率論・幾何学の様々な文脈で登場する非常に重要な不等式である．膨大な研究成果があり，その全容を述べることは難しい．ここでは [20, Chapter 5] を引用するに留めておく．

Proof. $f_t=P_tf$, $h_t=\log P_tf$ とおく．$\Phi(t):=\int_M f_t\log f_t\,\mathrm{d}\mathfrak{m}$ としたとき，

$$\Phi''(t)\ge-2K\Phi'(t)\tag{2.6}$$

が成り立つことを最初に示す．まず，

$$\Phi'(t)=\int_M(1+\log f_t)\mathcal{L}f_t\,\mathrm{d}\mathfrak{m}=-\int_M\frac{|\nabla f_t|^2}{f_t}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}=-\int_M|\nabla h_t|^2f_t\,\mathrm{d}\mathfrak{m}$$

が分かる．最初と第 3 の等号は微分の連鎖律から従い，第 2 の等号は Gauss-Green 公式と $\mathcal{L}f_t$ の積分が 0 になることによる．次に，同様にして，

$$\begin{aligned}\Phi''(t)&=\int_M\left(\frac{|\nabla f_t|^2}{f_t^2}\mathcal{L}f_t-2\frac{\langle\nabla f_t,\nabla\mathcal{L}f_t\rangle}{f_t}\right)\mathrm{d}\mathfrak{m}=\int_M\big(|\nabla h_t|^2\mathcal{L}f_t-2\langle\nabla h_t,\nabla\mathcal{L}f_t\rangle\big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\\&=\int_M\big(\mathcal{L}(|\nabla h_t|^2)\,f_t+2\mathcal{L}h_t\mathcal{L}f_t\big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}=\int_M\big(\mathcal{L}(|\nabla h_t|^2)\,f_t-2\langle\nabla\mathcal{L}h_t,\nabla f_t\rangle\big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\\&=\int_M\big(\mathcal{L}(|\nabla h_t|^2)\,f_t-2\langle\nabla\mathcal{L}h_t,\nabla h_t\rangle f_t\big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\end{aligned}$$

を得る (第 3 の等号で，被積分関数の第 1 項に対して $\mathcal{L}$ の対称性を用いた)．これらの計算結果と (2.2) を合わせれば (2.6) を得る．ここで，$(\mathrm{e}^{2Kt}\Phi'(t))'\ge0$ であるから，

$$0\le\int_0^t\mathrm{e}^{-2Ks}\int_0^s(\mathrm{e}^{2Ku}\Phi'(u))'\,\mathrm{d}u=\Phi(t)-\Phi(0)-\frac{1-\mathrm{e}^{-2Kt}}{2K}\Phi'(0)$$

を得る．今，条件から $\lim_{t\to\infty}\Phi(t)=0$ が成り立つので，$t\to\infty$ とすれば結論を得る． □

3 最適輸送理論の基礎

以下の各節で扱う内容を大まかに紹介しておく．3.1 節で，最適輸送理論の説明に用いる基本的な用語・概念 (最適輸送費用の定義を含む) を用意する．それらは後の章でも頻繁に利用する．3.2 節では，最適輸送理論における最も基本的な結果である最適輸送費用の双対表現

[13] 話を簡単にするための仮定．

(Kantorovich 双対性) と，後の議論にも関係する簡単な応用を述べる．最適輸送問題の解が写像で与えられるかどうかは，歴史的に重要な問題であったし，様々な応用もある．この方面で最も基本的な結果である Brenier の定理を 3.3 節で紹介する．3.4 節では，最適輸送費用から定まる L^p-型の距離である Wasserstein 距離を導入し，その基本的な性質を述べる．最後に，3.5 節では，Wasserstein 距離の特筆すべき性質として，最適輸送が測度の連続変形による輸送として実現できること，その実現が経路空間上の測度を用いて与えられることを説明する．合わせて，連続変形による輸送の双対表現に関する結果を紹介する．

なお，最適輸送理論の基礎に関する参考文献として [7, 178, 179] を挙げておく．

3.1 基本的な記号と概念

この予稿を通して (X, d) は完備可分な距離空間とする．位相空間 Y に対し $\mathscr{P}(Y)$ を Y 上の (Borel) 確率測度の全体とする．可測写像 $\varphi : Y \to Z$ による $\mu \in \mathscr{P}(Y)$ の**押し出し (push-forward)** を $\varphi_\sharp\mu \in \mathscr{P}(Z)$ で表す．即ち，各可測集合 $A \subset Z$ に対して $(\varphi_\sharp\mu)(A) := \mu(\varphi^{-1}(A))$．射影 $\mathfrak{p}_i : X \times X \to X$ $(i = 0, 1)$ を $\mathfrak{p}_0(x_0, x_1) := x_0$, $\mathfrak{p}_1(x_0, x_1) := x_1$ で定める．$\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}(X)$ に対して，$\Pi(\mu_0, \mu_1)$ を **μ_0 と μ_1 のカップリング**の全体とする (最適輸送理論の用語では，$\Pi(\mu_0, \mu_1)$ の元を μ_0 と μ_1 の輸送計画 (transference plan) という)．即ち，

$$\Pi(\mu_0, \mu_1) := \{\pi \in \mathscr{P}(X \times X) \mid (\mathfrak{p}_i)_\sharp\pi = \mu_i \ (i = 0, 1)\}.$$

d が**測地距離 (geodesic distance)** であるとは，任意の $x, y \in X$ に対して次をみたす連続な曲線 $\gamma : [0, 1] \to X$ が存在することをいう：$\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ かつ各 $s, t \in [0, 1]$ で $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t| d(x, y)$．また，この γ を**測地線 (geodesic)**[14] という．測地距離が定める距離空間を**測地空間 (geodesic space)** という．X 上の測地線全体の成す集合を $\mathrm{Geo}(X)$ と書く．Euclid 空間は測地空間であり，線分が測地線に相当する．また Riemann 多様体 (M, g) は，Riemann 軽量 g が定める Riemann 距離 d_g によって自然に距離空間 (M, d_g) の構造を持つ．(M, g) が完備であれば (M, d_g) は測地空間になる．

(Y, d_Y) を距離空間とする．$\gamma : [0, T] \to Y$ **が絶対連続 (absolutely continuous)** であるとは，ある $g \in L^1((0, T))$ が存在し，$s, t \in [0, T]$, $s < t$ に対して

$$d_Y(\gamma(s), \gamma(t)) \le \int_{[s,t]} g \, \mathrm{d}\mathfrak{L}^1$$

が成り立つこととする．$g \in L^1_{\mathrm{loc}}(0, T)$ のとき，局所絶対連続という．$p \in [1, \infty]$ について，この g が $L^p(0, T)$ の元に取れる γ の全体を $\mathrm{AC}^p(0, T; Y)$ と書く．また，$\gamma \in \mathrm{AC}^1(0, T; Y)$ に対して $|\dot\gamma| : [0, T] \to \mathbb{R}$ を

$$|\dot\gamma|(t) := \varlimsup_{s \to t} \frac{d_Y(\gamma(s), \gamma(t))}{|s - t|}$$

で定め，γ の metric speed という．$\gamma \in \mathrm{AC}^p(0, T; Y)$ のとき，前述の g として $|\dot\gamma|$ が取れ，斯様な g の中で L^p-ノルム最小のものになる [7, Theorem 1.1.2]．定義から明らかに $\mathrm{Geo}(X) \subset \mathrm{AC}^\infty(0, 1; X)$ であり，各 $\gamma \in \mathrm{Geo}(X)$ に対して $|\dot\gamma| \equiv 1$.

[14] Riemann 幾何では，「最短測地線」と呼ばれるもの．ただ，本稿に最短でない測地線は登場しないので，簡単のため単に測地線と呼ぶ (同様の慣習は測度距離空間上の幾何解析に関する多くの研究論文でもしばしば採用されている．

$\mathrm{Lip}(X)$ ($\mathrm{Lip}_b(X)$) を，X 上の Lipschitz 連続関数の全体 (有界 Lipschitz 連続関数の全体) とする．$f \in \mathrm{Lip}(X)$ に対して，f の**局所 Lipschitz 定数** $|\nabla f|$ および (大域)**Lipschitz 定数** $\mathrm{Lip}(f)$ を以下で定める：

$$\begin{aligned} |\nabla f|(x) &:= \varlimsup_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{|f(y) - f(x)|}{d(y,x)} = \lim_{r \downarrow 0} \left(\sup_{y;\, d(x,y) \in (0,r)} \frac{|f(y) - f(x)|}{d(y,x)} \right), \\ \mathrm{Lip}(f) &:= \sup_{y \neq x} \frac{|f(y) - f(x)|}{d(y,x)}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

なお，底空間が Riemann 多様体 (特に $\mathbb{R}^m$) で f が C^1-級であれば局所 Lipschitz 定数は勾配ベクトル ∇f の長さに一致する．よって，以下ではこれらの記号を区別しない．$f : X \to \mathbb{R}$ に対して，「任意の $\gamma \in \mathrm{AC}^1(0,1;X)$ で

$$f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) \leq \int_0^1 g|\dot{\gamma}|\, \mathrm{d}\mathfrak{L}^1 \tag{3.2}$$

をみたす $g : X \to \mathbb{R}$ を f **の upper gradient** という．d が測地距離であれば $f \in \mathrm{Lip}(X)$ に対し，$|\nabla f|$ は f の upper gradient になる (詳しくは [8, Remark 2.8] 等を参照)．特にこのことから，$\mathrm{Lip}(f) = \sup_{x \in X} |\nabla f|(x)$ が直ちに分かる．

連続関数 $c : X \times X \to [0, \infty)$ は各 $x \in X$ で $c(x,x) = 0$ とする．c を費用関数 (cost function) とする [15] **最適輸送費用 (optimal transportation cost)** $\mathcal{T}_c : \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ を次で定める：

$$\mathcal{T}_c(\mu_0, \mu_1) := \inf_{\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)} \int_{X \times X} c(x,y)\, \pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y). \tag{3.3}$$

最適輸送費用を最小化する π を求めることを **Kantorovich の最適輸送問題**という．Prokhorov の定理の容易な応用により，$\Pi(\mu_0, \mu_1)$ はコンパクトと分かる．そのことから，右辺の inf を実現する π が存在することが容易に示せる (一意とは限らない)．これを**最適カップリング (optimal coupling)** という．なお，(3.3) を見れば，Theorem 1.1 が (1.1) を導くことは自明．

最適カップリング π の性質や $\mathcal{T}_c$ の $\mathscr{P}(X)^2$ 上の関数としての性質を調べることが，最適輸送理論の基本的な問題と言えるだろう．実際に，この章の後の節でそういった話題を扱う．

3.2 Kantorovich 双対性とその応用

Theorem 3.1 (Kantorovich 双対性) 各 $\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}(X)$ に対し，

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_c(\mu_0, \mu_1) &= \sup \left\{ \int_X g\, \mathrm{d}\mu_1 - \int_X f\, \mathrm{d}\mu_0 \,\middle|\, g, f \in C_b(X),\, g \circ \mathfrak{p}_1 - f \circ \mathfrak{p}_0 \leq c \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_X f^c\, \mathrm{d}\mu_1 - \int_X f\, \mathrm{d}\mu_0 \,\middle|\, f \in C_b(X) \right\}, \end{aligned}$$

ただし，$f^c(y) := \inf_{x \in X} \{f(x) + c(x,y)\}$ *(f の c-変換)*.

[15]最適輸送理論では費用関数として下半連続なものや負の値を取りうるもの (特に，下に非有界)，$c(x,x) \neq 0$ を考える問題もあるが，今回は扱わない．

証明 (の概略) は，下記 Theorem 3.4 と合わせてこの節の最後に述べる．ただ，その前に不等式 "$\geq$" だけなら直ぐに従うことを注意しておこう．実際, 任意の $\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)$ で $g \circ \mathfrak{p}_1 - f \circ \mathfrak{p}_0 \leq c$ を積分し，π について inf を，$(-f, g)$ について sup を取ればよい．また，第 2 の等号は第 1 式の意味を考えれば容易に分かる．g を f^c に置き換える代わりに，同様の操作を $-f$ に対して行ってもよい (つまり，$-f$ を $(-g)^c$ に置き換える).

Kantorovich 双対性の簡単な応用として，$\mathcal{T}_c$ は，$\mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X)$ の要素の凸結合に関して凸関数になることが分かる．他の応用については，特に $c = d$ の場合が基本的．この時には $f^c \in \mathrm{Lip}_b(X)$, $\mathrm{Lip}(f) \leq 1$ が容易に分かる．また元より $f \in \mathrm{Lip}(X)$, $\mathrm{Lip}(f) \leq 1$ であれば $f^c = f$ になる．従って，上記の f の置き換え操作を行ってから Theorem 3.1 の第 2 式を適用すれば次が得られる：

Corollary 3.2 (Kantorovich-Rubinstein の公式) 各 $\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}(X)$ に対し,

$$\mathcal{T}_d(\mu_0, \mu_1) = \sup \left\{ \int_X f \, \mathrm{d}\mu_1 - \int_X f \, \mathrm{d}\mu_0 \;\middle|\; f \in \mathrm{Lip}_b(X), \, \mathrm{Lip}(f) \leq 1 \right\}.$$

この評価から，熱分布間の最適輸送距離評価の最も易しい場合を含む，次の結果が従う：

Corollary 3.3 (W_1-評価と L^∞-微分評価の双対性) *$P(x, \cdot) \in \mathscr{P}(X)$ $(x \in X)$ を Markov 核とする．P の $f \in C_b(X)$ および $\mu \in \mathscr{P}(X)$ への作用をそれぞれ $Pf \in C_b(X)$, $P^*\mu \in \mathscr{P}(X)$ と書く．このとき，$C > 0$ について次は同値：*

(1) 各 $\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}(X)$ で $W_1(P^*\mu_0, P^*\mu_1) \leq C W_1(\mu_0, \mu_1)$.

(2) 各 $f \in \mathrm{Lip}_b(X)$ で $\mathrm{Lip}(Pf) \leq C \mathrm{Lip}(f)$.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2): μ, ν として Dirac 測度を考え，Corollary 3.2 を適用すればよい.

(2) $\Rightarrow$ (1): 各 $\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)$ を $\mathcal{T}_d(\mu_0, \mu_1)$ の最適カップリングとする．このとき, $f \in \mathrm{Lip}_b(X)$ に対して

$$\int_X f \, \mathrm{d}P^*\mu_1 - \int_X f \, \mathrm{d}P^*\mu_0 = \int_X Pf \, \mathrm{d}\mu_1 - \int_X Pf \, \mathrm{d}\mu_0 = \int_{X \times X} (Pf \circ \mathfrak{p}_1 - Pf \circ \mathfrak{p}_0) \, \mathrm{d}\pi$$

が成り立つ．この式の右辺の被積分関数に (2) を適用してから，左辺に Corollary 3.2 を適用すればよい. $\square$

Kantorovich 双対性を通じて, カップリングの最適性の特徴づけが得られる．説明の準備として概念を幾つか導入しよう．$\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}(X)$, $\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)$ とする．$f \in L^1(\mu_0)$, $g \in L^1(\mu_1)$[16] であって

$$\begin{cases} g \circ \mathfrak{p}_1 - f \circ \mathfrak{p}_0 \leq c, \\ g \circ \mathfrak{p}_1 - f \circ \mathfrak{p}_0 = c \quad \pi\text{-a.e.} \end{cases} \tag{3.4}$$

が成立するとき, $(-f, g)$ の組を (π に付随する)**Kantorovich potential** という．Kantorovich potential は，Theorem 3.1 で等号を成立させる関数の組と解釈できる (ただし，sup を取る関数の範囲に入っているとは限らない)．一般には Kantorovich potential は存在するとは限らず,

[16] 以下の条件のため，正確には a.e. の同値類を取らず，単に「可積分関数」と見るべき．

また一意性もあるとは限らない．(少なくとも，$(-f,g)$ が Kantorovich potential であれば，任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ について $(-f-\alpha, g+\alpha)$ もそう)．一方で，Kantorovich potential が存在すれば π は最適カップリングであることが直ちに分かる．また，$E\subset X\times X$ が費用関数 c に関して**巡回単調 (cyclically monotone)** であるとは，任意の $n\in\mathbb{N}$, $(x_i,y_i)\in E$ $(i=1,\ldots,n)$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} c(x_i,y_i) \le \sum_{i=1}^{n} c(x_i,y_{i+1})$$

が成り立つこととする (ただし $y_{n+1}=y_1$ とする；以下，この条件に関連する考察の際も同様)．また，$\pi\in\Pi(\mu_0,\mu_1)$ について，ある巡回単調集合 E で $\pi(E^c)=0$ をみたすものがあるとき，π を **(c-) 巡回単調カップリング**という．$(x,y)\in E$ を，ある輸送計画での輸送の出発点 x と目的地 y の組を集めた集合だと思うと，巡回単調性は，「目的地の入替 (置換) では費用を安くできない」ことを意味する．従って，輸送計画の最適性の幾何学的表現の一種であろうと解釈できる．実際にこの解釈はかなり正しいことが次から分かる：

Theorem 3.4 (最適カップリングの特徴づけ) $\mu_0,\mu_1\in\mathscr{P}(X)$ とし，$c : X\times X\to[0,\infty)$ を連続な費用関数とする [17]．また $\mathcal{T}_c(\mu_0,\mu_1)<\infty$ とする．このとき，$\pi\in\Pi(\mu_0,\mu_1)$ について，次は同値：

(1) π は $\mathcal{T}_c$-最適カップリング.

(2) π は c-巡回単調カップリング.

(3) X 上の可測関数 f,g の組で，(3.4) をみたすものが存在する.

更に，ある $c_i\in L^1(\mu_i)$ $(i=0,1)$ で $c\le c_0\circ\mathfrak{p}_0+c_1\circ\mathfrak{p}_1$ が成立すれば，(1)–(3) は次とも同値：

(4) π に関する *Kantorovich potential* が存在する.

巡回単調カップリングの定義から，Theorem 3.4 の応用として次が直ちに従う：

Corollary 3.5 (絶対連続による最適性の保存) *Theorem 3.4* の仮定のもと，π が $\mathcal{T}_c$-最適カップリングで $\pi'\in\mathscr{P}(X\times X)$, $\pi'\ll\pi$ であれば，$\pi'\in\Pi((\mathfrak{p}_0)_\sharp\pi',(\mathfrak{p}_1)_\sharp\pi')$ も $\mathcal{T}_c$-最適.

Proof of Theorem 3.1. 以下は [179, Theorem 5.10] の証明に基づく．概要のみ述べる．
Step 1: 巡回単調カップリング π_* の存在

$\mu_i^{(n)}=n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\delta_{x_{i,k}}$ を，$\mu_i^{(n)}\to\mu_i$ なるよう取る (例えば，μ_i 従う i.i.d. サンプリングを取る)．$\mu_0^{(n)}$ と $\mu_1^{(n)}$ の最適カップリング π_n が c-巡回単調であることは定義から容易に示せる．

$$\mathcal{C}_l := \left\{ (x_i,y_i)_{i=1}^{l}\in X^{2l} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{l} c(x_i,y_i)\le\sum_{i=1}^{l} c(x_i,y_{i+1}) \right\}$$

とおくと，$\mathcal{C}_l$ は閉集合であって，$\pi_n^{\otimes l}(\mathcal{C}_l)=1$．このことから，$c$-巡回単調性は測度の弱収束で保たれると分かる．よって，π_n の (部分列の) 弱収束極限 π_* は c-巡回単調になる．

[17] c の regularity が低いと反例がある ([179, Remark 5.11]；[179, Chapter 5] の Bibliographical Notes も参照).

Step 2: π_* で (3.4) をみたす $(-f, f^c)$ の存在

発見的考察として，関数の変換

$$(Sf)(x) := -\inf_{(x',y')\in \operatorname{supp}\pi_*}[-f(x') + c(x,y') - c(x',y')] \tag{3.5}$$

を考える (定義域は曖昧なままで進める；これは，c-変換を 2 回施す操作を，inf の範囲について修正したものになっている)．この変換に関する不動点 f_*(即ち $Sf_* = f_*$) が存在したとする．このとき，定義から $(x', y') \in \operatorname{supp}\pi_*$, $x \in X$ で次が成り立つ：

$$c(x', y') \le f_*(x) + c(x, y') - f_*(x').$$

よって $c(x', y') \le f_*^c(y') - f_*(x')$ となり，c-変換の定義から，この不等式で等号が成立する [18]．

上記のような f_* を構成したい．実際には，$(x_0, y_0) \in \operatorname{supp}\pi_*$，$f_0(x) := c(x, y_0) - c(x_0, y_0)$ とし，$f_* := \inf_n S^n f_0$ とする (S の定義から，$x \in \operatorname{supp}(\mathfrak{p}_0)_\sharp\pi_*$ では $Sf(x) \le f(x)$ をみたすことに基づき，「S の無限回の作用」を回数に関する inf で実現したものと解釈できる)．上記の発見的考察を実行に移すために $f_* \not\equiv -\infty$ が必要なので，これを示す (各 $x \in X$ で $f_*(x) < \infty$ は直ぐに分かる)．より強く，$f_*(x_0) = 0$ を示す．π_* の巡回単調性から $S^n f(x_0) \ge 0$ なので，$f_* \ge 0$．また $f(x_0) \le Sf_0(x_0) \le 0$ (最後の不等号は，S の定義の inf で $(x', y') = (x_0, y_0)$ の場合を考えれば得られる) より，$f_*(x_0) = 0$．このとき，定義から各 $(x', y') \in \operatorname{supp}\pi_*$ で $f_*^c(y') - f_*(x') = c(x', y')$ となることが，上記の発見的考察と同様にして分かる．

Step 3: 費用関数の近似

まず c が有界かつ Lipschitz 連続の場合に結論が従うことを見る．Step 2 の f_* について，$f_*(x_0) = 0$ より $f_*(y_0) \in \mathbb{R}$ となる．よって，f_*^c の定義と $f_* = -(-f_*^c)^c$ を用いると，$f_*, f_*^c \in C_b(X)$(特に Lipschitz 連続) が分かる．これを用いれば，Step2 で得た関係式を π_* で積分することで結論を得る (特に π_* が最適カップリングと分かる)．

一般の場合には，c を有界かつ Lipschitz 連続な関数で次のように近似する：

$$c_k(x, y) := \inf_{x', y' \in X}\left[c(x', y') \wedge k + k\left(d(x, x') + d(y, y')\right)\right].$$

この各近似段階で上記の f_* に当たるものを考えて，試験関数の列 $(-f_k, f_k^c)$ を作る．すると，これが Theorem 3.1 の sup を近似する列になることが示せる． □

Remark 3.6 (Kantorovich 双対性の試験関数の regularity) *Theorem 3.1* の証明から，試験関数は $\mathrm{Lip}_b(X)$ に制限してよいと分かる．ただしこれは，c の連続性に依っている．

Proof of Theorem 3.4. 以下の証明の流れは，[179, Theorem 5.10] を基にしている．簡単のため，(4) の直前に述べた条件が成立している場合のみ扱う．この場合には (1)(2)(4) の同値性を示せば充分.

(4)⇒(1)：各 $\pi' \in \Pi(\mu_0, \mu_1)$ で Kantorovich potential を積分すればよい．

(1)⇒(2)：もし Kantorovich potential$(-f, g)$ が存在したとすると，$\pi^{\otimes n}$-a.e. $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ で

$$\sum_{i=1}^n c(x_i, y_{i+1}) \ge \sum_{i=1}^n g(y_{i+1}) - f(x_i) = \sum_{i=1}^n g(y_i) - f(x_i) = \sum_{i=1}^n c(x_i, y_i) \tag{3.6}$$

[18] 証明の雰囲気だけ知りたい人は，この Step のここから先は読まなくてよい．

となり，π は c-巡回単調.

一般の場合には，Theorem 3.1 の sup を近似する列として $(-f_k, g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ をとる．すると，$c - g_k \circ \mathfrak{p}_1 + f_k \circ \mathfrak{p}_0 \to 0$ in $L^1(\pi)$ が容易に検証できる．部分列を取ることで概収束しているとしてよい．このとき，(3.6) は $(-f, g)$ を $(-f_k, g_k)$ に置き換えても第 1 の等号までは成り立つ．そこで $k \to \infty$ とすれば結論を得る．

(2)⇒(4)：Theorem 3.1 と同様にして f_* を構成する．$(-f_*, f_*^c)$ は (3.4) をみたすので可積分性だけが問題になる．$x_0, y_0 \in X$ を，$f_*(x_0) \in \mathbb{R}$, $f_*^c(y_0) \in \mathbb{R}$, $c_0(x_0) + c_1(x_1) < \infty$ なるよう取る (取れる)．このとき

$$f_*^c(y) \le c(x_0, y) + f_*(x_0) \le c_0(x_0) + c_1(y) + f_*(x_0)$$

より f_*^c は積分可能で，$\displaystyle\int_X f_*^c\, d\mu_1 \in [-\infty, \infty)$．同様に f_* も積分可能で，$\displaystyle\int_X f_*\, d\mu_0 \in (-\infty, \infty]$．ここで，

$$\int_X f_*^c\, \mathrm{d}\mu_1 - \int_X f_*\, \mathrm{d}\mu_0 = \int_{X\times X} c\, \mathrm{d}\pi \ge 0$$

であるから，$f_* \in L^1(\mu_0)$, $f_*^c \in L^1(\mu_1)$ が分かる． □

3.3 最適輸送写像の存在

Kantorovich 双対性の別の応用例として，最適輸送写像の存在に関する Brenier の定理を述べよう．写像 $\varphi_1, \varphi_2 : Y \to Z$ に対し，$\varphi_1 \times \varphi_2 : Y \to Z \times Z$ を $\varphi_1 \times \varphi_2(y) := (\varphi_1(y), \varphi_2(y))$ で定める．

Theorem 3.7 (Brenier) $X = \mathbb{R}^m$ とし，d を *Euclid* 距離とする．$c = d^2/2$ とおく．$\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^m)$, $\mu_0 \ll \mathfrak{L}^m$ で，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} |x|^2 \mu_i(\mathrm{d}x) < \infty$ $(i = 0, 1)$ とする．また，$\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)$ を $\mathcal{T}_c$-最適カップリングとする．このとき，ある可測写像 $T : X \to X$ であって，$\pi = (\mathrm{id} \times T)_\sharp \mu_0$ をみたすものが存在する．特に $T_\sharp \mu_0 = \mu_1$ が成立．また，ある凸関数 $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ が存在して，$T = \nabla\varphi$ と書ける [19].

Theorem 3.7 の T を**最適輸送写像**あるいは Brenier 写像という．ここでは，Brenier の定理は簡素化して述べている．一般的な主張および以下の Remark 3.8, Corollary 3.9 については，[178, Theorem 2.12 (ii)] 等を参照のこと．

Proof. ここでは考え方の概略のみ述べる．この流れに沿って議論は正当化できるが，関数の regularity は気にしないことにする．

仮定から，Theorem 3.4 (4) が成り立つことが容易に検証できる．$(-f, g)$ を Kantorovich potential とし，$(x_*, y_*) \in \operatorname{supp}\pi$ を (3.4) の第 2 式が成り立つ点とする．ここで (3.4) の第 1 式から，$x \mapsto f(x) + |x - y_*|^2/2$ は $x = x_*$ で最小．従って $\nabla(f + |\cdot - y_*|^2/2)(x_*) = 0$ となる．これを書き直すと，

$$\nabla f(x_*) = y_* - x_* \in \mathbb{R}^m \tag{3.7}$$

[19] 凸関数は局所 Lipschitz 連続なので，Rademacher の定理より，$\mathfrak{L}^m$-a.e. で微分可能.

となる．この考察から，

$$T(x) := x + \nabla f(x) \tag{3.8}$$

とおけば，定理の前半の主張が $\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)$ の最適性から確認できる．後半については，Theorem 3.1 の第 2 式を得た際の考え方により，

$$-f(x) = (-g)^c(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^m}\left\{-g(y) + \frac{|x-y|^2}{2}\right\} = \frac{|x|^2}{2} - \sup_{y\in\mathbb{R}^m}\left\{\langle x, y\rangle - \left(\frac{|y|^2}{2} - g(y)\right)\right\}$$

となるので，$\varphi(x) := |x|^2/2 + f(x)$ は凸関数．前述より $T = \nabla\varphi$ であるから，結論を得る．□

Remark 3.8 (Brenier の定理について)

(i) $\mathcal{T}_c$ の定義において，$\Pi(\mu_0, \mu_1)$ のうち $(\mathrm{id}\times T)_\sharp\mu_0$ *(*T は可測写像*)* の形のものに制限して inf を取るものを ***Monge* の最適輸送問題**と呼ぶ．歴史的にはこちらの方が *Kantorovich* の最適輸送問題問題よりも古い [20] が，より難解．実際，最適性を論じる以前に，上記をみたす T の存在すら非自明になる．例えば μ_0 が *Dirac* 測度であれば μ_1 が *Dirac* 測度の時以外にはこのような写像は存在しない．従って考察対象とする μ_0，μ_1 になんらかの制約が必要なことが分かる．*Theorem 3.7* は，「そのような写像が存在すること [21]，*Kantorovich* 問題の　解は全て *Monge* 問題の解になること」まで主張している．特にこの設定では，*Monge* 問題と *Kantorovich* 問題で最適輸送費用が一致する．

(ii) 様々な設定の元で最適輸送写像の存在や一意性あるいはその滑らかさ等の性質を調べることは，最適輸送理論の中心的な話題のひとつである．また最適輸送写像は然るべき意味で *Monge-Ampère* 方程式の解を与えることから，*Monge-Ampère* 方程式に関連する偏微分方程式 *([178, 179]* 参照*)* や複素幾何での研究もある *([30]* や，その参考文献参照*)*. ただ，それらについてはこれ以上深入りしない *(*私にはできない*)*.

(iii) *Brenier* の定理は次の意味で逆が成り立つ：もし $\mu_1 = (\nabla\varphi)_\sharp\mu_0$ となる凸関数 φ が存在すれば，$\nabla\varphi$ は最適輸送写像，即ち，$(\mathrm{id}\times\nabla\varphi)_\sharp\mu_0 \in \Pi(\mu_0, \mu_1)$ は最適カップリングになる．また関連して，$\mathbb{R}$ 上では分布関数を用いて具体的に最適輸送写像を記述することもできる *[178, Section 2.2]*.

(iv) 幾何学的には $\nabla f(x) \in T_x\mathbb{R}^m$ と見るべきであり，(3.7) は $T_x\mathbb{R}^m$ と $\mathbb{R}^m$ を同一視した書き方になっている．実際には，指数写像 $\exp_x : T_x\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ を用いて $\exp_{x_*}(\nabla f(x_*)) = y_*$ と (3.7) と書き直すことができる *(*従って，$T(x) := \exp_x(\nabla f(x))$ となる*)*．実際，この定式化で，*Riemann* 多様体上へと *Brenier* の定理は拡張されている *[58, 63, 138]*．また

$$\boxed{\textit{Kantorovich potential}\text{ の解析を通じて最適輸送写像を構成する}}$$

という考え方は，写像の構成を別の枠組で考える際の指導原理となっている [22].

最適輸送写像を構成することは，最適輸送問題に幾つかの有用な結果をもたらす．ここでは，そのうち易しいものとして，次を述べておこう．

[20] ただし $c = d$ の場合．Theorem 3.7 の設定よりも距離と合成する関数の凸性が悪いため難しい．

[21] 応用上，「写像の存在のみ必要 (最適性不要)」という場面ですら，Brenier の定理が用いられることがある！

[22] Theorem 3.7 の証明から，T が凸関数の微分で与えられるのは，Legendre 変換が有効である $\mathbb{R}^m$ 特有の事情. よって，設定を一般化する際には考慮しないのが適切 (凸関数の定義自体は，一般の測地距離空間上で可能).

Corollary 3.9 (最適カップリングの一意性) *Theorem 3.7* の設定の下，最適カップリングは一意的.

Proof. $\pi_0, \pi_1 \in \Pi(\mu_0, \mu_1)$ を最適カップリングとすると，$\pi_{1/2} := 2^{-1}(\pi_0+\pi_1) \in \Pi(\mu_0, \mu_1)$ も最適になる．従って，Theorem 3.7 より，$\pi_i = (\mathrm{id}\times T_i)_\sharp \mu_0$ をみたす $T_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ $(i = 0, 1/2, 1)$ が存在する．従って

$$\mu_1 = (T_{1/2})_\sharp \mu_0 = \frac{1}{2}\left((T_0)_\sharp \mu_0 + (T_1)_\sharp \mu_0\right)$$

を得るが，写像の定義より $T_0 = T_1 (= T_{1/2})$ μ_0-a.e. でなければならない． □

3.4 Wasserstein 距離

次に，最適輸送の中でも本論での主役となる Wasserstein 距離を導入する．$p \in [1, \infty]$ に対して，**L^p-Wasserstein 距離** $W_p : \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ を次で定める：

$$W_p(\mu, \nu) := \inf\left\{\|d\|_{L^p(\pi)} \mid \pi \in \Pi(\mu, \nu)\right\}.$$

$p < \infty$ であれば $W_p(\mu_0, \mu_1)^p = \mathcal{T}_{d^p}(\mu_0, \mu_1)$ となることは，定義から直ちに分かる．以下，記号 W_p を不特定の p で用いる時は $p < \infty$ を仮定する．また，W_p は値として ∞ を取りうる．そのような状況を除外して W_p を考えるための自然な (部分) 空間として，**L^p-Wasserstein 空間** $\mathscr{P}_p(X)$ を次で定める：

$$\mathscr{P}_p(X) := \{\mu \in \mathscr{P}(X) \mid \text{ある } x_0 \in X \text{ で } W_p(\delta_{x_0}, \mu) < \infty\}.$$

W_p は底空間 (X, d) の幾何学的特性を強く反映する．実際，以下の性質が知られている．

Theorem 3.10 (L^p-Wasserstein 距離の基本的な性質) $p \in [1, \infty)$ とする．

(i) W_p は $\mathscr{P}_p(X)$ 上の距離になる *[178, Theorem 7.3]*.

(ii) $\mu_n \in \mathscr{P}_p(X)$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ について，$W_p(\mu_n, \mu_\infty) \to 0$ は，「$\mu_n \to \mu$ (弱収束)，かつ，ある $x_0 \in X$ で $\int_X d(x_0, \cdot)^p \,\mathrm{d}\mu_n \to \int_X d(x_0, \cdot)^p \,\mathrm{d}\mu$」と同値 *[178, Theorem 7.12], [7, Proposition 7.1.5]*.

(iii) $(\mathscr{P}_p(X), W_p)$ は完備かつ可分 *[7, Proposition 7.1.5], [32]*.

(iv) X がコンパクトなら $\mathscr{P}_p(X)$ もコンパクト．

(v) $\mu, \nu \in \mathscr{P}_p(X)$ のとき，$W_p(\mu, \nu)^p$ の最適カップリングに対する *Kantorovich potential* が存在する．

(vi) d が測地距離であれば，W_p も $\mathscr{P}_p(X)$ 上の測地距離になる．

(vii) W_p は $\mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X)$ 上の弱収束に関して下半連続 *[7, Lemma 7.1.4]*.

(viii) W_p^p は $\mathscr{P}_p(X)$ の通常の意味での凸結合に関して凸.

これらの主張のうち，(iv), (vii) は (ii) から，(viii) は Kantorovich 双対性から容易に分かる．また，(v) は，参照点 $x_0 \in X$ と $x, y \in X$ に対して $d(x,y)^p \leq 2^{p-1}(d(x,x_0)^p + d(y,x_0)^p)$ が成り立つことを用いれば，Theorem 3.4 より直ちに従う．(vi) は後で別に述べる．(i)，および，底空間がコンパクトの場合の (ii) のみ (もう少し詳しい) 証明に言及する (非コンパクトの場合の証明のアイデアも，ある程度含まれている)．(iii) の証明は省略する．

(i) の証明のため，次の 2 つの補題を準備する．ひとつめの主張 (Lemma 3.11) は，正則条件つき確率の特別な場合に他ならない．

Lemma 3.11 (カップリングの分解 (disintegration); [31, Chapter 10] 等) 各 $\mu, \nu \in \mathscr{P}(X)$，$\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ に対して，次をみたす $(\nu_x)_{x\in X} \subset \mathscr{P}(X)$ が存在する：

(i) 各可測集合 $A \subset X$ に対して，$x \mapsto \nu_x(A)$ は可測.

(ii) 各有界可測関数 $h : X \times X \to \mathbb{R}$ に対し $\displaystyle\int_{X\times X} h \,\mathrm{d}\pi = \int_X \left(\int_X h(x,y)\,\nu_x(\mathrm{d}y)\right) \mu(\mathrm{d}x)$.

Lemma 3.12 (接着補題 (gluing lemma); [178, Lemma 7.6]) $\mu_i \in \mathscr{P}(X)$ $(i = 1,2,3)$ とし，$\pi_{12} \in \Pi(\mu_1,\mu_2)$, $\pi_{23} \in \Pi(\mu_2,\mu_3)$ とする．また，$\mathfrak{p}_{12} : X\times X\times X \to X\times X$, $\mathfrak{p}_{23} : X\times X\times X \to X\times X$ を $\mathfrak{p}_{12}(x,y,z) := (x,y)$, $\mathfrak{p}_{23}(x,y,z) := (y,z)$ と定める．このとき，$\pi_{123} \in \mathscr{P}(X\times X\times X)$ で，$(\mathfrak{p}_{12})_\sharp \pi_{123} = \pi_{12}$, $(\mathfrak{p}_{23})_\sharp \pi_{123} = \pi_{23}$ をみたすものが存在する．

Proof. Lemma 3.11 を用いて $\pi_{12}(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = \pi_{12}^y(\mathrm{d}x)\mu_2(\mathrm{d}y)$, $\pi_{23}(\mathrm{d}y\mathrm{d}z) = \pi_{23}^y(\mathrm{d}z)\mu_2(\mathrm{d}y)$ と分解する．$\pi_{123}(\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z) := \pi_{12}^y(\mathrm{d}x)\pi_{23}^y(\mathrm{d}z)\mu_2(\mathrm{d}y)$ とおくと，これが所望のものになる． □

Proof of Theorem 3.10 (i), (ii)(X: コンパクトの時). $W_2(\mu,\mu) = 0$ の証明: $\iota : X \to X\times X$ を $\iota(x) := (x,x)$ とする．このとき $\iota_\sharp\mu \in \Pi(\mu,\mu)$ なので，$W_p(\mu,\mu)^p \leq \displaystyle\int_{X\times X} d^p \,\mathrm{d}(\iota_\sharp\mu) = 0$.

$W_p(\mu,\nu) = 0 \Rightarrow \mu = \nu$ の証明：$\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ を最適カップリングとすると，$\pi(\iota(X)) = 1$. よって，各可測集合 $A \subset X$ に対して，

$$\mu(A) = \pi(A\times X) = \pi(A\times X \cap \iota(X)) = \pi(X\times A \cap \iota(X)) = \pi(X\times A) = \nu(A).$$

$W_p(\mu,\nu) = W_p(\nu,\mu)$ は自明．三角不等式を示す．$\pi_{12} \in \Pi(\mu_1,\mu_2)$, $\pi_{23} \in \Pi(\mu_2,\mu_3)$ を最適カップリングとし，π_{123} を Lemma 3.12 のものとする．このとき，Minkowski 不等式より，

$$W_p(\mu_1,\mu_3) \leq \left\{\int_X (d(x,y)+d(y,z))^p\,\pi_{123}(\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z)\right\}^{1/p} \leq W_p(\mu_1,\mu_2) + W_p(\mu_2,\mu_3).$$

次に (ii) を (コンパクトの場合に) 示す．以下の証明は [178, Theorem 7.12] による．この設定では p 次モーメントの収束は弱収束から自動的に従うので，W_p での収束と弱収束の同値性を示せばよい．また W_p は W_1 と同値なので，$p = 1$ としてよい．Corollary 3.2 より，W_p での収束が弱収束を導くことは直ちに分かる．逆向きは同じく Corollary 3.2 による．$x_0 \in X$ を参照点とする．(3.4) 直後の，Kantorovich potential の非一意性に関する注により，定数をずらすことで試験関数の族は $f(x_0) = 0$ をみたすとしてよい．すると，Ascoli-Arzelà の定理から，上記制約を加えた試験関数の全体は一様収束位相でコンパクトになると分かる．このことを使えば，μ_n が μ に弱収束しているとき，$\displaystyle\int_X f\,\mathrm{d}\mu_n \to \int_X f\,\mathrm{d}\mu$ は，試験関数 f について一様に収束することが容易に示せる．よって W_1 の収束を得る． □

(vi) の W_p-測地線がどのような形で実現されるか，初学者には想像し難いと思われる．Theorem 3.7 の設定であれば，$\sqrt{2\mathcal{T}_{d^2/2}} = W_2$ に注意すると比較的具体的に構成できるので，まずはこれを説明しておこう．以下しばらく，記号は Theorem 3.7 に依拠するものとする．まず

$$T_t := (1-t)\mathrm{id} + tT, \quad \mu_t = (T_t)_\sharp \mu_0 \tag{3.9}$$

とおく．この $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ が W_2-測地線になることを示す．$0 \leq s < t \leq 1$ とする．まず，$(T_s \times T_t)_\sharp \mu_0 \in \Pi(\mu_s, \mu_t)$ と T_t の定義より，

$$\begin{aligned} W_2(\mu_s, \mu_t) &\leq \sqrt{\int_X |T_t(x) - T_s(x)|^2 \, \mu_0(\mathrm{d}x)} \\ &= (t-s)\sqrt{\int_X |T(x) - x|^2 \, \mu_0(\mathrm{d}x)} = (t-s) W_2(\mu_0, \mu_1). \end{aligned}$$

一方で，W_2 の三角不等式と上の関係式を (s,t) の組として $(0,s)$ および $(t,1)$ で用いたものから，

$$\begin{aligned} W_2(\mu_0, \mu_1) &\leq W_2(\mu_0, \mu_s) + W_2(\mu_s, \mu_t) + W_2(\mu_t, \mu_1) \\ &\leq (s + (t-s) + (1-t)) W_2(\mu_0, \mu_1) = W_2(\mu_0, \mu_1) \end{aligned}$$

を得る．従って前述の不等式で等号が成立するので結論を得る．この構成を言葉で述べると次のようになる：まず，各 $x \in X$ に対して，x にある mass の輸送先を $T(x)$ で指定する．次に，x と $T(x)$ の間を線形補間の $t : 1-t$ 内分点を考え，x を動かして写像 T_t を作る．そして，各 t で μ_0 を T_t で押し出してできる測度の族を考えると，これが W_2 の測地線になる．

3.5 最適輸送の補間

Theorem 3.10 で紹介した Wasserstein 距離の性質のうち，(vi) については，測地線をもっと大きな空間に持ち上げて，その射影として実現できること (重畳原理) が知られている．その作られ方から最適輸送が底空間の測地線に沿って連続的に移送されることが分かる．これは確率測度を連続的な輸送で補間したものと考えられるが，対応する補間を Kantorovich potential に対しても考えることができる．

まず，少し記号を用意しよう．以下，経路空間 $C([0,T];X)$ には一様収束距離を定めているものとする．$\mathrm{Geo}(X) \subset C([0,1];X)$ は閉部分集合になる．$t \in [0,T]$ に対して，evaluation map $e_t : C([0,T];X) \to X$ を，$e_t(\gamma) := \gamma(t)$ で定める．

Theorem 3.13 (重畳原理 (Superposition principle) [134]) *$\mu_\cdot \in \mathrm{AC}^p(0,T;\mathscr{P}_p(X))$ (ただし $p \in (1,\infty)$) とする．このとき，$\Xi \in \mathscr{P}(C([0,T];X))$ で，以下の性質をみたすものが存在する．*

(i) $\mathrm{supp}(\Xi) \subset \mathrm{AC}^p(0,T;X)$.

(ii) 各 $t \in [0,T]$ で $(e_t)_\sharp \Xi = \mu_t$.

(iii) $|\dot\mu|(t)^p = \int_{C([0,T];X)} |\dot\gamma|(t)^p \, \Xi(\mathrm{d}\gamma)$ $\mathfrak{L}^1$-*a.e.* t．ここから特に，

$$\int_0^T |\dot\mu|(t)^p \, \mathrm{d}t = \int_{C([0,T];X)} \int_0^T |\dot\gamma|(t)^p \, \mathrm{d}t \, \Xi(\mathrm{d}\gamma).$$

特に，d を測地距離とすると，$\mu_i \in \mathscr{P}_p(X)$ $(i = 0, 1)$ に対し次をみたす $\Xi \in \mathscr{P}(C([0,1]; X))$ が存在する：

(i)′ $\mathrm{supp}(\Xi) \subset \mathrm{Geo}(X)$.

(ii)′ $\mu_t := (\mathrm{e}_t)_\sharp \Xi$ とおくと，$(\mu_t)_{t\in[0,1]} \in \mathrm{Geo}(\mathscr{P}_p(X))$

(iii)′ 各 $t, s \in [0, 1]$ で $(e_s \times e_t)_\sharp \Xi \in \Pi(\mu_s, \mu_t)$ は $\mathcal{T}_{d^p}$ に関する最適カップリング

この Ξ を**動的最適カップリング** ***(dynamic optimal coupling)*** という．また，μ_0 と μ_1 が与えられたとき，それらを繋ぐ $(\mu_t)_{t\in[0,1]} \in \mathrm{Geo}(\mathscr{P}_p(X))$ のことを，最適輸送理論では**移送補間** ***(displacement interpolation)*** と呼ぶ.

前半部分の説明は略す．Theorem 3.13 の後半部分 (W_p 測地線に関する主張) の説明は，比較的容易にできる．$\Psi : X \times X \to \mathrm{Geo}(X)$ を，(x_0, x_1) に対して x_0 と x_1 を結ぶ測地線を対応させる写像とする．このような写像のうち可測なものが，measurable selection theorem を用いて構成できる [23]．一旦可測性が保証されれば，$\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)$ を W_p-最適カップリングとして $\Xi := \Psi_\sharp \pi \in \mathscr{P}(C([0,1]; X))$ とおけば，これが所望のものになる．なお，以下で主に用いるのは $p = 2$ の場合.

Brenier の定理の仮定の下では，$\tilde{T} : \mathbb{R}^m \to \mathrm{Geo}(\mathbb{R}^m)$ を $\tilde{T}(x) := (T_t(x))_{t\in[0,1]}$ と定め，$\Xi := \tilde{T}_\sharp \mu_0$ とすれば，上記の性質をみたす Ξ が構成できる．一方，Theorem 3.13 には，Brenier の定理にあったような μ_0 の絶対連続性の仮定は必要ないことを注意しておく.

もう一点，(iii)(iii)′ について補足しておこう．$\gamma \in \mathrm{AC}^p(0, 1; X)$ に対して，$\displaystyle\int_0^1 |\dot{\gamma}|(t)^p \,\mathrm{d}t$ を γ の p-エネルギーという．d が測地距離であることから，

$$d(x_0, x_1)^p = \inf \left\{ \int_0^1 |\dot{\gamma}|(t)^p \,\mathrm{d}t \;\middle|\; \gamma \in \mathrm{AC}^p(0, 1; X),\, \gamma(0) = x_0,\, \gamma(1) = x_1 \right\} \tag{3.10}$$

が直ちに分かる．これは，metric speed $|\dot{\gamma}|$ を通常の意味での「曲線の微分ベクトルの長さ」だと思えば，変分法でよく知られている「端点を固定した曲線の p-エネルギーの下限が距離 (の p 乗) になる」という事実に他ならない．W_p は測地距離であるから，やはり同様の性質が成り立つ．また，Theorem 3.13 (iii) は，$\mathrm{AC}^p(0, 1; \mathscr{P}_p(X))$ に属する曲線の p-エネルギーは，「底空間の曲線 γ に対する p-エネルギーを，Ξ で γ について積分したもの」として表示できる Ξ が常に存在することを主張している.

$p \in (1, \infty)$ とし, d を測地距離とする．$\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}_p(X)$ に対して, 費用関数 d^p は Theorem 3.4 の Kantorovich potential 存在のための充分条件をみたすことが容易に検証できる．このとき，対応する Kantorovich potential の補間も考えることができる．輸送費用に設定を直すため p 乗すると，各 $t \in (0, 1)$ で

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{p^{-1}d^p}(\mu_0, \mu_1) = \frac{1}{p} W_p(\mu_0, \mu_1)^p &= \frac{t}{p} \left(\frac{W_p(\mu_0, \mu_t)}{t} \right)^p + \frac{1-t}{p} \left(\frac{W_p(\mu_t, \mu_1)}{1-t} \right)^p \\ &= \mathcal{T}_{tp^{-1}(d/t)^p}(\mu_0, \mu_t) + \mathcal{T}_{(1-t)p^{-1}(d/(1-t))^p}(\mu_t, \mu_1)\end{aligned}$$

を得る ($1/p$ は，ある種の正規化定数)．これを踏まえると，次の形の補間が自然と言える.

[23]Euclid 空間の場合とは異なり，一般には端点を与えるごとにそれらを結ぶ測地線が一意とは限らない.

Theorem 3.14 (双対補間) $\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}_p(X)$ とし，$\Xi \in \mathscr{P}(C([0,1];X))$ を $\mathcal{T}_{p^{-1}d^p}(\mu_0, \mu_1)$ の動的最適カップリングとする．$(-f, g)$ を $\mathcal{T}_{p^{-1}d^p}(\mu_0, \mu_1)$ に対する *Kantorovich potential* とする．各 $t \in (0,1]$ に対して $\mu_t := (e_t)_\sharp \Xi$ とし，$Q_t f : X \to \mathbb{R}$ を次で定める：

$$Q_t f(y) := \inf_{x \in X} \left[f(x) + \frac{t}{p} \left(\frac{d(x,y)}{t} \right)^p \right]. \tag{3.11}$$

このとき，$(-Q_t f, g)$ は $\mathcal{T}_{(1-t)p^{-1}(d/(1-t))^p}(\mu_t, \mu_1)$ に対する *Kantorovich potential* になる．

この種の補間については，[179, Chapter 7] を参照のこと．この定理を Kantorovich potential の微分が最適輸送写像を与えることと組み合わせると，発見的考察の際に威力を発揮する．

Proof. まず，(3.4) より $g = Q_1 f$．また，$x, y, z \in X$ について，三角不等式と p 乗の凸性から

$$d(x,y)^p \le t \left(\frac{d(x,z)}{t} \right)^p + (1-t) \left(\frac{d(z,y)}{1-t} \right)^p \tag{3.12}$$

が成り立つ．これを用いると，

$$Q_1 f(y) - f(z) - \frac{t}{p} \left(\frac{d(z,x)}{t} \right)^p \le \frac{1}{p} \left(d(z,y)^p - t \left(\frac{d(z,x)}{t} \right)^p \right) \le \frac{1-t}{p} \left(\frac{d(x,y)}{1-t} \right)^p \tag{3.13}$$

を得る．よって，最左辺で $z \in X$ について sup を取れば，目標とする (3.4) の第 1 式に相当する不等式が得られる．次に，(3.12) において，$d(x,z) = td(x,y)$, $d(y,z) = (1-t)d(x,y)$ が成り立つ (つまり，z が x, y を結ぶ測地線上の $t : 1-t$ 内分点にある) とき等号が成立することに注意する．このことを $(-f, Q_1 f)$ が $\mathcal{T}_{p^{-1}d^p}(\mu_0, \mu_1)$ に対する Kantorovich potential であることと合わせると，Ξ-a.e.γ に対して，

$$\begin{aligned} Q_1 f(\gamma_1) - Q_t f(\gamma_t) &\ge Q_1 f(\gamma_1) - f(\gamma_0) - \frac{t}{p} \left(\frac{d(\gamma_0, \gamma_t)}{t} \right)^p \\ &= \frac{1}{p} d(\gamma_0, \gamma_1)^p - \frac{t}{p} \left(\frac{d(\gamma_0, \gamma_t)}{t} \right)^p = \frac{1-t}{p} \left(\frac{d(\gamma_t, \gamma_1)}{1-t} \right)^p \end{aligned}$$

となる．これを前の評価と合わせれば，(3.4) に相当する性質を得る．

最後に可積分性を確認する．まず仮定より $f \in L^1(\mu_0)$，$g \in L^1(\mu_1)$．よって，$x_0 \in X$, $f(x_0) \neq \infty$, $y_0 \in X$, $g(y_0) \neq -\infty$ なる $x_0, y_0 \in X$ が存在する．このとき (3.13) より，

$$g(y_0) - \frac{1-t}{p} \left(\frac{d(x, y_0)}{1-t} \right)^p \le Q_t f(x) \le f(x_0) + \frac{t}{p} \left(\frac{d(x, x_0)}{t} \right)^p$$

を得る．よって，$\mu_t \in \mathscr{P}_p(X)$ より $Q_t f \in L^1(\mu_t)$. □

(3.11) を **Hopf-Lax 公式**といい，Q_s を **Hopf-Lax 半群**という [24]．特に q を p の Hölder 共役指数 (即ち $p^{-1} + q^{-1} = 1$) とすると，$\varphi_t := Q_t \varphi$ は次の **Hamilton-Jacobi 方程式**

$$\partial_t \varphi_t + \frac{1}{q} |\nabla \varphi_t|^q = 0 \tag{3.14}$$

[24] d が測地距離であれば，半群性が示せる．呼称はこの事実に起因する．

を各 $x \in X$ に対して *a.e.* $t > 0$ でみたす．特に，t-微分を右上微分 ($\overline{\lim}$ で右微分を取ったもの) に置き換えると "$\leq$" は全ての t, x で成り立つ．この関係式は，仮に t, x の摂動で $Q_t f$ の inf を実現する点が常に存在し共通の点であれば，容易に検証できる．実際に t, x の摂動で inf の近似はあまり悪い振る舞いをしないと分かり，それを利用すれば結論が従う．なお，Hopf-Lax 公式は，Euclid 空間上では，(3.14) の局所 Lipschitz 定数を通常の微分の絶対値としたものの粘性解になることが知られている [25]．ただし，上記 (3.14) の証明では粘性解の概念は用いない．

上記 (3.14) を含め，距離空間上での Q_s の基本的な性質については，[8, 9, 119] およびその参考文献を参照のこと．Hopf-Lax 半群自体は，厳密な議論においても強力な道具であり，種々の関数不等式の証明に利用される．のちの 6.3 節や 9.2 節の議論でも，その一端に触れることになる．また，この半群は連続関数の Lipschitz 関数による近似として使えることを付記しておく．

4 Otto 解析と熱分布

3.5 節で，Riemann 多様体上と同様に L^2-Wasserstein 空間 $(\mathscr{P}_2(X), W_2)$ は測地空間になること，および，曲線の 2-エネルギーの下限として W_2 が実現されることを見た．底空間が Riemann 多様体の場合，更に，$\mathscr{P}_2(X)$ 上に各点毎の接空間と W_2 に整合する接空間上の内積 (Riemann 計量) を**形式的に**定めることができる [156, 157]．これを用いて L^2-Wasserstein 空間上での微分法を展開することで，様々な発見的考察が可能になる．これを Otto 解析という．その後，「そうやって得た "定理" を厳密に定式化し，示す」という過程を経て，この種の議論は最適輸送理論の発展に大きく寄与してきた．この章では，$X = \mathbb{R}^m$ に Euclid 距離と 2 章の重みつき測度 $\mathfrak{m}$ を付与した測度距離空間 (本質的なアイデアはこの場合で尽きる) 上で理論を展開する．

顕著な帰結として，この形式的構造に則って，$\mathscr{P}_2(X)$ に値を取る曲線として実現される幾つもの (非線形) 偏微分方程式が適切なポテンシャル関数に対する勾配流になる，ということが挙げられる (Remark 4.7)．従って，$(\mathscr{P}_2(X), W_2)$ 上のポテンシャル関数の特性と，方程式の解の挙動を連動させて考えることが可能になる．確率論との関係では，特に，

$$\boxed{\text{熱分布が，相対エントロピー汎関数の勾配流になる}}$$

ことが重要である．1 章で述べたように，この性質 (を厳密化すること) が，熱分布を介して複数の広義の曲率次元条件の間の関係を橋渡しをしていく上での基礎となる．

4.1 L^2-Wasserstein 空間上の形式的 Riemann 構造

2 章と同様に，重みつき測度 $\mathfrak{m}$ を，重み関数 $V \in C^1(\mathbb{R}^m)$ を用いて $\mathfrak{m} := \mathrm{e}^{-V}\mathfrak{L}^m$ と定める．まず，天下り的ではあるが，$\mu \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m)$ における "接空間"$T_\mu\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m)$ とその上の "Riemann

[25] 一般に有限の t で特異性を生成する場合があり，古典解が (t について大域的に) 存在するとは限らない．

計量” (正値非退化双線形形式) $\mathbf{g}_\mu : T_\mu\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m)\times T_\mu\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m)\to\mathbb{R}$ を以下のように定める [26]：

$$
\begin{aligned}
T_\mu\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m) &:= \overline{\left\{\nabla\varphi : \mathbb{R}^m \text{ 上の } C^\infty\text{-勾配ベクトル場} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^m}|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}\mu<\infty\right\}}^{L^2(\mu)}, \\
\mathbf{g}_\mu(Z,Z') &:= \int_{\mathbb{R}^m}\langle Z,Z'\rangle\,\mathrm{d}\mu. \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

$T_\mu\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m)$ がいかなる意味で接空間であるのかを見るため，$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m)$ 上の曲線と，その接ベクトルについて考えよう．$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m)$ の元を連続体の密度分布とみなした時，$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m)$ 上の曲線 $(\mu_t)_t$ は (総質量を保存する) 連続体の運動と考えられる．従って，μ_t の $\mathfrak{m}$ に関する密度関数を (存在するとして)ρ_t と書くと，ρ_t は，質量保存則あるいは**連続方程式 (continuity equation)** と呼ばれる次の関係式を (weak sense で) みたす勾配ベクトル場 $\nabla\varphi_t$[27] が存在する：

$$\partial_t\rho_t+\nabla^{\mathfrak{m}}\cdot(\rho_t\nabla\varphi_t)=0, \tag{4.2}$$

ただし，$\nabla^{\mathfrak{m}}\cdot$ は，測度 $\mathfrak{m}$ に関する ∇ の共役微分 ($\mathfrak{m}=\mathfrak{L}^m$ のとき，通常の発散 $\nabla\cdot$ に一致)．つまり，弱形式で書くと，各 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ に対して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^m}f\,\mathrm{d}\mu_t=\int_{\mathbb{R}^m}\langle\nabla f,\nabla\varphi_t\rangle\,\mathrm{d}\mu_t \tag{4.3}$$

となる．$\nabla\varphi_t$ は密度 ρ_t の無限小時間での変化の仕方を記述する量と考えられる．実際，連続体の典型的な時間変化は，ある微分同相写像の 1-パラメータ族 $(\psi_t)_t$ によって，$\mu_t:=(\psi_t)_\sharp\mu_0$ として引き起こされる．ここで $\partial_t\psi_t=\nabla\varphi_t$ が成り立っているとすると，μ_t は (4.3) をみたすことが容易に確認できる．この観点から見れば，接空間の定義が自然なものと分かる．また，Riemann 幾何でそうするように，(4.2) あるいは (4.3) が成り立つとき $\dot{\mu}_t=\nabla\varphi_t$ と書く．

ここで，上で定めた接空間と Riemann 計量を用いて測地距離の変分表示 (3.10) の右辺に相当する量を $\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m)$ 上で考えることができる．すると，これが (形式的には)L^2-Wasserstein 距離 W_2 と一致する：

Theorem 4.1 (Benamou-Brenier 公式) *$\mu_i\in\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m)$，$\mu_i\ll\mathfrak{m}$ とする $(i=0,1)$．また $p=2$ とする．このとき，Otto 解析の形式的な計算を認めると，次が成立：*

$$
\begin{aligned}
W_2(\mu_0,\mu_1)^2 &= \inf\left\{\int_0^1\int_{\mathbb{R}^m}|\nabla\varphi_t|^2\,\mathrm{d}\mu_t \;\middle|\; (\mu_t,\varphi_t)_{t\in[0,1]}\text{ は (4.3) をみたす.}\right\} \\
&= \inf\left\{\int_0^1\int_{\mathbb{R}^m}|\nabla\varphi_t|^2\,\mathrm{d}\mu_t \;\middle|\; (\mu_t,\varphi_t)_{t\in[0,1]}\text{ は (4.3), (3.14) をみたす.}\right\}. \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

ここで，制約条件は，$(\mu_t)_t$ が μ_0 と μ_1 を結ぶ (絶対連続) 曲線であること，特に端点で μ_0, μ_1 と各々一致することを含めている．

第 1 の等式が (3.10) に対応している．この意味で，上で導入した形式的な Riemann 構造は W_2 と整合している．そして第 2 の等式で見るように，この関係は接ベクトルに追加の条件を課しても成り立つ．(4.4) を **Benamou-Brenier 公式**という．なお，この公式は (適切な仮定の下で) 厳密に成り立つ．[7, 178, 179] および，その参考文献を参照．

[26] $\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m)$ は通常の凸結合の意味で凸集合であり，端点集合が境界を成すと考えられる．その意味で境界つき多様体として扱うのが本来であろうが，ここでは簡単のため境界のことを無視している．別の言い方をすれば，μ として端点ではない元を常に想定している．

[27] 一般に φ は時間 t に依存する．

Proof. 様々な関数の regularity は保証されている前提で概要を述べる．積分と微分の順序交換等も自由に行う．

まず，主張の第 1 の等号の "≤" を示す．$W_2^2/2$ に Theorem 3.1 を適用し (3.11) を用いると，

$$\frac{1}{2}W_2(\mu_0,\mu_1)^2 = \sup_{f\in C_b(\mathbb{R}^m)}\left[\int_{\mathbb{R}^m} Q_1 f\,\mathrm{d}\mu_1 - \int_{\mathbb{R}^m} f\,\mathrm{d}\mu_0\right] \tag{4.5}$$

を得る．ここで，右辺の sup の中身を f に依らない量で評価する．(4.3) をみたす $(\mu_t,\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ を任意に取る．ここで，$\lim_{s\downarrow 0} Q_s f = f$ であるから，微積分学の基本定理から，

$$\int_{\mathbb{R}^m} Q_1 f\,\mathrm{d}\mu_1 - \int_{\mathbb{R}^m} f\,\mathrm{d}\mu_0 = \int_0^1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^m} Q_t f\,\mathrm{d}\mu_t\right)\mathrm{d}t$$

が成り立つ．よって，(4.3) と (3.14) より，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} Q_1 f\,\mathrm{d}\mu_1 - \int_{\mathbb{R}^m} f\,\mathrm{d}\mu_0 &= \int_0^1\int_{\mathbb{R}^m}\left(\langle\nabla Q_t f,\nabla\varphi_t\rangle - \frac{1}{2}|\nabla Q_t f|^2\right)\mathrm{d}\mu_t\,\mathrm{d}t\\ &\le \frac{1}{2}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^m}|\nabla\varphi_t|^2\,\mathrm{d}\mu_t\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

但し，最後の不等号は平方完成による．f および $(\mu_t,\varphi_t)_t$ は任意なので，目標の "≤" を得る．

次に，第 2 の等号の "≥" を示す．これを示せば証明が終わる．$(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ を (3.9) で構成した W_2-測地線とし，$W_2(\mu_0,\mu_1)^2/2$ の Kantorovich potential $(-\varphi_0, Q_1\varphi_0)$ に対して $\varphi_t := Q_t\varphi_0$ とする．各 $t\in[0,1]$ で $\mu_t \ll \mathfrak{m}$ となることは認める [28]．Theorem 3.7 の証明から，定理の写像 T は $T(x) = x + \nabla\varphi_0(x)$ をみたすとしてよい．このとき (3.9) より，各 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ で

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\int_{\mathbb{R}^m} f\,\mathrm{d}\mu_t = \int_{\mathbb{R}^m}\langle\nabla f,\nabla\varphi_0\rangle\,\mathrm{d}\mu_0$$

が成り立つ．これを $t>0$ に拡張する．Theorem 3.14 を用いて Theorem 3.7 の証明をなぞることで，$\mathcal{T}_{d^2/(2(1-t))}(\mu_t,\mu_1)$ に対して μ_t を μ_1 にうつす最適輸送写像は $\mathrm{id} + (1-t)\nabla\varphi_t$ で与えられると分かる [29]．また，$(\mu_{(1-s)t+s})_{s\in[0,1]}$ は μ_t と μ_1 を結ぶ W_2-測地線であり，前述の最適輸送写像から (3.9) の方法で作る測地線と一致する [30]．よって，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^m} f\,\mathrm{d}\mu_t = \frac{1}{1-t}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\int_{\mathbb{R}^m} f\,\mathrm{d}\mu_{(1-s)t+s} = \int_{\mathbb{R}^m}\langle\nabla f,\nabla\varphi_t\rangle\,\mathrm{d}\mu_t$$

を得る．即ち $(\mu_t,\varphi_t)_t$ は (4.3) をみたす．更に，3.5 節で見たように，φ_t は (3.14) をみたす．ここで，再び Theorem 3.7 から，

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^m}|\nabla\varphi_0|^2\,\mathrm{d}\mu_0 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^m}|T(x)-x|^2\,\mu_0(\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}W_2(\mu_0,\mu_1)^2$$

が成り立つ．前と同様に Theorem 3.14 を用いて上記の考察を基に $t\in(0,1]$ のときを考えると，

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^m}|\nabla\varphi_t|^2\,\mathrm{d}\mu_t = \frac{1}{1-t}\mathcal{T}_{d^2/(2(1-t))}(\mu_t,\mu_1) = \frac{1}{2(1-t)^2}W_2(\mu_t,\mu_1)^2 = \frac{1}{2}W_2(\mu_0,\mu_1)^2$$

が成り立つ．よって，この $(\mu_t,\varphi_t)_t$ に対して (4.4) の最右辺の inf の中身の量を考えれば，目標であった不等式 "≥" を得る． □

[28] これは厳密に示せる；例えば $V=0$ のときに下記 Theorem 5.8 (iv) を適用すれば，Definition 5.2 から従う．
[29] "$1-t$" は，Theorem 3.7 の設定との費用関数の違いから来る補正項．
[30] W_2-測地線の一意性による．これは厳密に成り立つ．下記 Remark 5.14 参照．

4.2 Otto 解析における，Wasserstein 空間上の勾配流

前節の形式的 Riemann 構造の元で，$(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m), W_2)$ 上の相対エントロピー汎関数の勾配流が熱分布を与えることを検証しよう．まず，相対エントロピー汎関数を定義するための準備として，測度距離空間の枠組で，次の Definition 4.2 で条件をひとつ導入する．端的に言えば，この条件の下で Definition 4.4 の定義に登場する積分が正当化できる．大筋だけを掴みたい場合は，これらの条件の周辺の記述は一旦飛ばし，Definition 4.4 を正当と認めた上で Theorem 4.5 以降を読んでよい．

Definition 4.2 (条件 (V)) 測度距離空間 $(X, d, \mathfrak{m})$ について，ある $c > 0$ と $x_0 \in X$ で

$$\int_X \exp\left(-cd(x_0, x)^2\right)\, \mathfrak{m}(\mathrm{d}x) < \infty.$$

が成り立つとき，「(V) をみたす」と言うことにする．

Remark 4.3 (条件 (V) について)

(i) (V) は，然るべき設定で *F.-Y. Wang* の *dimension-free Harnack* 不等式から示すことができる；*[20, (5.6.3)]* を積分すればよい．

(ii) (V) のもと，重みつき *Riemann* 多様体 M *(2* 章参照*)* 上の熱方程式の L^1-解は総熱量を保つ *(*保存的である*)* ことが知られている．即ち，$f \in L^1(\mathfrak{m})$，$f \geq 0$ に対して，各 $t > 0$ で $\|P_t f\|_1 = \|f\|_1$ *(*例えば *[81, Theorem 9.1]* 参照．実際，(V) は *[81, (9.2)]* と同値*)*．なお，このことは *7.1* 節で定義される測度距離空間上の熱半群に対しても *(*線形性の仮定なしに*)* 成り立つ *[8, Theorem 4.20, Remark 4.21]*.

Definition 4.4 (相対エントロピー (relative entropy)) $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}} : \mathscr{P}_2(X) \to (-\infty, \infty]$ を，条件 (V) の下で次のように定義する：

$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) := \begin{cases} \displaystyle\int_X \rho \log \rho \, \mathrm{d}\mathfrak{m} & (\mu = \rho\, \mathfrak{m} \text{ のとき}), \\ \infty & (\text{そうでないとき}). \end{cases} \tag{4.6}$$

ここで，「$\mu = \rho\,\mathfrak{m}$」は「$\mu \ll \mathfrak{m}$，かつ，$\rho = \dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}$」を意味する．

技巧的な話ではあるが，$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の well-definedness ($\rho \log \rho$ の積分が測度論的な意味で定義可能かどうか) について論じておこう [31]．X 上の測度 $\tilde{\mathfrak{m}}$ が $\tilde{\mathfrak{m}} \ll \mathfrak{m}$ をみたすとき，相対エントロピーに対する参照測度の変換公式 (例えば [8, Lemma 7.2] 参照) より，

$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) = \mathrm{Ent}_{\tilde{\mathfrak{m}}}(\mu) + \int_X \log \frac{\mathrm{d}\tilde{\mathfrak{m}}}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\, \mathrm{d}\mu \tag{4.7}$$

が成り立つ [32]．この式と (V) を踏まえて，

$$\tilde{\mathfrak{m}} := \frac{1}{Z} \exp\left(-cd(x_0, \cdot)^2\right)\, \mathfrak{m}, \quad Z := \int_X \exp\left(-cd(x_0, x)^2\right) \mathfrak{m}(\mathrm{d}x)$$

[31] 通常, 相対エントロピーと言うときには $\mathfrak{m}$ は確率測度であり, その場合は Jensen の不等式から $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) \in [0, \infty]$ となる．よって，その設定では well-definedness は問題にならない．

[32] 両辺の一方が well-defined であれば他方もそうなる，という意味を含めている．

としよう．すると，$\tilde{\mathfrak{m}} \in \mathscr{P}(X)$ となるから $\mathrm{Ent}_{\tilde{\mathfrak{m}}}(\mu) \in [0,\infty]$．更に，$\mu \in \mathscr{P}_2(X)$ より (4.7) の右辺第 2 項は $\mathbb{R}$ に属する．よって $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu)$ は $(-\infty,\infty]$-値として全ての $\mu \in \mathscr{P}_2(X)$ で well-defined になる．

以下，4 **章の終わりまで常に** (V) **を仮定**する．

さて，Otto 解析を用いると，$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流について次が分かる．

Theorem 4.5 (Otto 解析による $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流) *Otto* 解析を認め，登場する全ての *(*汎*)* 関数は必要なだけ滑らかかつ可積分とする．このとき，$(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m), W_2)$ 上の $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流 $(\nu_t)_{t\geq 0}$，つまり

$$\dot{\nu}_t = -\boldsymbol{\nabla}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_t) \tag{4.8}$$

の解は，ν_0 を初期分布とする熱方程式 (2.5) の *(*弱*)* 解と一致する．

Proof. まず，$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の ($\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m)$ 上の関数としての) 勾配ベクトル $\boldsymbol{\nabla}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ を決定する．$(\mu_t)_t$ を，$\dot{\mu}_t = \nabla\varphi_t$ をみたす $\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m)$ 上の曲線とする．また $\mu_t \ll \mathfrak{m}$, $\mu_t = \rho_t\mathfrak{m}$ とする．先に導入した $\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m)$ 上の Riemann 計量 $\mathbf{g}$ により，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t) = \mathbf{g}_{\mu_t}(\boldsymbol{\nabla}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}, \nabla\varphi_t) \tag{4.9}$$

とならねばならない (方向微分！)．ここで，(4.3) を適用すれば

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t) &= \int_{\mathbb{R}^m} \partial_t\rho_t\,\mathrm{d}\mathfrak{m} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^m} \log\rho_s\,\mathrm{d}\mu_t\bigg|_{s=t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_t(\mathbb{R}^m) + \int_{\mathbb{R}^m}\langle\frac{\nabla\rho_t}{\rho_t}, \nabla\varphi_t\rangle\,\mathrm{d}\mu_t = \mathbf{g}_{\mu_t}\left(\frac{\nabla\rho_t}{\rho_t}, \nabla\varphi_t\right)\end{aligned}$$

となる．従って

$$\boldsymbol{\nabla}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t) = \frac{\nabla\rho_t}{\rho_t} \tag{4.10}$$

を得る．これを用いて，次に $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流について考える．ν_t を $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流，即ち，

$$\dot{\nu}_t = -\boldsymbol{\nabla}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_t) \tag{4.11}$$

とする．$\nu_t \ll \mathfrak{m}$ を認め，$\nu_t = \sigma_t\,\mathfrak{m}$ と書く．このとき (4.2) を ν_t について考えると，$\nabla\varphi_t$ に $-\sigma_t^{-1}\nabla\sigma_t$ を代入することになるので，

$$\partial_t\sigma_t = -\nabla^{\mathfrak{m}}\cdot\left(\sigma_t\left(-\frac{\nabla\sigma_t}{\sigma_t}\right)\right) = \mathcal{L}\sigma_t$$

をみたすことが分かる．これは「σ_t が (弱解の意味で) 熱方程式をみたす」ことに他ならない．よって，熱方程式の解の一意性から，$\nu_t = \sigma_t\,\mathfrak{m}$ は ν_0 を初期分布とする熱分布と一致する．□

Remark 4.6 (Fisher 情報量) (4.10) を用いると，$\mu = \rho\,\mathfrak{m} \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m)$ に対して

$$\mathbf{g}_\mu\left(\boldsymbol{\nabla}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}, \boldsymbol{\nabla}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}\right) = \int_X \frac{|\nabla\rho|^2}{\rho}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\left(= 4\int_X |\nabla\sqrt{\rho}|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)$$

が分かる．右辺の量を $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(\mu)$ と書き，***Fisher* 情報量** *(*汎関数*)* という *(*$\mu \not\ll \mathfrak{m}$ のときは $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(\mu) := \infty$ とする*)*．よって特に，$(\nu_t)_{t\geq 0}$ が $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流であれば，$|\dot{\nu}_t|^2 = \mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(\nu_t)$ が分かる．確率論では，*Fisher* 情報量は，*Markov* 過程の経験分布に関する *Donsker-Varadhan* の大偏差原理の速度関数として知られている *(*例えば *[48]* 参照*)*.

Remark 4.7 (確率測度の成す空間上の勾配流としての PDE) 熱方程式以外にも，その解が $\mathscr{P}(X)$ 上の曲線として *(少なくとも形式的に)* 実現される発展型 *(非線形)* 偏微分方程式は多く知られている．例えば *[178, 179]* 参照．W_2 を別の距離に変える，等の設定変更まで含めると，何らかの意味で実現される方程式は実に多岐に亘り，斯様な観点からの研究は非線形偏微分方程式の一分野を形成している．代表的なものとして，

porous medium equation/fast diffusion equation [156], p-heat equation [99], McKean-Vlasov equation [40], reaction-diffusion equation [140], Boltzmann equation [51]

等の名前を挙げておく．

また，熱分布を境界条件つきの設定で考えると，問題の事情が異なってくる．自然に勾配流の構造を持つのは，総熱量が保存される *Neumann* 境界条件の場合である．*Dirichlet* 境界条件の場合には一般に総熱量を保たないので，何らかの修正が必要になる．例えば，定数 *1* の *Dirichlet* 境界条件の場合が *[62]* で論じられている．そこでは，W_2 の定義を境界条件に合わせて変更している．

4.3 Bakry-Émery の曲率次元条件と相対エントロピーの勾配流

Theorem 4.5 によって，$(\mathscr{P}_2(X), W_2)$ 上の関数としての $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の性質を調べることで熱分布の特性が分かると期待される．引き続き Otto 解析を展開して，曲率次元条件に対応する相対エントロピーの特性，および，そこからの熱分布の挙動への帰結について考察を加えておく．特にここでは，Bakry-Émery の曲率次元条件 (2.2) を出発点とする．

Theorem 4.8 (Otto 解析による，Bakry-Émery ⇒ $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の (K, N) 凸性) *Otto* 解析を認め，登場する全ての量は必要なだけ滑らかかつ可積分とする．$p = 2$ とし，(2.2) を仮定する．このとき，以下が成り立つ [33]：

$$\mathbf{Hess}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{N}(\boldsymbol{\nabla}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}})^{\otimes 2} \geq K \tag{4.12}$$

Proof. 相対エントロピーを $(\mu_t)_{t\in[0,1]} \in \mathrm{Geo}(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m))$ に沿って，$t = 0$ で (2 階まで) 微分する．Theorem 4.1(の証明) で見たように，μ_t は (4.3) の解で φ_t は (3.14) をみたすとしてよい．$\mu_t \ll \mathfrak{m}$, $\mu_t = \rho_t \mathfrak{m}$ は仮定する．まず 1 階微分は，(4.9), (4.10) より，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t) = \int_X \langle \frac{\nabla\rho_t}{\rho_t}, \nabla\varphi_t\rangle\,\mathrm{d}\mu_t = -\int_X \mathcal{L}\varphi_t\,\mathrm{d}\mu_t \tag{4.13}$$

となる (最後の式は部分積分公式から従う)．同様にして，(4.3), (3.14) より，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t) = \frac{1}{2}\int_X \mathcal{L}|\nabla\varphi_t|^2\,\mathrm{d}\mu_t - \int_X \langle\nabla\mathcal{L}\varphi_t, \nabla\varphi_t\rangle\,\mathrm{d}\mu_t \tag{4.14}$$

[33] 以下，**Hess** は $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m), W_2)$ を Riemann 多様体とみなしたときの，Levi-Civita 接続に対応するものを考えているとする (つまり，標準的な設定ということ)．

よって，(2.2) を仮定すると，(4.1) および (4.13) より，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t) &\geq K\int_X |\nabla\varphi_t|^2\,\mathrm{d}\mu_t + \frac{1}{N}\int_X (\mathcal{L}\varphi_t)^2\,\mathrm{d}\mu_t \\ &\geq K\mathbf{g}_{\mu_t}(\dot\mu_t,\dot\mu_t) + \frac{1}{N}\left(\int_X \mathcal{L}\varphi_t\,\mathrm{d}\mu_t\right)^2 \geq K\mathbf{g}_{\mu_t}(\dot\mu_t,\dot\mu_t) + \frac{1}{N}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t)\right)^2\end{aligned}$$

$(\mu_t)_t$ が Riemann 多様体上の測地線であれば，「$\ddot\mu_t = 0$」が成り立つ．これを認めて，この式の左辺を (4.9) の微分と思うと，

$$(\mathbf{Hess}\,\mathrm{Ent})(\dot\mu_t,\dot\mu_t) \geq K\mathbf{g}_{\mu_t}(\dot\mu_t,\dot\mu_t) + \frac{1}{N}(\boldsymbol{\nabla}\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}})^{\otimes 2}(\dot\mu_t,\dot\mu_t)$$

と読み替えることができる．測地線 μ_t は任意だったから，この式は結論を意味する． □

次章で述べるが, (4.12) に相当する条件は, 測度距離空間 $(X,d,\mathfrak{m})$ 上で「$\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}$ が $(\mathscr{P}_2(X),W_2)$ 上で (K,N) 凸」という性質として ($(\mathscr{P}_2(X),W_2)$ 上の形式的な微分演算を使わない形で) 厳密に定義できる．そうして定義された性質は，最適輸送理論と $\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}$ を用いた曲率次元条件の定式化のひとつになる．

さて，それでは，(4.12) を仮定したときに相対エントロピーの勾配流 (4.8) がどのような性質をみたすかを考察して，この章を終えることにしよう．まず準備として，$\kappa\in\mathbb{R}$ に対して**比較関数 (comparison function)** $\mathfrak{s}_\kappa,\mathfrak{c}_\kappa:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を次のように定める：

$$\mathfrak{s}_\kappa(u) := \begin{cases}\dfrac{\sin(\sqrt{\kappa}u)}{\sqrt{\kappa}} & (\kappa>0),\\ u & (\kappa=0),\\ \dfrac{\sinh(\sqrt{-\kappa}u)}{\sqrt{-\kappa}} & (\kappa<0),\end{cases}$$

および，$\mathfrak{c}_\kappa := \mathfrak{s}_\kappa'$．$\mathfrak{s}_\kappa$ は微分方程式

$$f''+\kappa f=0,\quad f(0)=0,\quad f'(0)=1$$

の解であり，2 階微分に関連する量の比較定理で頻繁に登場する (そのことは，後の議論からも分かる)．なお $\mathfrak{s}_\kappa$ は，正弦関数を複素関数とみて $\kappa=0$ の場合を $\kappa\neq 0$ の場合の極限と考えれば，単独の式 $\mathfrak{s}_\kappa(u)=\sin(\sqrt{\kappa}u)/\kappa$ で書ける．

Theorem 4.9 ***(Otto* 解析による W_2-収縮性*)*** *Otto* 解析を認め，登場する全ての量は必要なだけ滑らかかつ可積分とする．(4.12) を仮定する．また，$K>0$ かつ $N<\infty$ のときに限り $\mathrm{diam}(X) < \sqrt{N/K}\pi$ とする [34]．このとき，$(\nu_t)_{t\geq 0}$，$(\nu_t^*)_{t\geq 0}$ を $\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流とすると，各 $t,s\geq 0$ で次が成り立つ：

$$\mathfrak{s}_{K/N}^2\left(\frac{W_2(\nu_s,\nu_t^*)}{2}\right) \leq \mathrm{e}^{-K(s+t)}\mathfrak{s}_{K/N}^2\left(\frac{W_2(\nu_0,\nu_0^*)}{2}\right) + \frac{N}{2}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-K(s+t)}}{K(s+t)}\left(\sqrt{t}-\sqrt{s}\right)^2. \tag{4.15}$$

Remark 4.10 (W_2-収縮性の単純化) (4.15) は $\mathfrak{s}_{K/N}$ が登場するせいで少し複雑に見える．特別な場合として，

[34] (4.12) を厳密に定式化すると，この仮定が自動的に従う [55]．関係する話題は 5 章でも扱う．

- $N=\infty$ の場合 [35]：

$$W_2(\nu_t,\nu_t^*)^2\le \mathrm{e}^{-2Kt}W_2(\nu_0,\nu_0^*)^2, \tag{4.16}$$

- $K=0$ の場合：

$$W_2(\nu_s,\nu_t^*)^2\le W_2(\nu_0,\nu_0^*)^2+2N(\sqrt{t}-\sqrt{s})^2, \tag{4.17}$$

と，幾分か単純な形になる．特に，*1* 章の (1.1) は (4.17) に対応していると分かる．(4.16) は，*Markov* 過程の分布の収束評価で典型的に現れるもの．例えば，「*Markov* 連鎖の混合時間の評価」の文脈でも類似物が登場する *[130, Chapter 14]*.

Proof. $s<t$ としてよい．$\alpha\in[0,1]$ とし，$(\mu_t)_{t\in[0,1]}\in\mathrm{Geo}(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m))$, $\mu_0=\nu_{s\alpha}$, $\mu_1=\nu^*_{t\alpha}$ とする．このとき，弧長に関する第一変分公式から

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}\alpha}W_2(\nu_{s\alpha},\nu^*_{t\alpha})^2:=&\frac{1}{2}\varlimsup_{\delta\downarrow 0}\frac{W_2(\nu_{s(\alpha+\delta)},\nu^*_{t(\alpha+\delta)})^2-W_2(\nu_{s\alpha},\nu^*_{t\alpha})^2}{\delta}\\ \le& t\mathbf{g}_{\mu_1}(\dot\nu^*_{t\alpha},\dot\mu_1)-s\mathbf{g}_{\mu_0}(\dot\nu_{s\alpha},\dot\mu_0)\end{aligned} \tag{4.18}$$

を得る [36]．$\theta\in C^1([0,1]\to[s,t])$ を単調非減少な全射 (変数変換) とする (後に具体的に決定する)．$\nu_\cdot,\nu^*_\cdot$ が $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流であることから，

$$\begin{aligned}t\mathbf{g}_{\mu_1}(\dot\nu^*_{t\alpha},\dot\mu_1)-s\mathbf{g}_{\mu_0}(\dot\nu_{s\alpha},\dot\mu_0)&=-t\mathbf{g}_{\mu_1}\left(\boldsymbol{\nabla}\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_1),\dot\mu_1\right)+s\mathbf{g}_{\mu_0}\left(\boldsymbol{\nabla}\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0),\dot\mu_0\right)\\ &=-\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(\theta(r)\mathbf{g}_{\mu_r}\left(\boldsymbol{\nabla}\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_r),\dot\mu_r\right)\Big)\,\mathrm{d}r\\ &=-\int_0^1\Big(\dot\theta(r)\mathbf{g}_{\mu_r}\left(\boldsymbol{\nabla}\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_r),\dot\mu_r\right)+\theta(r)\mathbf{Hess}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\dot\mu_r,\dot\mu_r)\Big)\,\mathrm{d}r\end{aligned} \tag{4.19}$$

を得る．ここで，$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ は (4.12) をみたすので，

$$\begin{aligned}&-\int_0^1\Big(\dot\theta(r)\mathbf{g}_{\mu_r}\left(\boldsymbol{\nabla}\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_r),\dot\mu_r\right)+\theta(r)\mathbf{Hess}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\dot\mu_r,\dot\mu_r)\Big)\,\mathrm{d}r\\ &\le-\int_0^1\Big(\dot\theta(r)\mathbf{g}_{\mu_r}\left(\boldsymbol{\nabla}\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_r),\dot\mu_r\right)+\frac{\theta(r)}{N}\mathbf{g}_{\mu_r}\left(\boldsymbol{\nabla}\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_r),\dot\mu_r\right)^2+K\theta(r)\mathbf{g}_{\mu_r}(\dot\mu_r,\dot\mu_r)\Big)\,\mathrm{d}r\\ &\le\frac{N}{4}\int_0^1\frac{\dot\theta(r)^2}{\theta(r)}\,\mathrm{d}r-KW_2(\mu_0,\mu_1)^2\int_0^1\theta(r)\,\mathrm{d}r\end{aligned} \tag{4.20}$$

(最後の不等式は, 平方完成と $(\mu_r)_{r\in[0,1]}$ が速度一定であることを用いた)．よって, (4.19), (4.20), (4.18) を合わせて次を得る：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}\alpha}W_2(\nu_{s\alpha},\nu^*_{t\alpha})^2\le\int_0^1\Big(\frac{N}{4}\cdot\frac{\dot\theta(r)^2}{\theta(r)}-KW_2(\mu_0,\mu_1)^2\theta(r)\Big)\,\mathrm{d}r. \tag{4.21}$$

ここで，θ を次のように取る：

$$\theta(r):=\left(\sqrt{s}\frac{\mathfrak{s}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1)(1-r))}{\mathfrak{s}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1))}+\sqrt{t}\frac{\mathfrak{s}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1)r)}{\mathfrak{s}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1))}\right)^2. \tag{4.22}$$

---

[35] $t=s$ の場合に $N\to\infty$ とした式.

[36] Riemann 多様体上では，両端点の組が最小跡に属していなければ等号成立．属している場合は，中点 $\mu_{1/2}$ を用いる．$(\mu_0,\mu_{1/2})$ および $(\mu_{1/2},\mu_1)$ は最小跡に属さないので，それぞれに第一変分等式を適用して，それを三角不等式と組み合わせると上記を得る.

この θ は (4.21) の右辺の θ に関する最小化問題の停留点になっていることが，変分法から容易に確認できる [37]．(4.22) を (4.21) に代入すると，初等的な計算から，

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left\{ \frac{N}{4}\frac{\dot{\theta}(r)^2}{\theta(r)} - KW_2(\mu_0,\mu_1)^2\theta(r) \right\} \mathrm{d}r \\
&= \frac{NW_2(\mu_0,\mu_1)^2}{\mathfrak{s}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1))^2} \int_0^1 \left\{ \left(\sqrt{t}\mathfrak{c}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1)r) - \sqrt{s}\mathfrak{c}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1)(1-r)) \right)^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{K}{N}\left(\sqrt{t}\mathfrak{s}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1)r) + \sqrt{s}\mathfrak{s}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1)(1-r)) \right)^2 \right\} \mathrm{d}r \\
&= \frac{NW_2(\mu_0,\mu_1)}{\mathfrak{s}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1))} \left((s+t)\mathfrak{c}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1)) - 2\sqrt{st} \right) \\
&= \frac{W_2(\mu_0,\mu_1)}{\mathfrak{s}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1))} \left(-2K(s+t)\mathfrak{s}_{K/N}\left(\frac{W_2(\mu_0,\mu_1)}{2}\right)^2 + N(\sqrt{t}-\sqrt{s})^2 \right).
\end{aligned}$$

よって，この計算結果を (4.21) に代入した式より，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}\alpha}\mathfrak{s}_{K/N}\left(\frac{W_2(\nu_{s\alpha},\nu^*_{t\alpha})}{2}\right)^2 &= \frac{\mathfrak{s}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1))}{4W_2(\mu_0,\mu_1)}\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}u}W_2(\mu_0,\mu_1)^2 \\
&\le -K(s+t)\mathfrak{s}_{K/N}\left(\frac{W_2(\nu_{s\alpha},\nu^*_{t\alpha})}{2}\right)^2 + \frac{N}{2}(\sqrt{t}-\sqrt{s})^2.
\end{aligned}$$

よって，Gronwall の補題から結論を得る． □

後述 (Theorem 7.19) のように，この式において $\nu_\cdot$, $\nu^*_\cdot$ を熱分布に置き換えたもの [38] は，曲率次元条件の同値条件のひとつになる．

最後に，Otto 解析の他の有名な応用に関する参考文献として，[158] を挙げておく．

5　最適輸送理論による曲率次元条件

Theorem 4.8 において，L^2-Wasserstein 空間上の形式的 Riemann 構造を用いて，(4.12) が Bakry-Émery の曲率次元条件から導出された．この条件は 3 章で用意した諸概念を用いて厳密に定式化でき (Definition 5.2, Definition 5.4), 実際に広義の曲率次元条件になる (Theorem 5.8). 一方歴史的には，Riemann 幾何学に基づく考察から，Sturm, Lott, Villani らによって類似の条件が先に導入されている．この章では測度距離空間の枠組でそれらの諸条件 (の，厳密な定義) を紹介し，その基本的な性質を復習すると共に，条件の間の関係を述べる．

$r > 0$, $x \in X$ に対し $B_r(x)$ を x 中心とする半径 r の開距離球とする．以下常に，$\mathfrak{m}$ は (X,d) 上の測度であって，$\operatorname{supp}\mathfrak{m} = X$ かつ「各 r, x で $\mathfrak{m}(B_r(x)) < \infty$」をみたすとする．以下，この予稿で**測度距離空間 (metric measure space)** といえば $(X,d,\mathfrak{m})$(に課した性質をみたす空間) を指すものとする．可微分構造を持つ空間での例として，重みつき Riemann 多様体 $(M,g,\mathfrak{m})$ (2 章参照) が定める測度距離空間 $(M,d_g,\mathfrak{m})$ がある．

[37] この事実は証明には用いないが，θ の選び方を理解する助けにはなると思い記載した．

[38] $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流と熱分布の一致が不明な段階で議論を展開する時は，どちらを定式化に使うか区別する必要がある．本章では Theorem 4.5 で検証済みだが，今後，話を厳密にして行く際には状況が違ってくる．

Remark 5.1 ((K,N) **に関する単調性とその帰結**)

(i) **この先 7 章までに考察する (K,N) に関する各条件は全て，N が大きく K が小さい方が弱い．特に $N\to\infty$ とすると，$N=\infty$ での対応する結果を導く．これらのことは (他の条件との言い換えなしで直接) 示せる**．証明は場合によってはかなり非自明だが，以下では常にこれを認める．

(ii) 上の注は，実は $N<\infty$ の場合に広義の曲率次元条件達の同値性に関する理論を構築する上で重要になる．実際，$N=\infty$ の場合の理論構築に伴い，様々な概念についての「良い性質」が，いずれの (広義の) 曲率次元条件からも (同値性を経由して) 得られることが判明した．$N<\infty$ の場合を扱う際，それらの「良い性質」が同値性を示す際に必要となることがある．そのため，一旦 $N=\infty$ に移行して「良い性質」を保証する，という議論をしばしば用いる (例えば，*Theorem 7.15* の証明や *Remark 7.13* を見よ).

前節の (4.12) に相当する条件と，それに関連する条件をまず紹介する．まず $N=\infty$ の場合から始めよう．そのために $\mathscr{P}_2(X)$ 上の汎関数である相対エントロピー $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の定義が必要になる．Definition 4.4 を使いたいが，a priori に (V) が成り立つとは限らないので，まず次のように定める ([172, I.(4.1)])：

$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) := \begin{cases} \displaystyle\int_X \rho\log\rho\,\mathrm{d}\mathfrak{m} & \left(\ \mu=\rho\,\mathfrak{m},\ \displaystyle\int_X [\rho\log\rho]_+\,\mathrm{d}\mathfrak{m}<\infty\ \text{のとき}\right), \\ \infty & (\text{その他}). \end{cases}$$

この定義だと $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu)=-\infty$ もあり得ることに注意する．

Definition 5.2 (Sturm/Lott-Villani の曲率次元条件, $N=\infty$) [39] 各 $\mu_0,\mu_1\in\mathscr{P}_2(X)$ に対して，次をみたす W_2-測地線 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ が存在するとき，「$(X,d,\mathfrak{m})$ は $\mathsf{CD}(K,\infty)$ をみたす」という：各 $t\in[0,1]$ で

$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t)\le(1-t)\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0)+t\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_1)-\frac{K}{2}t(1-t)W_2(\mu_0,\mu_1)^2. \tag{5.1}$$

上の条件が成り立つことを，単に，「$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ は $(\mathscr{P}_2(X),W_2)$ 上で K **凸**である」ともいう．また，(5.1) を全ての (μ_0 と μ_1 を繋ぐ) W_2-測地線でみたすとき，「強 $\mathsf{CD}(K,\infty)$ をみたす」あるいは「強 K 凸である」という．

この条件は，(4.12) の $N=\infty$ の場合，即ち「$\mathbf{Hess}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}\ge K$」に対応する．$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の 2 回微分の下からの評価，即ち凸性の度合いを表している．実際，$K=0$ の場合は通常の凸性に対応する式になる．なお，(5.1) の右辺は，t の関数として

$$f''(t)=KW_2(\mu_0,\mu_1)^2,\quad f(0)=\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0),\quad f(1)=\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_1)$$

をみたしており，(5.1) は，2 階微分不等式に関する比較定理の結論を定義に置き換えたものだと分かる．各測地線に制限して凸性を論じるのは $\mathbb{R}^m$ の場合と同様だが，一般に測地線は一意とは限らない．「強」とした条件との違いはそこにある．「強」であるか否かはしばしば問題になるが，この種の曲率次元条件に馴染みの薄い読者は，最初はあまり気にしなくてよい．

[39]「曲率次元条件」の呼称は Bakry-Émery 理論から流用して名付けられた．現在ではこちらが主流となり，単に曲率次元条件といえば Sturm, Lott-Villani のそれを指すことが多い (以下で見る，$N<\infty$ の場合も同様)．その場合，(2.2) の方は，「Bakry-Émery の」と言葉を付して呼ぶ (本稿もその慣習に従っている)．一方，Bakry-Émery 理論の専門家は (2.2) を単に「曲率次元条件」と呼ぶ．歴史的経緯を考えると解決し難く，ややこしい．

Remark 5.3 ($\mathsf{CD}(K,\infty) \Rightarrow (\mathsf{V})$) $\mathsf{CD}(K,\infty)$が成立すれば，そこから弱い意味での体積増大度評価が従う *([172, I.4.6節]参照)*．それを用いると (V) が成り立つと分かる．従って，$\mathsf{CD}(K,\infty)$ をみたす空間上では各 $\mu \in \mathscr{P}_2(X)$ で $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) > -\infty$ となり，前述の定義は *Definition 4.4* のそれと一致する．

さて，$\mathsf{CD}(K,\infty)$ を $N < \infty$ の場合に拡張する．複雑なことに，複数の定式化が知られておりそれぞれに特徴がある [40]．ただ，それらのうち，相対エントロピー $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ を用いる (従って，その勾配流である熱分布と直接関係がある) ものはひとつだけであり，それが前述の (4.12) に対応する条件でもある．まずそれを紹介する．汎関数 $U_N : \mathscr{P}_2(X) \to [0,\infty)$ を次で定める [41]：

$$U_N := \exp\left(-\frac{1}{N}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}\right) \tag{5.2}$$

Definition 5.4 (エントロピー的曲率次元条件 (entropic curvature-dimension cond.)) 各 $\mu_0,\mu_1 \in \mathscr{P}_2(X)$ に対し，次をみたす $(\mu_t)_{t\in[0,1]} \in \mathrm{Geo}(\mathscr{P}_2(X))$ が存在するとき，「$(X,d,\mathfrak{m})$ は $\mathsf{CD}^e(K,N)$ をみたす」という：各 $t \in [0,1]$ で

$$U_N(\mu_t) \geq \frac{\mathfrak{s}_{K/N}((1-t)W_2(\mu_0,\mu_1))}{\mathfrak{s}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1))}U_N(\mu_0) + \frac{\mathfrak{s}_{K/N}(tW_2(\mu_0,\mu_1))}{\mathfrak{s}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1))}U_N(\mu_1). \tag{5.3}$$

この性質のことを，「$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ は $(\mathscr{P}_2(X),W_2)$ 上で (K,N) 凸」とも言う．*Definition 5.2* の場合と同様に，全ての測地線で (5.3) が成り立つとき，強 $\mathsf{CD}^e(K,N)$ という．

Otto 解析を用いると，U_N の定義より，微分不等式 (4.12) は以下の形の U_N の凹性

$$\mathbf{Hess}\,U_N \leq -\frac{K}{N}U_N$$

と同値であることが容易に分かる．これは 2 階線形微分不等式であるので，比較定理を用いて，微分を使わない式で言い換えることができる．実際，$N=\infty$ の場合と同様に，$\mathrm{CD}^e(K,N)$ の定義式 (5.3) の右辺は次の常微分方程式の (一意) 解となっている：

$$f''(t) = -\frac{K}{N}W_2(\mu_0,\mu_1)^2 f(t), \quad f(0) = U_N(\mu_0), \quad f(1) = U_N(\mu_1).$$

従って，$\mathsf{CD}^e(K,N)$ もやはり比較定理に依拠した定式化になっている．

他の条件は，紹介こそするものの，本稿で扱う話の範囲で定義を直接扱うことはあまりない．以下の定義は一旦飛ばして，そのさきにある「みたす性質」の説明を見た上で，必要に応じて定義を眺める程度でも十分と思われる．とにかく定義は述べよう．そのため，$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の代わりに Rényi(-Tsallis) エントロピーと呼ばれる別の汎関数 S_N を用いる．まずこれを導入しよう．$S_N : \mathscr{P}_2(X) \to [-\infty,\infty)$ を $\mu \in \mathscr{P}_2(X)$, $\mu = \rho\,\mathfrak{m} + \mu'$, $\mu' \perp \mathfrak{m}$ に対して次で定める：

$$S_N(\mu) := -\int_X \rho^{1-1/N}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

[40] Definition 5.2 の定義も，[172] と [135] で若干異なる．ここでは [172] による．昨今はこちらが標準的．
[41] U_N は，情報理論で entropy power と呼ばれる汎関数である [47].

Definition 5.5 (Sturm/Lott-Villani の曲率次元条件, $N<\infty$) 各 $\mu_i \in \mathscr{P}_2(X)$, $\mu_i \ll \mathfrak{m}$ $(i=0,1)$ に対し, 次をみたす W_2-最適カップリング $\pi \in \Pi(\mu_0,\mu_1)$ と $(\mu_t)_{t\in[0,1]} \in \mathrm{Geo}(\mathscr{P}_2(X))$, $\mu_t=\rho_t\,\mathfrak{m}$ が存在するとき,「$(X,d,\mathfrak{m})$ は $\mathsf{CD}(K,N)$ をみたす」という：各 $t\in[0,1]$ と $N'\geq N$ で

$$
\begin{aligned}
S_{N'}(\mu_t) \leq -\int_{X\times X} \Biggl\{ &(1-t)\left(\frac{\mathfrak{s}_{K/(N'-1)}((1-t)d(x_0,x_1))}{(1-t)\mathfrak{s}_{K/(N'-1)}(d(x_0,x_1))}\right)^{1-1/N'} \rho_0^{-1/N'}(x_0) \\
&+ t\left(\frac{\mathfrak{s}_{K/(N'-1)}(td(x_0,x_1))}{t\mathfrak{s}_{K/(N'-1)}(d(x_0,x_1))}\right)^{1-1/N'} \rho_1^{-1/N'}(x_1)\Biggr\}\,\pi(\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x_1). \quad (5.4)
\end{aligned}
$$

また, (5.4) が全ての W_2-測地線で成り立つとき,「強 $\mathsf{CD}(K,N)$ をみたす」という.

Definition 5.6 ((簡約曲率次元条件 (reduced curvature-dimension condition)) *Definition 5.5* の (5.4) を

$$
\begin{aligned}
S_{N'}(\mu_t) \leq -\int_{X\times X} \Biggl\{ &\left(\frac{\mathfrak{s}_{K/N'}((1-t)d(x_0,x_1))}{\mathfrak{s}_{K/N'}(d(x_0,x_1))}\right)^{1-1/N'} \rho_0^{-1/N'}(x_0) \\
&+ \left(\frac{\mathfrak{s}_{K/N'}(td(x_0,x_1))}{\mathfrak{s}_{K/N'}(d(x_0,x_1))}\right)^{1-1/N'} \rho_1^{-1/N'}(x_1)\Biggr\}\,\pi(\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x_1) \quad (5.5)
\end{aligned}
$$

にした条件を, $\mathsf{CD}^*(K,N)$ という. 強 $\mathsf{CD}^*(K,N)$ も同様.

Definition 5.7 (測度収縮性 (measure contraction property)) 任意の $x\in X$ と可測集合 $A\subset X$, $\mathfrak{m}(A)\in(0,\infty)$, $A\subset B_{\sqrt{(N-1)/(K\vee 0)}\pi}(x)$ に対して, 次をみたす δ_x と $\mathfrak{m}(A)^{-1}\mathfrak{m}|_A$ の動的最適カップリング Ξ が存在するとき「$(X,d,\mathfrak{m})$ は $\mathsf{MCP}(K,N)$ をみたす」という：各 $t\in[0,1]$ で

$$
\mathfrak{m} \geq (e_t)_\sharp\left(t\left(\frac{s_{K,N}(td(\gamma_0,\gamma_1))}{s_{K,N}(d(\gamma_0,\gamma_1)}\right)^{N-1}\mathfrak{m}(A)\,\Xi(\mathrm{d}\gamma)\right).
$$

これらの条件の「立ち位置」を説明する前に, まず基本的な性質と互いの関係を確認しておこう. 歴史的には $\mathsf{CD}^e(K,N)$ が他の 3 つの条件よりも遅れて登場しており, また熱分布を $N<\infty$ で考える際の焦点はこの条件にある. このことを鑑みて,「主に他の 3 つの条件の関係と特性を紹介した上で, それらに対して $\mathsf{CD}^e(K,N)$ がどのような関係にあるのかを述べる」という順序で話を展開する.

$\mathsf{CD}(K',N)$ が全ての $K'<K$ で成り立つとき, $\mathsf{CD}(K-,N)$ 条件をみたす, ということにする ($\mathsf{CD}^*(K-,N)$ も同様). また, 局所的に $\mathsf{CD}(K,N)$ をみたす (正確な定義は省略する) とき, $\mathsf{CD}_{\mathrm{loc}}(K,N)$ 条件をみたす, という ($\mathsf{CD}^*_{\mathrm{loc}}(K,N)$ も同様). 以下の 2 定理について, 証明は省略する.

Theorem 5.8 ((曲率次元条件達の関係))

(i) $\mathsf{CD}(K,N)\Rightarrow\mathsf{CD}^*(K,N)\Rightarrow\mathsf{MCP}(K,N)$ *[17, 45]*.

(ii) $K\geq 0$ のとき, $\mathsf{CD}^*(K,N)\Rightarrow\mathsf{CD}((N-1)K/N,N)$. 特に $\mathsf{CD}(0,N)\Leftrightarrow\mathsf{CD}^*(0,N)$ *[17]*.

(iii) (X, d) は非分岐とする *(*下記 *Definition 5.10* 参照*)*．このとき次が成立 *[17]*：

$$\mathsf{CD}_{\mathrm{loc}}(K-, N) \Leftrightarrow \mathsf{CD}^*_{\mathrm{loc}}(K-, N) \Leftrightarrow \mathsf{CD}^*(K, N).$$

(iv) 重みつき *Riemann* 多様体上では，以下が成立：*[17, 55, 147, 172]*.

$$\mathsf{CD}^e(K, N)/\mathsf{CD}(K, N)/\mathsf{CD}^*(K, N)/\mathsf{MCP}(K, N) \text{ のいずれか} \Leftrightarrow \mathrm{Ric}_V^N \geq K$$

(v) X*:* コンパクトとする．このとき，$\mathsf{CD}^e(K, N)/\mathsf{CD}(K, N)/\mathsf{CD}^*(K, N)/\mathsf{MCP}(K, N)$ のいずれの条件も測度 *Gromov-Hausdorff* 収束で安定 *[17, 55, 147, 172] (*非コンパクトの場合は *[76]* 参照*)*.

(vi) 曲率 $k \in \mathbb{R}$ 以上の m 次元 *Alexandrov* 空間は $\mathsf{CD}(m, (m-1)k)$ をみたす *[2, 162]*.

(vii) $\mathsf{CD}^e(K, N)/\mathsf{CD}(K, N)/\mathsf{CD}^*(K, N)$ のいずれか $\Rightarrow$ $\mathsf{CD}(K, \infty)$．特に，仮定が「強」であれば，結論も「強」になる [42] *[17, 55, 172]*.

Theorem 5.9 ($\mathsf{MCP}(K, N)$ **の帰結** [**147, 172**]) $\mathsf{MCP}(K, N)$ を仮定すると，次が成り立つ：

(i) ***(Bishop-Gromov*** **不等式*)*** 各 $0 < r < R$, $x \in X$ に対して

$$\frac{\mathfrak{m}(B_R(x))}{\mathfrak{m}(B_r(x))} \leq \frac{\int_0^R \mathfrak{s}_{K/(N-1)}(u)^{N-1}\,\mathrm{d}u}{\int_0^r \mathfrak{s}_{K/(N-1)}(u)^{N-1}\,\mathrm{d}u}.$$

特に $\mathfrak{m}$ は *local uniform volume doubling property* をみたす．つまり，各 $R_* > 0$ に対して，次をみたす $C > 0$ が存在する：各 $x \in X$ と $r \in (0, R_*]$ に対して

$$\mathfrak{m}(B_{2r}(x)) \leq C\mathfrak{m}(B_r(x)).$$

従って X は局所コンパクト．更に，X の *Hausdorff* 次元は N 以下 *[147, Corollary 2.6]*.

(ii) ***(Bonnet-Myers*** **の定理*)*** $K > 0$ なら $\mathrm{diam}(X) \leq \sqrt{\dfrac{N-1}{K}}\pi$．特に X はコンパクト [43].

歴史的には，まず $\mathsf{CD}(K, N)$ が登場し [135, 172]，ほぼ同時に，この条件を弱めたものとして (Theorem 5.8(i) 参照)$\mathsf{MCP}(K, N)$ が導入された [147, 148, 172]．大まかには，MCP 条件は，$\mathsf{CD}(K, N)$ 条件において μ_0 と μ_1 の片方の参照点を Dirac のみしか考えないものと言える (実際に，Theorem 5.9 で述べたような応用を得るためにはこれで充分)．実際に $\mathsf{MCP}(K, N)$ は $\mathsf{CD}(K, N)$ より真に弱く，その分だけ適用範囲が広い；例えば [93] 参照．$\mathsf{CD}(K, N)$ は，「Riemann 多様体上の W_2-測地線に沿った測度の歪み具合を，Ricci 曲率を用いて制御する」という幾何学的な立場からの研究を介して得られた条件と言える．高精度の制御を与え，その帰結として精密な不等式を導出できる反面，条件としての柔軟性に欠け，幾つかの空間の変形操作での振る舞いはあまりよろしくない (例えば，$\mathsf{CD}(K, N)$ と $\mathsf{CD}_{\mathrm{loc}}(K, N)$ は同値ではない [165])．そこで，「曲率次元条件としての特性を充分に残しつつ (Theorem 5.8(iv)(v)) 条件を少し弱め (Theorem 5.8(i)(ii))，その代わりに各種の幾何学的操作で良い振る舞いをする (例えば

[42] これは Remark 5.1 (i) に含まれる．強調するためと「強」の部分をはっきりさせるため，敢えて書いた．
[43] 「局所コンパクト測地距離空間の閉球はコンパクト」(例えば [36, Proposition 2.5.22]) による．

Theorem 5.8(iii)) ようにしたもの」として導入されたのが，簡約曲率次元条件 CD$^*(K,N)$ である [17]．

簡約条件は元の条件に比べてどの程度弱いのか，という点について，少し言葉を加えておこう．例えば CD$^*(K,N)$ の定義式から直接 Theorem 5.9(i) を導こうとしても，やや弱いものしか得られない (CD(K,N) の場合はうまくいく)．ただ，精密でない評価であっても，Theorem 5.9 で述べたような位相に関する定性的な性質を得るには十分であり，そのことには意味がある．また現在は，Theorem 5.8 (i) のおかげで，Theorem 5.9(i)(ii) 等の MCP(K,N) から導出できる精密評価は，CD$^*(K,N)$ から導くこともできる [45]．実際，「CD(K,N) でなければうまくいかない」という類の議論は，現段階ではそれほど多く知られてはいない．

1 章で述べたように，幾何学において曲率次元条件を測度距離空間で考える動機は，Ricci limit の幾何解析と強く関係している．この立場からは Theorem 5.8(iv)(v) は欠くべからざる条件であり，実際にこの特性が上で導入した 4 つの条件全てでみたされていることは，これらの条件が「ある程度筋の良い」ものであることを保証している，と言えよう．同種の研究として，Ricci 曲率よりも強く断面曲率が下に有界な距離空間の概念が先行して導入されていた [37]．これが Alexandrov 空間である．断面曲率の平均が Ricci 曲率であり，m 次元定曲率空間の Ricci 曲率は断面曲率の $m-1$ 倍になる．従って Theorem 5.8 (vi) の主張は自然ではある．しかし証明はそれほど易しくはない．

エントロピー的曲率次元条件 CD$^e(K,N)$ は，名前から分かるように，相対エントロピー $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ を用いて記述されることにその特徴がある．この条件が導入された当時，$N=\infty$ の場合には，CD(K,∞) から熱分布の評価 (4.16) を介して Bakry-Émery の曲率次元条件が従うことは知られていた [6, 10]．同様の理論を $N<\infty$ の場合に構築する為に導入された条件と言える．その役割は，形式的には既に 4.3 節で垣間見た．これに対応する厳密な議論は 7.4 節で紹介する．

上述のように，CD(K,N) および CD$^*(K,N)$ の定義には $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の代わりに Rényi エントロピー S_N が用いられており，また，「汎関数の凸性」というような単純な形はしていない．その意味で，2 重の困難があった．一方で，CD$^e(K,N)$ の導入とは別の「S_N の勾配流 (多孔媒質方程式) を考える」という路線から Bakry-Émery の曲率次元条件と CD$^*(K,N)$ 条件との関係を調べたのが [13] である [44]．彼らは Wasserstein 距離 W_2 を重みつきに拡張したものを用いて S_N のある種の凸性の条件を定式化し，それが CD$^*(K,N)$ と (然るべき設定で) 同値なことを示している．これも新種の (Sturm, Lott-Villani 型の) 曲率次元条件と言えるだろう．

幸いにして，CD$^e(K,N)$ と簡約条件 CD$^*(K,N)$ は，良い状況では同値になる．そして，その良い状況は，ある程度一般に実現される [45]．「良い状況」の定義をまず用意しよう．

Definition 5.10 (測地線の分岐・非分岐) $\gamma^1,\gamma^2 \in \mathrm{Geo}(X)$ であって，ある $t\in(0,1)$ で $\gamma^1|_{[0,t]}=\gamma^2|_{[0,t]}$ となっており，しかも $\gamma^1\neq\gamma^2$ となるとき，(γ^1,γ^2) を**分岐測地線** ***(branching geodesics)*** という [46]．(X,d) が**非分岐** ***(non-branching)*** であるとは，分岐測地線が存在しないことを言う．また，$(X,d,\mathfrak{m})$ が**本質的非分岐** ***(essentially nonbranching)*** であるとは，任意の $\mu_i\in\mathscr{P}_2(X)$, $\mu_i \ll \mathfrak{m}$ $(i=0,1)$ と μ_0,μ_1 の任意の動的最適カップリング Ξ に対して，分岐測地線の組を含まない可測集合 $G\subset \mathrm{Geo}(X)$ であって，$\Xi(G^c)=0$ をみたすものが存在することを言う．

[44] ただし，彼らも 7.2 節で述べる「無限小 Hilbert 的」という条件 (Definition 7.6) は課している．

[45] 以下の話は，線形な熱分布が出てくる設定において，Theorem 7.15 の形で結実する．差し当たりその場合にしか興味がないのであれば，以下ではその裏事情を詳しく述べているだけなので，飛ばしてよい．

[46] 「$\gamma^1|_{[0,t]}=\gamma^2|_{[0,t]}$」は「$\gamma^1_0=\gamma^2_0$, $\gamma^1_t=\gamma^2_t$」に変えても同値な条件になる (これは非分岐よりは非交差と呼ぶべきものだろう)．こちらの方が見かけ上強いが，交差すれば分岐するものが作れる．

本質的非分岐の判定法として，次が知られている．ここでは証明には言及しない．

Theorem 5.11 (本質的非分岐の充分条件 [166]) 強 $\mathsf{CD}(K,\infty)$ 空間は本質的非分岐.

以上の準備の下，以下が成り立つ：

Theorem 5.12 (($\mathsf{CD}^*(K,N)$ と $\mathsf{CD}^e(K,N)$ の関係 [55]))

(i) $(X,d,\mathfrak{m})$ が本質的非分岐であれば，$\mathsf{CD}^*(K,N)$ と $\mathsf{CD}^e(K,N)$ は同値.

(ii) 強 $\mathsf{CD}^*(K,N)$ と強 $\mathsf{CD}^e(K,N)$ は同値.

以下の証明 (の概略) を見れば, Theorem 5.12 (ii) は, 本質的に Theorem 5.8 (vii), Theorem 5.11 と Theorem 5.12 (i) から従うことが分かるだろう．この性質のおかげで，空間から自然に定まる熱分布が初期値に関して線形になる状況では $\mathsf{CD}^e(K,N)$ は $\mathsf{CD}^*(K,N)$ と同値になる (Theorem 7.15).

Proof. (i) について，概略を述べる．この同値性は，それぞれの条件が (各最適輸送経路へと) 局所化された条件と同値であることを通じて得られる (局所化が一致する)．その「局所化された条件」とは以下の通りである (記号は 3.5 節参照)：有界な台を持つ任意の $\mu_0,\mu_1\in\mathscr{P}(X)$ に対して，$\Xi\in\mathscr{P}(C([0,1];X))$ で，「$(e_t)_\sharp\Xi\ll\mathfrak{m}$」(以下 $(e_t)_\sharp\Xi=:\rho_t\,\mathfrak{m}$ とする)，「$((e_t)_\sharp\Xi)_{t\in[0,1]}$ は μ_0 から μ_1 に至る W_2-測地線」および，Ξ-a.e. γ で次をみたすものが存在する：

$$\rho_t(\gamma_t)^{-1/N}\geq\frac{\mathfrak{s}_{K/N}((1-t)d(\gamma_0,\gamma_1))}{\mathfrak{s}_{K/N}(d(\gamma_0,\gamma_1))}\rho_0(\gamma_0)^{-1/N}+\frac{\mathfrak{s}_{K/N}(td(\gamma_0,\gamma_1))}{\mathfrak{s}_{K/N}(d(\gamma_0,\gamma_1))}\rho_1(\gamma_1)^{-1/N}. \tag{5.6}$$

実際，(5.6) を積分すれば $\mathsf{CD}^*(K,N)$ が得られる．$\mathsf{CD}^e(K,N)$ の導出はもう少し複雑であるが. うまく Jensen の不等式を用いる.

逆に $\mathsf{CD}^*(K,N)/\mathsf{CD}^e(K,N)$ から (5.6) を導出する際に本質的非分岐の仮定を用いる．もし分岐測地線に沿って測度が輸送されていたら不具合がありそうだ，とは，直感的には納得できるのではないかと思う．これ以上の説明は略す. □

Remark 5.13 (S_N と U_N の関係) $\mathsf{CD}^*(K,N)$ と $\mathsf{CD}^e(K,N)$ を記述する汎関数である S_N と U_N の間には，*Jensen* の不等式に基づく次の関係がある：

$$-S_N(\rho\,\mathfrak{m})=\int_X\rho^{-1/N}\rho\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\geq\exp\left(-\frac{1}{N}\int_X(\log\rho)\rho\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)=U_N(\rho\,\mathfrak{m})$$

*(*この不等式は，「もし $\mathfrak{m}$ が *point mass* を持ち $\rho\,\mathfrak{m}$ が *Dirac* 測度であれば」等式になる*)*．これを見れば，$\mathsf{CD}^*(K,N)$ と $\mathsf{CD}^e(K,N)$ のそれぞれの局所化で同じ式 (5.6) が現れることは，そこまで不思議ではないかもしれない.

Remark 5.14 (強 CD 条件について)

(i) $\mathbb{R}^m$ や完備 *Riemann* 多様体上では，$\mathsf{CD}(K,\infty)$ と強 $\mathsf{CD}(K,\infty)$ は同値 *(*$\mathsf{CD}(K,N)$/ $\mathsf{CD}^*(K,N)$/ $\mathsf{CD}^e(K,N)$ も同様*)*.

これを示すには，$\mu_0,\mu_1\ll\mathfrak{m}$ のときに W_2-測地線が一意であれば充分．この設定では *Brenier* の定理が適用でき *[58] (Remark 3.8* (iv) も参照*)*，*Corollary 3.9* から最適カップリングは一意．更に W_2-測地線については，「各 $x\in M$ に対して，x の最小跡は測度 *0*」であるから，*Theorem 3.13* による W_2-測地線の特徴づけと合わせると一意性が分かる.

(ii) *Theorem 5.8* (v) は，強 CD 条件に対して成り立つかどうかは一般には不明 *(*少なくとも既存の証明は機能しない*)*．その意味で *Theorem 5.12* の結果は不充分に見えるかもしれないが，この弱点は他の条件と結合させることで克服できる *(8.2* 節 *(1)* 参照*)*.

Remark 5.15 (測地線の (本質的) 非分岐について) *Theorem 5.12* の証明で見たように，最適輸送を輸送経路に分解して話を各測地線上に局所化したい場面がしばしばあり，そのような場合には「測地線が非分岐かどうか」が問題になる．実際に，CD 空間上の幾何に関する定理では，「非分岐」あるいは「本質的非分岐」を仮定しているものが少なからずある *(8.2* 節 *(1)* 参照*)*．また逆に，測地線が分岐し得る空間の族から，様々な「*Riemann* 多様体の場合に成り立つ『良い』性質」の反例が見つかっている *(*例えば *[107, 165])*.

測地線が分岐する測地距離空間の代表例として ℓ^m_∞ *(*$\mathbb{R}^m$ に ∞-ノルムによる距離を入れた空間*)* や，*cable system(*グラフを *1-*単体と見たもの*)*，自己相似集合 *[108]* などがある．*(*境界のない*)Riemann* 多様体および *Alexandrov* 空間では分岐しない．また，*Ricci limit* については未解決 *(*本質的非分岐ではある*)*.

6 L^2-Wasserstein 空間上の勾配流

5 章で見たように，最適輸送理論を用いて一般の測度距離空間で (4.12) に相当する条件を厳密に定式化できる．更に，その条件をみたす空間族は重みつき Riemann 多様体だけでなく Ricci limit などの非自明な例を含んでいることが分かった．よって，4.3 節での Otto 解析に基づく発見的考察に沿って考えると，「その定式化を用いて，熱分布に対する評価 (4.15) を，最適輸送理論を用いて導出できるか？」が次の問題になる．より詳細には，この問題は次の 3 つの問いに分解できる：

(Q1) $(\mathscr{P}_2(X), W_2)$ 上で，$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流をどう定式化するのか？

(Q2) 勾配流は，$\mathrm{CD}^e(K,N)$ 条件下で (4.15) をみたすのか？

(Q3) 勾配流は熱分布 (熱方程式の解) と同一のものなのか？

問 (Q2)(Q3) の重要性は，これまで繰り返し言及し後に 7.4 節で論じるように，(4.15) を経由して Bakry-Émery の曲率次元条件が導出できる点にある．この章では，説明の簡便さのため $N = \infty$ の場合に限定して，(Q1)–(Q3) に対する解答を与える [47]．(Q1) については 6.1 節で，今回の話で必要な解答を一般的な枠組で与える．実はそこで，勾配流の 2 つの定式化を扱う．片方の枠組み (EVI) は，一般的な枠組で (Q2)(Q3) への解答を提供する．これを 6.2 節で扱う．ただし，「熱方程式の解」を測度距離空間で論じることは後回しにして，ここでは重みつき Riemann 多様体に設定を限定して議論の要諦を述べる．一方で，そこでは必要な条件の検証を一つ先送りにする．その条件は，別の勾配流の定式化 (EDE) での (Q3) の解決と関係があり，6.3 節で議論する．他の設定での (Q3) の解決に関する歴史的経緯も，ここで少し紹介する．

[47] $N < \infty$ の場合も本質的なアイデアは同じ (あるいは Remark 5.1 (ii) の意味で $N = \infty$ の場合に帰着) だが，計算が複雑になる．

6.1 距離空間上の勾配流

この節では，上記 (Q1) に対する答を与える．$(\mathscr{P}_2(X), W_2)$ は距離空間であるから，距離空間上の勾配流の理論が援用できる．なお逆に，L^2-Wasserstein 空間上で勾配流を考える際には，何らかの特異空間 (可微分構造を持たない空間) 上の理論を援用する必要がある．実際，仮に X が Euclid 空間や Riemann 多様体であっても，付随する L^2-Wasserstein 空間はある種の無限次元空間であり，通常の可微分構造を持たない．距離空間上の勾配流のうち，ここでは，[7] で扱われているものに話題を限定する．それでも，枠組の抽象性故に，以下の複数の定義がある：

- 然るべき近似スキーム (minimizing movement scheme) の極限
- エネルギー消散等式 (EDE; Energy Dissipation Equality)[48]
- 発展変分不等式 (EVI; Evolution Variational Inequality)

これらは一般には一致するとは限らない (そもそも，解の存在が問題になる)．おおまかに言って，下方のものほど狭義の勾配流といえる．ここでは，EDE と EVI についてのみ紹介する．

一般論を展開するため，(Y, d_Y) を距離空間とする．3.1 節で導入した絶対連続曲線と metric speed が以下の理論展開で本質的に用いられる．$U : Y \to (-\infty, \infty]$ を下半連続関数とする．また $\mathscr{D}(U) = \{y \in Y \mid U(y) < \infty\}$ とする．以下，U の勾配流に相当する概念を導入していく．

Definition 6.1 (エネルギー消散等式) *Y 上の曲線 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ が $\eta_0 \in \mathscr{D}(U)$ を初期条件とする* ***EDE の意味での U の勾配流****である，とは，局所絶対連続であって，a.e. $t > 0$ で以下の関係式をみたすことを言う：*

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(\eta_t) = \frac{1}{2}|\dot{\eta}|(t)^2 + \frac{1}{2}|\nabla_- U|(\eta_t)^2,$$

ただし，

$$|\nabla_- U|(y) := \varlimsup_{\substack{z \to y \\ z \neq y}} \frac{[U(y) - U(z)]_+}{d_Y(y, z)} \left(= \lim_{r \downarrow 0} \sup_{z \in B_r(y) \setminus \{y\}} \frac{[U(y) - U(z)]_+}{d_Y(y, z)} \right)$$

(これを U の descending slope という).

Definition 6.2 (発展変分不等式) *$\eta_0 \in \mathscr{D}(U)$ とする．Y 上の曲線 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ が η_0* ***を初期条件とする K-EVI の意味での U の勾配流****である, とは, $(\eta_t)_{t>0}$ が局所絶対連続かつ $\lim_{t\to 0} d_Y(\eta_t, \eta_0) = 0$ であって，各 $z \in Y$ に対し a.e. $t > 0$ で以下の関係式をみたすことを言う [49]：*

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}d_Y(\eta_t, z)^2 + \frac{K}{2}d_Y(\eta_t, z)^2 \leq U(z) - U(\eta_t).$$

Definition 6.1, Definition 6.2 共に，確かに (Y, d_Y) の距離構造のみで定義を与えている．従って，これらの定義は可微分構造を持たない空間上でも意味を持ち得る．そして，Definition 6.1, Definition 6.2 は，次の意味で勾配流の定義として適切なものになっている．

[48] Energy dissipation identity (EDI) とも呼ばれる．また，より非自明な片側の不等式を指して，Energy dissipation inequality と呼ぶ場合もある

[49] γ が絶対連続曲線であるから，左辺の微分は実数値絶対連続関数に対するものとして a.e. t で意味を持つ．

Proposition 6.3 (勾配流の検証) (Y, g_Y) を *(*境界をもたない*)* 完備 *Riemann* 多様体で，$U \in C^\infty(Y)$ とする．U の勾配流は大域的に存在するとする [50].

(i) *EDE* の解，K-EVI の解は，それぞれ U の勾配流になる．

(ii) U の勾配流は *EDE* の解になる．$\mathrm{Hess}\, U \geq K$ であれば，K-EVI の解にもなる．

Proof. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を Riemann 計量，即ち，接ベクトルの内積とする．

まず EDE について示す．(i) を考えるため，$(\eta_t)_{t\geq 0}$ を EDE の解とする．このとき，各 $t > 0$ で次が成り立つ：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(\eta_t) = \langle \nabla U(\eta_t), \dot{\eta}_t \rangle \geq -|\nabla U|(\eta_t)\, |\dot{\eta}|(t) \geq -\frac{1}{2}|\nabla U|(\eta_t)^2 - \frac{1}{2}|\dot{\eta}|(t)^2. \tag{6.1}$$

EDE が成り立つなら，この 2 つの不等号は等号でなければならない．第 1 の等号から $\nabla U(\eta_t)$ と $\dot{\eta}_t$ は平行かつ逆向きであり，第 2 の等号から $|\nabla U|(\eta_t) = |\dot{\eta}|(t)$ が従う．よって，合わせて $\dot{\eta}_t = -\nabla U(\eta_t)$ を得る．またこの議論から，(ii) の EDE に関する主張も直ちに従う．

次に EVI について示す．(i) を考えるため，$(\eta_t)_{t\geq 0}$ を EVI の解とする．$t > 0$ とし，$\gamma \in \mathrm{Geo}(Y)$，$\gamma_0 = \eta_t$ をみたすものとする．$s \in (0, 1]$ を充分小さくとると，$(d_Y(\eta_{t+\varepsilon}, \gamma_s))_\varepsilon$ に対して第一変分公式が適用できて，

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} d_Y(\eta_t, \gamma_s)^2 = -s\langle \dot{\eta}_t, \dot{\gamma}_0 \rangle$$

を得る．従って，z を γ_s として EVI を適用すると，

$$-s\langle \dot{\eta}_t, \dot{\gamma}_0 \rangle + \frac{Ks^2}{2} d_Y(\eta_t, \gamma_1)^2 \leq U(\gamma_s) - U(\gamma_0).$$

この式の両辺を s で割って $s \to 0$ とすると，$-\langle \dot{\eta}_t, \dot{\gamma}_0 \rangle \leq \langle \nabla U(\eta_t), \dot{\gamma}_0 \rangle$ を得る．$(\gamma_s)_{s\in[0,1]}$ は任意であるから，$\dot{\gamma}_0 = -(\dot{\eta}_t + \nabla U(\eta_t))$ となるよう選ぶことで，$\dot{\eta}_t = -\nabla U(\eta_t)$ が従う．

次に (ii) を考える．$(\eta_t)_{t\geq 0}$ を U の勾配流，$z \in Y$ とし，$\gamma \in \mathrm{Geo}(Y)$ で $\gamma_0 = \eta_t$, $\gamma_1 = z$ とする．$\mathrm{Hess}\, U \geq K$ より，U は K 凸 [51]．即ち，次が成り立つ：

$$U(\gamma_s) \leq (1-s)U(\gamma_0) + sU(\gamma_1) - \frac{K}{2}s(1-s)d_Y(\gamma_0, \gamma_1)^2.$$

この式から，

$$\langle \nabla U(\gamma_0), \dot{\gamma}_0 \rangle = \lim_{s\downarrow 0} \frac{U(\gamma_s) - U(\gamma_0)}{s} \leq U(z) - U(\eta_t) - \frac{K}{2} d_Y(\eta_t, z)^2 \tag{6.2}$$

を得る．一方で，第一変分公式および η が U の勾配流であることから

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} d_Y(\eta_t, z)^2 \leq -\langle \dot{\eta}_t, \dot{\gamma}_0 \rangle = \langle \nabla U(\gamma_0), \dot{\gamma}_0 \rangle \tag{6.3}$$

が成り立つ [52]．この 2 つの式を組み合わせれば，η が EVI の解と分かる． □

[50] この仮定は記述を簡便にするためであって，非本質的．

[51] Definition 5.2 と，そのあとの説明を参照．

[52] ここの不等号は脚注 36 を参照．Euclid 空間上では常に等号成立．

EVI の意味での勾配流については，以下が成り立つ．

Theorem 6.4 (K**-EVI** $\Rightarrow$ **収縮性**) $(\eta_t)_{t\geq 0}$, $(\eta_t^*)_{t\geq 0}$ を K-EVI の意味での U の勾配流とする．このとき，各 $t \geq 0$ で

$$d_Y(\eta_t, \eta_t^*) \leq \mathrm{e}^{-Kt} d_Y(\eta_0, \eta_0^*). \tag{6.4}$$

Proposition 6.3 と Theorem 6.4 を組み合わせると，「$\operatorname{Hess} U \geq K$ であれば勾配流は K-EVI の解となり，(6.4) をみたす」と主張していることになる．これは丁度，$N = \infty$ の場合の Theorem 4.9 に対応している (Remark 4.10 参照)．しかも，Proposition 6.3 の証明では，$\operatorname{Hess} U \geq K$ の条件は「U が K 凸である」という 2 階微分を必要としない定式化 ($\mathsf{CD}(K,\infty)$ の定義！) を利用している (ただし，Proposition 6.3 は空間の可微分性を仮定している)．

Proof. 合成関数の微分則より，

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} d_Y(\eta_t, \eta_t^*)^2 \leq \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} d_Y(\eta_t, \eta_{t'}^*)^2|_{t'=t} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} d_Y(\eta_{t'}, \eta_t^*)^2|_{t'=t}$$

を得る [53]．右辺第一項に z を $\eta_{t'}^*$ とした η_t の EVI を，第二項に z を $\eta_{t'}$ とした η_t^* の EVI をそれぞれ適用すると，

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} d_Y(\eta_t, \eta_t^*)^2 \leq -K d_Y(\eta_t, \eta_t^*)^2$$

が得られる．よって Gronwall 不等式から結論が従う． □

Proposition 6.3 (i) での EVI に関する議論では，K に依存する項は高次の無限小となっており特に役割を果たしていなかった．ただしそれは無限小を見る (参照点を EVI の解の近くに取る) 場合の話で，EVI の式は「極限移行する前の段階で一様な不等式評価が成り立つ」ことを主張している．これは Taylor 展開を仮想すれば，2 階の無限小に対する一様評価があることと対応しており，K に依存する項が，丁度その一様評価の役割を担っている．そう読めば，ポテンシャル関数の 2 階微分の一様評価から (4.16) が得られたことと，EVI の K に依存する項によって (6.4) の評価が得られることが対応している．このことから，EVI の解はポテンシャル関数の K 凸性に関するなんらかの情報まで含む定式化だと考えられる．実際，それは正しいことが次節の議論で明らかになる．

最後に EDE と EVI の基本的な性質に関する注を与えて，この節を終えよう．

Remark 6.5 (EDE と EVI の基本的性質) 以下，証明は *[7]* を参照.

(i) *EVI* の意味での勾配流は *EDE* の意味での勾配流になる．

(ii) *EVI* の意味での勾配流は，存在すれば *(*初期条件に関して*)* 一意．更に初期条件を $\overline{D(U)}$ まで自然に拡張できる *(*いずれも *Theorem 6.4* による*)*.

(iii) (Y, d_Y) が完備局所コンパクト測地空間で，U が *(*下半連続かつ*)* ある $K \in \mathbb{R}$ で K 凸ならば，*EDE* の解が存在する *(*一般に一意性は不明；ただし，L^2*-Wasserstein* 空間上の $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流は一意 *[8, 69])*．局所コンパクトの仮定は，他の仮定で置き換えて弱めることもできる．

[53] 距離空間上，この微分則は本来証明が必要 [7, Lemma 4.3.4]．もちろん，古典的な設定では “=” が成立.

6.2　曲率次元条件と発展変分不等式

ここで，$(\mathscr{P}_2(X), W_2)$ 上の $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流の話に戻る．この節では，X の代わりに重みつき Riemann 多様体 $(M, g, \mathfrak{m})$ (2 章参照) の場合に，冒頭の (Q2)(Q3) への解答の概略を見る．X を制限する理由はいくつかあるが，そのうちのひとつは「熱分布をどう定義するか」という問題がある．この設定であれば，L^2-空間での熱方程式の解として熱分布を自然に定められることは既に 2 章で見た．従って，熱分布の定義以外の部分に注意を集中させることができる．実際，この節の主定理はより一般の枠組に (然るべき形で) 拡張できる (Theorem 7.9)．以下で説明する証明も，一般の設定のものを今の枠組に限定したものにしてある．従って，Ricci 曲率の概念など，空間の (2 階) 可微分性を前提とする諸概念の使用を避けてある．逆に，証明中で幾つか「非自明」として説明を省略した部分は，今の枠組では容易な主張も混じっているかもしれない．

$d := d_g$ を (M, g) 上の Riemann 距離とする．また $\mathcal{L}$ と $P_t = \mathrm{e}^{t\mathcal{L}}$ を 2 章で定めたものとする．Theorem 6.4 より，EVI の解が存在すれば，その特徴づけを介して (Q2) を解決できる．そこで解の存在の是非を問うことになる．次の定理から，K-EVI の解の存在は広義の曲率次元条件 (ただし $N = \infty$) であること，そして，存在証明が (Q3) の解決を伴うことが分かる．

Theorem 6.6 ($\mathsf{CD}(K, \infty) \Leftrightarrow K$-$\mathsf{EVI}$ **on** $(M, d, \mathfrak{m})$) 次は同値：

(1) $(M, d, \mathfrak{m})$ は $\mathsf{CD}(K, \infty)$ をみたす．

(2) $(M, d, \mathfrak{m})$ は (V) をみたし，$(\mathscr{P}_2(M), W_2)$ 上で，各 $\mu_0 \in \mathscr{D}(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}})$ に対して μ_0 を初期条件とする K-EVI の意味での $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流が存在する．

更に，(1)(2) いずれかが成り立てば，熱半群は K-EVI の解を与える．即ち，f が M 上の $\mathfrak{m}$ に関する確率密度 *(*$f \in L^1(\mathfrak{m})$*,* $f \geq 0$ *かつ* M *上での積分値が 1)* で $f\,\mathfrak{m} \in \mathscr{D}(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}})$ のとき，$(P_t f\,\mathfrak{m})_{t \geq 0}$ は K-EVI の解になる．

Proof. 以下，[6, Theorem 6.1], [10, Theorem 5.1] および [46, Theorem 3.2] の証明の概略を述べる．このやり方に沿って証明が遂行できるが，証明中に都合よく「〜であるとしてよい」としているところでは実現のための近似が逐一必要になり [54]，総体としてかなりの技巧を要する．また，各種極限操作の妥当性も議論なしで認める．

(1) ⇒ (2): (V) の成立は Remark 5.3 参照．EVI については，Proposition 6.3 (ii) の議論を Otto 解析の言葉で焼き直したものを厳密にする，という流れで示す．その際，勾配流の代わりに熱分布を用いる．即ち，$\mathfrak{m}$ に関する確率密度 f に対して $\nu_t = P_t f\,\mathfrak{m}$ が EVI の解を与えることを示す．ただし，$(\nu_t)_{t>0}$ の ($\mathscr{P}_2(M)$ 上の曲線としての) 絶対連続性はここでは議論しない (次節で扱う)．

$\mu \in \mathscr{P}_2(M)$ とする．$d^2/2$ を費用関数とする，(ν_t, μ) に対する最適輸送問題を考えよう．$(-\varphi, \psi) \in L^1(\nu_t) \times L^1(\mu)$ を Kantorovich potential とする．即ち，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} W_2(\nu_t, \mu)^2 &= \int_M \psi \, \mathrm{d}\mu - \int_M \varphi \, \mathrm{d}\nu_t, \qquad (6.5)\\
\psi(y) - \varphi(x) &\leq \frac{1}{2} d(x, y)^2 \quad (x, y \in M).
\end{aligned}
$$

[54] 実際には，それ以外にも，もっと厳密な議論が必要なところはある．

以下，ψ, φ は “よい” 関数「であるとしてよい」．この設定の下で，次の 2 つを示せば充分．

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W_2(\nu_t, \mu)^2 = \int_M \langle \nabla P_t f, \nabla\varphi\rangle \, \mathrm{d}\mathfrak{m}, \tag{6.6}$$

$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) - \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_t) - \frac{K}{2}W_2(\mu, \nu_t)^2 \geq \int_M \langle \nabla P_t f, \nabla\varphi\rangle \, \mathrm{d}\mathfrak{m}. \tag{6.7}$$

まず (6.6) を示す．Kantorovich 双対性から，各 $\delta > 0$ で次が成り立つ：

$$\frac{1}{2}W_2(\nu_{t+\delta}, \mu)^2 \geq \int_M \psi \, \mathrm{d}\mu - \int_M \varphi \, \mathrm{d}\nu_{t+\delta}.$$

この式と (6.5) を辺々引いて δ で割り極限をとれば,

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W_2(\nu_t, \mu)^2 \geq -\lim_{\delta\downarrow 0}\int_M \varphi \frac{P_{t+\delta}f - P_t f}{\delta} \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_M \langle \nabla\varphi, \nabla P_t f\rangle \, \mathrm{d}\mathfrak{m}$$

を得る (最後の等式で Gauss-Green 公式を用いた)．$t+\delta$ の代わりに $t-\delta$ で同じ計算をすれば逆向きの不等号が得られるので，合わせて (6.6) が従う．次に (6.7) を示す．$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の K 凸性から，$(\mu_s)_{s\in[0,1]} \in \mathrm{Geo}(\mathscr{P}_2(M))$, $\mu_0 = \nu_t$, $\mu_1 = \mu$ に対して

$$\varliminf_{s\downarrow 0} \frac{\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_s) - \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0)}{s} \geq \int_M \langle \nabla P_t f, \nabla\varphi\rangle \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \tag{6.8}$$

を示せば充分 ((6.2) を見よ)．$\mu_s \in \mathscr{D}(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}})$「であるとしてよい」．$\mu_s = \rho_s \, \mathfrak{m}$ と書く．$\rho_s > 0$「であるとしてよい」．ここで，Theorem 3.13 より，$(e_s)_\sharp \Xi = \mu_s$ となる $\Xi \in \mathscr{P}(C([0,1]; M))$ が存在する．$\zeta(r) := r\log r$ は (0 以外で) 可微分な凸関数であるから，$r_1, r_2 > 0$ に対し，$\zeta(r_2) - \zeta(r_1) \geq \zeta'(r_1)(r_2 - r_1)$ が (r_1, r_2 の大小関係によらず) 成り立つ．これら 2 つの性質を用いて，次を得る：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_s) - \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0)}{s} &\geq \frac{1}{s}\int_M (\rho_s - \rho_0)\log\rho_0 \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \\
&= \frac{1}{s}\int_M \log\rho_0 \, \mathrm{d}(e_s)_\sharp\Xi - \int_M \log\rho_0 \, \mathrm{d}(e_0)_\sharp\Xi \\
&= \frac{1}{s}\int_{C([0,1];M)} (\log\rho_0(\gamma_s) - \log\rho_0(\gamma_0)) \, \Xi(\mathrm{d}\gamma).
\end{aligned}$$

Brenier の定理 (Theorem 3.7) の多様体版 (Remark 3.8 (iv)) から，$\nabla\varphi(\gamma_0) = \dot\gamma_0$ Ξ-a.e. γ「であるとしてよく」，また $\rho_0 = P_t f$ であるから,

$$\begin{aligned}
\varliminf_{s\downarrow 0} \frac{\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_s) - \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0)}{s} &\geq \int_{C([0,1];M)} \langle \frac{\nabla\rho_0}{\rho_0}(\gamma_0), \dot\gamma_0\rangle \, \Xi(\mathrm{d}\gamma) \\
&= \int_M \langle \frac{\nabla P_t f}{P_t f}, \nabla\varphi\rangle \, \mathrm{d}\mu_0 = \int_M \langle \nabla P_t f, \nabla\varphi\rangle \, \mathrm{d}\mathfrak{m}.
\end{aligned}$$

よって結論を得る．

(2) $\Rightarrow$ (1): $(\mu_s)_{s\in[0,1]} \in \mathrm{Geo}(\mathscr{P}_2(M))$ とし，$(\nu_s(t))_{t\geq 0}$ を μ_s を初期条件とする K-EVI の解とする．ここで,

$$\Xi(t) := (1-s)W_2(\mu_0, \nu_s(t))^2 + sW_2(\nu_s(t), \mu_1)^2$$

とおく．このとき，W_2 の三角不等式と初等的な不等式 $s(1-s)(a+b)^2 \le (1-s)a^2 + sb^2$ $(a,b \in \mathbb{R})$ から $\Xi(t) \ge \Xi(0)$ が従う．よって，K-EVI を適用すると

$$\begin{aligned} 0 \le \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\Xi}{\mathrm{d}t}(0) &\le (1-s)(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0) - \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_s)) + s(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_1) - \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_s)) - \frac{K}{2}\Xi(0) \\ &= (1-s)\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0) + s\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_1) - \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_s) - \frac{K}{2}s(1-s)W_2(\mu_0,\mu_1)^2 \end{aligned}$$

となるので，結論を得る． □

Remark 6.7 (Otto 解析による，Theorem 6.6 の証明の解釈) (6.6) の右辺について，*Otto* 解析の観点から考察を加える．証明中と同様に $(\mu_s)_{s\in[0,1]} \in \mathrm{Geo}(\mathscr{P}_2(M))$*，* $\mu_0 = \nu_t$*，* $\mu_1 = \mu$ とすると，$\dot{\mu}_0 = \nabla\varphi$ となる *(Brenier* の定理の多様体版による*)*．従って，ν_t が $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流であることを認めれば，

$$\int_M \langle \nabla P_t f, \nabla\varphi\rangle\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_M \langle \frac{\nabla P_t f}{P_t f}, \nabla\varphi\rangle\,\mathrm{d}\nu_t = \mathbf{g}_{\nu_t}(\nabla\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_t), \dot{\mu}_0)$$

となる．従って，(6.7),(6.6) を (6.2), (6.3) と各々対比すれば，これらが自然な式と分かる．

Remark 6.5 (ii) より EVI の解は存在すれば一意なので，Theorem 6.6 の後半の主張より，(Q3) は解決している (EVI の解が熱半群が与える熱分布の解と一致する，と言う意味で)．また，このことと Theorem 6.4 を合わせると，$\nu_t^{(i)} = P_t f_i\,\mathfrak{m} \in \mathscr{P}_2(M)$ $(f_i \in L^2(\mathfrak{m}),\ i = 0,1)$ に対して (4.16) が成り立つことも分かる．

Remark 6.8 (W_2-収縮性の導出について) $\nu_t^{(i)} = P_t f_i\,\mathfrak{m} \in \mathscr{P}_2(M)$ *(*$f_i \in L^2(\mathfrak{m})$*,* $i = 0,1$*)* に対する (4.16) については，別の証明も知られている．一番古いものは，熱分布の確率論的対応物である *Brown* 運動の結合法 *(*平行移動カップリング*)* による *(*W_2 での定式化を初めて結合法で議論したのは *[180]* と思われるが，より強い評価がそれ以前から既知であった．*[180]* の参考文献を参照*)*．解析的には，*Bakry-Émery* の微分評価から導出する方法が複数知られている *([20, 21, 117])*．結合法は後進 *Ricci* 流の下での熱分布にも適用でき *[118]*，微分評価に基づく方法は *Heisenberg* 群上の，劣 *Laplacian* に対応する熱分布にも適用できる *[117]* など，それぞれの方法に利点がある．なお，微分評価に基づく方法は，精密化も含めて *9.2* 節で論じる．

6.3　熱分布の同定に関する補足

ここで，(Q3) に関する研究の歴史的な流れを概観しておく．

この方面での最初の結果は，$\mathbb{R}^n$ 上で，minimizing movement scheme の収束に相当する方法で構成した相対エントロピーの勾配流が熱方程式の弱解になると示されたことであろう [92]．この方法は [7] により整理・一般化され，この方面の研究の礎になった ([179] も参照のこと)．その後，Riemann 多様体では最も一般的な結果が [53] で与えられた．また，Finsler 多様体においては，[152] で示された (この場合には，対応する熱分布は非線形になる)．更には，無限次元空間である Wiener 空間 [57]，劣 Riemann 多様体の代表例である Heisenberg 群 [94] 等の，様々な設定で研究されてきた．

これらの研究は，(Q3) を，対応する偏微分方程式 (熱方程式) の解の一意性へと帰着させる方法であり，$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流の一意性へと帰着させた Theorem 6.6 のような方法とは，問題へ

のアプローチの仕方が本質的に異なる．このような転換の背景には，「通常の可微分構造を持たない特異空間上でも適用可能な議論を展開したい」という問題意識があった．実際，この新たなアプローチに基づく議論は，(コンパクト)Alexandrov 空間での結果 [74] を嚆矢として，測度 (測地) 距離空間 [6, 8, 10] へと一般化された．また，別の流れとして，(有限) グラフ上で同様の問題を考えた研究があり [137, 141]，この場合には空間の離散性に起因する難しさが生じる．ここで紹介した文献では，L^2-Wasserstein 距離の定義を Benamou-Brenier 公式 (4.4) に基づくものに置き換える点に特徴がある．また，この場合の考え方を利用し，Lévy 過程に対応する非局所的拡散方程式の解についても同様の研究が展開されている [52].

なお，[8, 74] では EVI の代わりに EDE を勾配流の定義に用いて議論している (EVI の解の存在は空間に制約を課す (7.2 節参照)．そのため，Finsler 多様体など，EVI を考えるのが適切ではない状況がある)．熱分布の同定を示す過程で $(P_t f\,\mathfrak{m})_{t\geq 0}$ が $(\mathscr{P}_2(M), W_2)$ 上の絶対連続な曲線になることが示され，そのことは，EVI の解を考える際にも暗に用いられている (Definition 6.2 参照).

Theorem 6.9 (EDE の勾配流 = 熱分布) $(M,d,\mathfrak{m})$ は $\mathsf{CD}(K,\infty)$ をみたすとする．また，$f\in L^2(\mathfrak{m})$ を $f\,\mathfrak{m}\in\mathscr{P}_2(M)\cap\mathscr{D}(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}})$ なるものとする．このとき，$\nu_t = P_t f\,\mathfrak{m}$ は *EDE* の意味での勾配流になる．特に，*Remark 6.5* (iii) より，結果的に ν_t は *(*唯一の*)EDE* の意味での $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流と一致する.

Proof. 以下の流れに沿って，より一般的な設定で実際の証明が実現できる ([8] 参照) が，本来行う近似は全て省略し，各種極限操作の妥当性も議論なしで認める．まず $\mathsf{CD}(K,\infty)$ 条件から $|\nabla_-\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}|$ が $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の upper gradient になると分かり，そこから (6.1) に相当する不等式が従う．よって逆向きの不等式を示せばよい．ここで，EDE の定義に現れる 3 つの量のうち，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_t) = -\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(\nu_t) \quad \text{for a.e. } t, \tag{6.9}$$

$$|\nabla_-\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}|(\nu)^2 \leq \mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(\nu) \tag{6.10}$$

が成り立つ ($\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}$ は Fisher 情報量；Remark 4.6 と同様に定義する)．(6.9) は，少なくとも形式的には計算で確かめられる．(6.10) は，$\mathsf{CD}(K,\infty)$ を用いて Otto 解析の考え方をうまく実装することで得られる ((6.8) を示すために上で展開した議論は，(6.10) と深い関連がある)．従って，証明は次の不等式を示すことに帰着される：

$$|\dot{\nu}_t|^2 \leq \mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(\nu_t) \quad \text{a.e.} \tag{6.11}$$

これを，Kantorovich 双対性と Hopf-Lax 半群 Q_s(3.11) ($p=2$ の場合) を用いて，Theorem 4.1 の “$\leq$” の証明と類似した議論で示す．Kantorovich 双対性より，

$$\frac{W_2(P_t f\,\mathfrak{m}, P_{t+\delta} f\,\mathfrak{m})^2}{2\delta^2} = \frac{1}{\delta}\sup_{\varphi\in\mathrm{Lip}_b(M)}\left[\int_M Q_\delta\varphi\cdot P_{t+\delta}f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} - \int_M \varphi\cdot P_t f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right] \tag{6.12}$$

となる．この右辺の sup の中身を，φ に無関係な量で評価する．$s\mapsto\displaystyle\int_M Q_s\varphi\cdot P_{t+s}f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}$ に微

積分学の基本定理と Leibniz 則を適用し，(3.14) を用いると，

$$\begin{aligned}\int_M Q_\delta\varphi\cdot P_{t+\delta}f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}-\int_M\varphi\cdot P_tf\,\mathrm{d}\mathfrak{m}&=\int_0^\delta\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_M Q_s\varphi\cdot P_{t+s}f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)\mathrm{d}s\\&=\int_0^\delta\left(-\frac{1}{2}\int_M|\nabla Q_s\varphi|^2P_{t+s}f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}+\int_M Q_s\varphi\cdot\mathcal{L}P_{t+s}f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)\mathrm{d}s\\&=\int_0^\delta\left(-\frac{1}{2}\int_M|\nabla Q_s\varphi|^2P_{t+s}f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}-\int_M\langle\nabla Q_s\varphi,\nabla P_{t+s}f\rangle\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)\mathrm{d}s\\&\le\frac{1}{2}\int_0^\delta\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(\nu_{t+s})\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

ここで，最後の不等号は平方完成で得られる．これを (6.12) に代入すれば

$$\frac{W_2(\nu_t,\nu_{t+\delta})^2}{\delta^2}\le\frac{1}{\delta}\int_0^\delta\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(\nu_{t+s})\,\mathrm{d}s \tag{6.13}$$

となるので，$\delta\downarrow 0$ として (6.11) を得る．

最後に，$(\nu_t)_{t\ge0}$ が $(\mathscr{P}_2(M),W_2)$ 上の局所絶対連続曲線になる理由を簡単に述べておく．別の議論で，仮定 $f\in\mathscr{P}_2(M)\cap\mathscr{D}(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}})$ から $\int_0^t\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(\nu_s)\,\mathrm{d}s$ の上からの評価が従う ([8, (4.15)])．その評価と (6.13) を組み合わせると，$(\nu_t)_{t\ge0}$ が局所絶対連続曲線と分かる． □

7 Riemann 的曲率次元条件と熱分布

この章では，これまでの話の集大成として，測度距離空間の枠組で複数の広義の曲率次元条件の間の同値性を議論する．これまでの議論を利用するためには，測度距離空間上に標準的な熱分布を定義する必要がある．そのために，7.1 節で Cheeger 型エネルギー汎関数を導入する．Cheeger 型エネルギーの性質にも非自明なこと，興味深いことがあるので，そこで性質も少し紹介する [55]．Cheeger 型エネルギーの L^2-空間での勾配流として熱半群を定めることができるが，これは一般には線形作用素にならない．非線形の場合には (4.16) に相当する評価を導出できない場合があると知られているので，それを除外するための条件 (無限小 Hilbert 的) を 5 章で導入した CD 条件/CD^e 条件に付加する．7.2 節では，条件の付加とその帰結を論じる．そこ (および 8.2 節) で見るように，これは 6.2 節の議論を実現する上で極めて自然な仮定と分かる．続く 7.3 節で，$N=\infty$ の場合に，6.1, 6.2 節で扱った議論を通じて，複数の広義の曲率次元条件の同値性を示す．それらの結果は 7.4 節で $N<\infty$ の場合に拡張される．

この章で導入するエネルギー汎関数は無限小 Hilbert 的の仮定の下で自然に Dirichlet 形式となり，また逆に，然るべき条件の下で，Dirichlet 形式を出発点として同様の理論を展開することもできる．7.5 節ではこれらのことについて述べる．

7.1 Cheeger 型エネルギー汎関数

古典的には，熱分布は「Dirichlet エネルギー汎関数の L^2-空間での勾配流」として定義できる．これは，(強局所的)Dirichlet 形式から半群を構成することに相当する．この構成を踏襲するため，測度距離空間 $(X,d,\mathfrak{m})$ 上にエネルギー汎関数を導入しよう．

[55] 性質については，少し詳細に立ち入りすぎなきらいもあるので，興味が湧かなければ読み飛ばしてもよい．

もちろん，「$(\mathscr{P}_2(X), W_2)$ 上の $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流を考え，その解を以って熱分布と定める」という方法を模索することもひとつの可能性ではある．しかしながら，6.2 節の議論を踏襲する際に必要となる，最も強い意味での相対エントロピーの勾配流 (EVI) の一般論には解の存在定理が知られていない．むしろ，解が存在すること自体が広義の曲率次元条件のひとつになる (Theorem 7.9)．このことは既に Theorem 6.6 でも見た．EVI の解の存在証明のためにも，以下で構成するエネルギー汎関数に付随する熱分布を利用することになる．これは Theorem 6.6 の証明の流れに沿った考え方でもある．

以下で述べる Cheeger 型エネルギー汎関数の定義と基本的な性質について，説明が不充分と感じた部分は，[8] の 4 章から 6 章を参照のこと．

Definition 7.1 (Cheeger 型エネルギー汎関数) 汎関数 $\mathsf{Ch} : L^2(\mathfrak{m}) \to [0, \infty]$ を次で定める：

$$\mathsf{Ch}(f) := \frac{1}{2} \inf \left\{ \varliminf_{j \to \infty} \int_X |\nabla f_j|^2 \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \;\middle|\; f_j \in \mathrm{Lip}(X),\ f_j \to f \ \ in\ L^2(\mathfrak{m}) \right\}.$$

ここで，$|\nabla f_j|$ は f_j の局所 *Lipschitz* 定数 *((3.1)* 参照*)*．つまり，Ch は局所 *Lipschitz* 定数から定まる *Dirichlet* エネルギー汎関数の *relaxation* になっている．*Sobolev* 空間の記法により，$\mathscr{D}(\mathsf{Ch}) := \{f \in L^2(\mathfrak{m}) \mid \mathsf{Ch}(f) < \infty\}$ を $W^{1,2}(X)$ とも書く．

Cheeger 型エネルギー汎関数の性質として，$f \in \mathscr{D}(\mathsf{Ch})$ のとき，ある $L^2(\mathfrak{m})$ の元 $|\nabla f|_*$ で，

$$\mathsf{Ch}(f) = \frac{1}{2} \int_X |\nabla f|_*^2 \, \mathrm{d}\mathfrak{m}$$

をみたすものが存在する．この $|\nabla f|_*$ は，「『Ch の定義に現れるある関数列 $(f_j)_j$ であって，$|\nabla f_j|$ が L^2-弱極限を持つようなもの』に対して，その極限を $\mathfrak{m}$-a.e. の意味で上回る関数 (relaxed gradient という) 達のうち，L^2-ノルム最小なもの」として特徴付けられる．これを f の **minimal relaxed gradient** という．$|\nabla f|_*$ は，Riemann 多様体上で関数の (Sobolev の意味での) 微分の絶対値が持つ様々な性質と類似の性質を持つ．一例として，以下を挙げておく (あくまで雰囲気を紹介するのが目的なので，一部の性質は簡略化してある)．

Proposition 7.2 (Minimal relaxed gradient の性質)

(i) 各 $f, h \in D(\mathsf{Ch})$, $c \in \mathbb{R}$ に対して，$(|\nabla f|_* - |\nabla h|_*)1_{\{f-h=c\}} = 0$ $\mathfrak{m}$-*a.e.*
特に，$|\nabla f|_* 1_{\{f=c\}} = 0$ $\mathfrak{m}$-*a.e.*

(ii) 各 $f, h \in \mathscr{D}(\mathsf{Ch})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して $|\nabla(\alpha f + \beta h)|_* \le |\alpha||\nabla f|_* + |\beta||\nabla h|_*$.

(iii) 各 $\phi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$, $\phi(0) = 0$ および $f \in \mathscr{D}(\mathsf{Ch})$ に対し $|\nabla \phi(f)|_* \le |\phi'(f)||\nabla f|_*$．更に，もし ϕ が単調非減少なら $|\nabla \phi(f)|_* = \phi'(f)|\nabla f|_*$.

(iv) $f \in \mathscr{D}(\mathsf{Ch}) \cap \mathrm{Lip}(X)$ であれば，$|\nabla f|_* \le |\nabla f|$.

また，Cheeger 型エネルギー汎関数の基本的な性質として，以下が成り立つ (証明略).

Proposition 7.3 (Cheeger 型エネルギーの性質)

(i) Ch は $L^2(\mathfrak{m})$ 上で下半連続かつ凸.

(ii) $W^{1,2}(X)$ は $f \mapsto \{\|f\|_2^2 + 2\mathsf{Ch}(f)\}^{1/2}$ を *norm* として *Banach* 空間になる．

Ch の上記の性質により，Hilbert 空間である $L^2(\mathfrak{m})$ 上の Ch の勾配流が構成できる (例えば，[7] の 1.4 節 (および，その参考文献) を参照)．初期条件 f に対して時刻 t での関数を対応させる写像を P_t と書き，**熱半群**と呼ぶ．また P_t の生成作用素 ($\mathcal{L}$ と書く) も，然るべき意味で定義できる．この定義では，一般には P_t も $\mathcal{L}$ も線形ではないことを注意しておく．一方，そうであっても，P_t は各 $p \in [1,\infty]$ に対して L^p-空間上の (広義収縮) 写像へと一意拡張される．また，Gauss–Green の公式に相当する部分積分公式も弱い形 (不等式) で成り立つ [8, Proposition 4.15]．

ここで，微分概念に関する注意を一点加えておく．一般に，滑らかではない空間の場合 (あるいは，関数が滑らかでない場合) には，微分 [56] に相当する概念が目的に応じて複数存在する．そのため，それらの概念が一致するかどうかがしばしば問題になる．上で導入した minimal relaxed gradient は Cheeger 型エネルギー汎関数との関係で考えられたものであり，(L^2-) 積分量を考えている時には局所 Lipschitz 定数でうまく近似できる．一方，曲線に沿った (外) 微分に相当する upper gradient (定義は 3.1 節参照) の概念が測度距離空間上の解析ではしばしば用いられる．最適輸送理論に関連した解析では，しばしば輸送経路に沿った微分を考える．その際には，upper gradient の概念の方が relaxed gradient よりも使い勝手が良い．実は，考える曲線の族を最適輸送理論に適合する形で制限して (minimal な)upper gradient を考えると，その概念が minimal relaxed gradient と一致することが知られている．

Definition 7.4 (minimal weak upper gradient)

(i) 以下をみたす $\Xi \in \mathscr{P}(C([0,1];X))$ を**試験輸送計画** ***(test plan)*** という：

$$\Xi\left(\mathrm{AC}^2(0,1;X)\right) = 1, \tag{7.1}$$

$$(e_t)_\sharp \Xi \ll \mathfrak{m} \text{ かつ，各有界集合 } B \subset X \text{ に対して，} \sup_{t\in[0,1]} \left\| \frac{\mathrm{d}(e_t)_\sharp \Xi}{\mathrm{d}\mathfrak{m}} \right\|_{L^\infty(B,\mathfrak{m})} < \infty. \tag{7.2}$$

(ii) 可測関数 $f : X \to \mathbb{R}$ と $h : X \to [0,\infty]$ に対して，h が f の *weak upper gradient* であるとは，各試験輸送計画 Ξ に対して，Ξ-*a.e.* γ で (3.2) をみたすことをいう．また，f の *weak upper gradient* のうち，$\mathfrak{m}$-*a.e.* の意味で極小となるものが存在する．これを ***minimal weak upper gradient*** といい，$|\nabla f|_w$ と書く．

Minimal weak upper gradient に関しては，[8] の 5 章を参照のこと [57]．

Theorem 7.5 (微分概念の一致 [8, Theorem 6.2]) (V) が成り立つとする．このとき，各 $f \in \mathscr{D}(\mathsf{Ch})$ に対して，$|\nabla f|_* = |\nabla f|_w$ $\mathfrak{m}$-*a.e.*

Proof. 考え方の概略を述べる．

まず，$|\nabla f|_* \geq |\nabla f|_w$ について．$f \in \mathrm{Lip}(X)$ に対しては，$|\nabla f|$(局所 Lipschitz 定数) が weak upper gradient になる．従ってこの時は $|\nabla f|_w \leq |\nabla f|$．一般の場合は，Lipschitz 関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，f_n が f を，$|\nabla f_n|$ が $|\nabla f|_*$ をそれぞれ L^2-近似するものを用いて結論を導く．もう少しだけ詳しく言うと，まず「2 つの関数の a.e. での不等式を出すために，各試験集合上での積分の比較をする」のと類似の発想に基づき，目標となる「Ξ-a.e. γ での評価式 (3.2)

[56] この文脈では，より正確には，微分の modulus.
[57] ここでは，[8] の 5 章の一般的な定義よりは，多少話を限定している．

で，$h = |\nabla f|_*$ としたもの」を，(7.2) を用いて γ 単位での見方から $\mathfrak{m}$ による積分の評価式に置き換える．その結果，問題を L^2-積分の誤差評価に持ち込むことができ，L^2-近似が有効に機能する状況を作り出せる．

逆向きの証明には，6.3 節で見た熱分布の同定が有効に機能する．この状況では，f^2 を $\mathfrak{m}$ に関する確率密度関数として一般性を失わない．$\nu_t := P_t(f^2)\,\mathfrak{m}$ とおく．まず，(V) を用いて，$(e_t)_\sharp \Xi = \nu_t$ なる試験輸送計画 $\Xi \in \mathscr{P}(C([0,1];X))$ が存在する状況に話が帰着できる．この状況で，Otto 解析で言うところの

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_t)|_{t=0} \le |\nabla \operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}|(\nu_0)|\dot{\nu}_0| \tag{7.3}$$

に相当する評価を考える (これが成り立つことは認める)．ここに登場する各項は，Theorem 6.9 でも考察したように，Fisher 情報量で記述できると考えられるが，「$|\nabla f|_*$ と $|\nabla f|_w$ の，どちらの微分を用いたものであるか」が重要になる．この点を注意しながら，もう一段考察を加える．ここで，P_t が minimal relaxed gradient に対応する Dirichlet エネルギーから定まる熱分布であることを踏まえると，

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_t) = |\dot{\nu}_t|^2 = \int_X \frac{|\nabla(f^2)|_*^2}{f^2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = 4\mathsf{Ch}(f) \tag{7.4}$$

が得られると考えられる (第 3 式は，minimal relaxed gradient による ν_0 の Fisher 情報量である)．実際，$\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_t)$ の微分は (形式的には) 部分積分公式で計算でき，そこで P_t と minimal relaxed gradient による Fisher 情報量との関係が現れてくる．また，Theorem 6.9 の証明 ((6.9) と (6.11) の周辺) で与えた $|\dot{\nu}_t|$ の計算も部分積分公式に基づくものであったから，そこから自然に minimal relaxed gradient が登場する．一方で，$|\nabla \operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}|$ を W_2 に関する $\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の局所 Lipschitz 定数だと思うと，この量には weak upper gradient を用いた評価が可能であろうと類推できる (最適輸送に沿った，汎関数の微分！; Theorem 6.6 の「(1) $\Rightarrow$ (2)」の証明の後半が，雰囲気を伝えてくれる)．この類推は実現でき，実際に (7.3) の $|\nabla \operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}|$ を minimal weak upper gradient による $f^2\,\mathfrak{m}$ の Fisher 情報量に置き換えた式が成り立つ．その結果を (7.4) と組み合わせると，

$$\mathsf{Ch}(f) \le \int_X |\nabla f|_w^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}$$

を得る．この式と前半で示した不等式 $|\nabla f|_* \ge |\nabla f|_w$ を組み合わせると，$|\nabla f|_* = |\nabla f|_w$ が $\mathfrak{m}$-a.e. で成り立つことが分かる． □

7.2 Riemann 的曲率次元条件

測度距離空間上への Theorem 6.6 の一般化を考える．その際，どのような枠組みで考えるのが適切であるか，まず考察を加える．ある設定でこの定理が正しいとすると，その設定で曲率次元条件 ($\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の K 凸性) が成り立てば，P_t が定める熱流は EVI の解を与えることになる．その結果，Theorem 6.4 の帰結として，P_t が定める熱流に対して W_2-収縮性 (4.16) が成り立つ．一方で，(4.16) は，Finsler 多様体上では成り立たないことがある [153] (一般に，Riemann 多様体ではない Finsler 多様体では成り立たないと考えられている)．従って，Theorem 6.6 のそのままの形での一般化は，Finsler 多様体上では成立し得ない．Finsler 多様体のような空間を分離した測度距離空間 $(X, d, \mathfrak{m})$ の族として，以下の概念が [10] で導入された．

Definition 7.6 (無限小 Hilbert 的) Ch が *2* 次形式である *(*つまり，中線定理をみたす*)* とき，$(X, d, \mathfrak{m})$ は***無限小 Hilbert 的 (infinitesimally Hilbertian)*** であるという．これは，$W^{1,2}(X)$ が *Proposition 7.3* (ii) の *norm* で *Hilbert* 空間になることと同値.

Definition 7.7 (Riemann 的曲率次元条件, $N = \infty$) 「無限小 *Hilbert* 的かつ $\mathsf{CD}(K, \infty)$」をまとめて「***Riemann* 的曲率次元条件 *(Riemannian curvature-dimension condition)*** $\mathsf{RCD}(K, \infty)$ をみたす」という．

Remark 7.8 (「無限小 Hilbert 的」関連) ここで紹介する結果は *[10]* を参照のこと．

(i) $(X, d, \mathfrak{m})$ が無限小 *Hilbert* 的であれば，(f, f) を $|\nabla f|_*^2$ にうつすような双線形写像 $\mathscr{D}(\mathsf{Ch}) \times \mathscr{D}(\mathsf{Ch}) \to L^1(\mathfrak{m})$ が存在する [58]．(f, g) のこの写像による像を $\langle \nabla f, \nabla g \rangle_*$ と書くことにする．つまり，無限小 *Hilbert* 的の名前の通りに，Ch の密度まで含めて *2* 次形式になってしまう．さらに，$\langle \nabla f, \nabla g \rangle_*$ は通常の合成関数の微分則および *Leibniz* 則をみたすことも分かる．

(ii) $(X, d, \mathfrak{m})$ が無限小 *Hilbert* 的であることと，P_t が線形写像 *(*特に有界線形かつ対称*)* であることは同値．特に，無限小 *Hilbert* 的であれば，P_t は Ch を閉双線形形式と見たときに対応する半群と一致する．

「無限小 Hilbert 的」は，接空間および接空間を内積空間とする計量が (a.e. で) 存在していることの，接空間やその上の計量を用いない定式化と言える．この条件は Finsler 多様体を分離するために人工的に導入された条件のようにも見えるかもしれない．しかし実は，Theorem 6.6 を測度距離空間で考える際に自然にこの条件が現れる．つまり，EVI の解が存在するならば，空間は無限小 Hilbert 的でなければならない．即ち次が成り立つ．

Theorem 7.9 ($\mathsf{RCD}(K, \infty) \Leftrightarrow K$-EVI on $(X, d, \mathfrak{m})$) $K \in \mathbb{R}$ に対して，次は同値 *[6, 10]*.

(A) $(X, d, \mathfrak{m})$ は $\mathsf{RCD}(K, \infty)$ 空間.

(B) $(X, d, \mathfrak{m})$ は (V) をみたし，各 $\nu_0 \in \mathscr{D}(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}) \cap \mathscr{P}_2(X)$ に対して ν_0 を初期条件とする K-EVI の意味での $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流が存在する．

また，(A)(B) いずれかが成り立てば，K-EVI の解は初期値に対して凸結合の意味で線形になる．つまり，$(\nu_t^{(0)})_{t \geq 0}$, $(\nu_t^{(1)})_{t \geq 0}$ が *EVI* の解ならば，各 $\lambda \in [0, 1]$ で $((1-\lambda)\nu_t^{(0)} + \lambda \nu_t^{(1)})_{t \geq 0}$ も *EVI* の解になる．また，$f \in L^1(\mathfrak{m})$ が確率密度で $f\,\mathfrak{m} \in \mathscr{P}_2(X)$ のとき，$(P_t f\,\mathfrak{m})_{t \geq 0}$ は K-EVI の解になる．

Proof. まず，ここまで準備してきたことがどう活きるのかを伝える，という点に焦点を絞って，概略を述べる．(B) $\Rightarrow$ (A) の，無限小 Hilbert 的を導く点のみ論じればよい (他の部分の証明 (の概略) は Theorem 6.6 に同じ [59])．$\mathsf{CD}(K, \infty)$ が成り立つので，Theorem 6.9(の，測度距離空間への一般化) より，P_t が定める熱流は EDE の意味での勾配流と一致する．よって，Remark 6.5 (i)(iii) より，EVI の解 (条件 (B) から存在が保証されている) は，P_t が定める熱流

[58] Dirichlet 形式における平方場作用素 (carré du champ) に相当する．

[59] ただし，議論を厳密化する為には，かなりの (非自明な) 近似が必要．まず $\mathfrak{m} \in \mathscr{P}_2(X)$ の場合に解決され [10]，後に $\mathfrak{m}$ が σ-有限の場合に拡張された [6].

に一致する．このことを注意 Remark 7.8 (ii) と組み合わせると，EVI の解が初期値に対して線形になること (定理の後半部分！) を示せばよい．

以下, EVI の解の線形性を示す．$(\nu_t^{(0)})_{t\geq 0}, (\nu_t^{(1)})_{t\geq 0}$ を EVI の解とし, $\lambda_0, \lambda_1 \in (0,1)$, $\lambda_0+\lambda_1 = 1$ とする．$\nu_t := \sum_{i=0,1} \lambda_i \nu_t^{(i)}$ が EVI の解になることを示せばよい．まず Theorem 3.10 (viii) より，$\nu, \nu', \mu, \mu' \in \mathscr{P}_2(X)$ に対して

$$W_2 \left(\lambda_0 \nu + \lambda_1 \nu', \lambda_0 \mu + \lambda_1 \mu'\right)^2 \leq \lambda_0 W_2(\nu, \mu)^2 + \lambda_1 W_2(\nu', \mu')^2 \tag{7.5}$$

が分かる．仮定から，$(\nu_t^{(i)})_{t>0}$ $(i = 0,1)$ は $(\mathscr{P}_2(X), W_2)$ 上の局所絶対連続曲線であった．よって，(7.5) を $(\nu, \nu', \mu, \mu') = (\nu_{t+s}^{(0)}, \nu_{t+s}^{(1)}, \nu_t^{(0)}, \nu_t^{(1)})$ に対して適用することで，$(\nu_t)_{t>0}$ も局所絶対連続曲線と分かる．

次に，再び (7.5) を用いて，$W_2(\nu_t, \mu)$ の t-微分を評価する．その準備として，$\pi \in \Pi(\nu_t, \mu)$ を W_2 に関する最適カップリングとし，π **による** $\nu_t^{(i)}$ の**押し出し** $\pi_\sharp \nu_t^{(i)}$ を[60] 次のように定める $(i = 0,1)$：まず，$\pi^{(i)} \in \mathscr{P}(X \times X)$ を

$$\pi^{(i)}(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) := \frac{\mathrm{d}\nu_t^{(i)}}{\mathrm{d}\nu_t}(x)\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

で定める．このとき，各 $A \in \mathcal{B}(X)$ に対して，$\pi_\sharp \nu_t^{(i)}(A) := \pi^{(i)}(X \times A)$ で $\pi_\sharp \nu_t^{(i)}$ を定める．これを $\mu^{(i)}$ と書く $(i = 0,1)$．作り方から $\sum_{i=0,1} \lambda_i \pi^{(i)} = \pi$，$\sum_{i=0,1} \lambda_i \mu^{(i)} = \mu$ および $\pi^{(i)} \in \Pi(\nu_t^{(i)}, \mu^{(i)})$ $(i = 0,1)$ が分かる．

$W_2(\nu_t, \mu)$ の t-微分を上から評価するため，(7.5) を $(\nu, \nu', \mu, \mu') = (\nu_{t+s}^{(0)}, \nu_{t+s}^{(1)}, \mu^{(0)}, \mu^{(1)})$ で用いたい．そのために，まず $s = 0$ の場合を考える．$\pi^{(i)} \ll \pi$ なので，Corollary 3.5 より $\pi^{(i)}$ は W_2 に関する最適カップリング $(i = 0,1)$．よって特に，

$$W_2(\nu_t, \mu)^2 = \sum_{i\in\{0,1\}} \lambda_i \int_{X\times X} d(x,y)^2 \pi^{(i)}(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = \sum_{i\in\{0,1\}} \lambda_i W_2(\nu_t^{(i)}, \mu^{(i)})^2$$

を得る．即ち，上記の設定で (7.5) を考えると $s = 0$ で等号が成立する．従って，

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{Kt}\left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2(\nu_t, \mu)^2 + \frac{K}{2} W_2(\nu_t, \mu)^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{Kt} W_2(\nu_t, \mu)^2\right) \\ &\qquad \leq \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i\in\{0,1\}} \lambda_i \mathrm{e}^{Kt} W_2(\nu_t^{(i)}, \mu^{(i)})^2 \leq \mathrm{e}^{Kt} \sum_{i\in\{0,1\}} \lambda_i \left(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu^{(i)}) - \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_t^{(i)})\right) \end{aligned}$$

を得る．ここで，最後の不等式で $(\nu_t^{(i)})_{t\geq 0}$ $(i = 0,1)$ が EVI の解であることを用いた．

ここまでの議論から，証明は以下の不等式を示すことに帰着される：

$$\sum_{i=0,1} \lambda_i \left(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu^{(i)}) - \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_t^{(i)})\right) \leq \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) - \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_t). \tag{7.6}$$

ここで，相対エントロピーの参照測度の変換公式 (4.7) を用いて，

$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu^{(i)}) = \mathrm{Ent}_{\mu}(\mu^{(i)}) + \int_X \log \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathfrak{m}} \mathrm{d}\mu^{(i)}$$

[60]「π が $T_\sharp \nu_t = \mu$ をみたす写像 T によって与えられている場合 (Monge 問題の解)，$\pi_\sharp \nu_t^{(i)} = T_\sharp \nu_t^{(i)}$ になる」という意味で，写像による押し出しの一般化になっている．

が成り立つ $(i=0,1)$．同様の式は $\nu_t^{(i)}$ と ν_t の間でも成り立つ $(i=0,1)$．これらを用いて，

$$\sum_{i=0,1}\lambda_i\left(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu^{(i)})-\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_t^{(i)})\right)-\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu)+\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_t)$$
$$=\sum_{i=0,1}\lambda_i\left(\mathrm{Ent}_{\mu}(\mu^{(i)})-\mathrm{Ent}_{\nu_t}(\nu_t^{(i)})\right) \tag{7.7}$$

を得る．$\mathrm{Ent}_\mu(\mu^{(i)})$ を評価するのに，測度の押し出しに関する相対エントロピーの収縮性 [7, Lemma 9.4.5] を (今の設定で) 示す．Lemma 3.11 を用いて，$\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=\pi_y(\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}y)$, $\pi_y\in\mathscr{P}(X)$ $(y\in X)$ と分解する．このとき，まず，

$$\frac{\mathrm{d}\mu^{(i)}}{\mathrm{d}\mu}(y)=\int_X\frac{\mathrm{d}\nu_t^{(i)}}{\mathrm{d}\nu_t}\mathrm{d}\pi_y\quad \mu\text{-a.e. } y$$

となる．実際，各 $A\in\mathcal{B}(X)$ で

$$\mu^{(i)}(A)=\pi^{(i)}(X\times A)=\int_{X\times A}\frac{\mathrm{d}\nu_t^{(i)}}{\mathrm{d}\nu_t}(x)\,\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=\int_A\left(\int_X\frac{\mathrm{d}\nu_t^{(i)}}{\mathrm{d}\nu_t}(x)\,\pi_y(\mathrm{d}x)\right)\mu(\mathrm{d}y)$$

が成り立つことから分かる．これを用いると，Jensen の不等式から，

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}_\mu(\mu^{(i)})&=\int_X\frac{\mathrm{d}\mu^{(i)}}{\mathrm{d}\mu}\log\left(\frac{\mathrm{d}\mu^{(i)}}{\mathrm{d}\mu}\right)\mathrm{d}\mu=\int_X\left(\int_X\frac{\mathrm{d}\nu_t^{(i)}}{\mathrm{d}\nu_t}\mathrm{d}\pi_y\right)\log\left(\int_X\frac{\mathrm{d}\nu_t^{(i)}}{\mathrm{d}\nu_t}\mathrm{d}\pi_y\right)\mu(\mathrm{d}y)\\&\le\int_X\left(\int_X\frac{\mathrm{d}\nu_t^{(i)}}{\mathrm{d}\nu_t}\log\left(\frac{\mathrm{d}\nu_t^{(i)}}{\mathrm{d}\nu_t}\right)\mathrm{d}\pi_y\right)\mu(\mathrm{d}y)=\mathrm{Ent}_{\nu_t}(\nu_t^{(i)})\end{aligned}$$

を得る $(i=0,1)$．この不等式を (7.7) に適用すれば，(7.6) が従う． □

Theorem 6.6 の (2) ⇒ (1) の証明の議論では，まず $(\mu_s)_{s\in[0,1]}\in\mathrm{Geo}(\mathscr{P}_2(X))$ を取り，その W_2-測地線上で K 凸性の式 (5.1) が成り立つことを示している．この議論は任意の W_2-測地線で機能するので，今の設定においては強 CD 条件を導く．このことから次が分かる．

Corollary 7.10 (RCD ⇒ 強凸) RCD(K,∞) 空間は強 CD(K,∞) 条件をみたす．

この文脈では，RCD(K,∞) 空間は，熱分布の解析のために導入された空間族として話を進めてきた．一方この節の冒頭で述べたように，空間族は幾何学的な問題意識からの要請に適ったものでもあった．実際，RCD(K,∞) 空間は，以前に考えられてきた曲率次元条件よりも様々な意味で「行儀の良い (奇妙な振る舞いをしない)」空間 (族) になっている [61]．このことの実例は 8.2 節で述べることとし，先ずは Bakry-Émery の曲率次元条件との関係に話を移していく．

7.3 曲率次元条件の同値性 $(N=\infty)$

この節では RCD(K,∞) 空間上で Bakry-Émery の曲率次元条件 $(N=\infty)$ が成り立つことを紹介する (逆向きの導出は，この説の最後に少し述べる)．ここで紹介する内容の詳細は，[6, 10] を参照のこと．まず，RCD(K,∞) 空間上では，$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流と Ch の勾配流との同定は，以下の形まで深められる．

[61] 行儀が悪い方の話は，Remark 5.15 を Corollary 7.10, Theorem 5.11 と見比べるとよい．

Proposition 7.11 (**RCD 空間上の熱流の性質**) RCD(K,∞) 空間上では，P_t は対称な積分核 *(***熱核密度***)*p_t を持つ．更に $(\mu_t^x)_{t\geq 0}$ を $\mu_0=\delta_x$ をみたす *EVI* の解とすると，各 $f\in L^2(\mathfrak{m})$ に対して

$$P_tf(x)=\int_X f\,\mathrm{d}\mu_t^x \quad \mathfrak{m}\text{-}a.e.\ x.$$

更に，$f\in L^\infty(\mathfrak{m})$ に対して上式の右辺は有界かつ $(t,x)\in(0,\infty)\times X$ の関数として連続.

Proof. 例によって概略のみ述べる．まず $f\in C_0(X)$ を確率密度とする．$f\,\mathfrak{m}$ を Dirac 測度の有限線形結合で (W_2 の意味で) 近似し，EVI の線形性を用いると，Theorem 7.9 と Remark 7.8 (ii) より，

$$P_tf(x)\,\mathfrak{m}(\mathrm{d}x)=\left(\int_X f\,\mathrm{d}\mu_t^x\right)\mathfrak{m}(\mathrm{d}x)$$

が得られる (左辺を，初期値 $f\,\mathfrak{m}$ の EVI の解とみる)．従って両辺の密度が一致し，P_tf の表示を得る (一般の f に対しては近似)．EVI の定義より $t>0$ ならば $\mu_t^x\in\mathscr{D}(\mathrm{Ent}_\mathfrak{m})$．従って μ_t^x は $\mathfrak{m}$ に関する密度を持ち，これが熱核密度 p_t になる．p_t の対称性は P_t の対称性から分かる．なお，連続性の証明は省略する ([10, Theorem 6.1] 参照；この命題の，ここまでで示した結果を用いる). □

応用として，以上から，$\nu_0=\nu$ をみたす EVI の解を $(\nu_t)_{t\geq 0}$ とおくと，

$$\int_X f\,\mathrm{d}\nu_t=\int_X P_tf\,\mathrm{d}\nu_0$$

が成り立つ．このことから，ν_t を以下では $P_t^*\nu$ と書くことにする．$\nu=f\,\mathfrak{m}$ であれば，$P_t^*\nu=P_tf\,\mathfrak{m}$ になる．また，以下断りなく，記号 P_tf を Proposition 7.11 の式の右辺の意味で用いる.

Theorem 7.12 (**RCD $\Rightarrow$ Bakry-Émery, $N=\infty$**) $(X,d,\mathfrak{m})$ を RCD(K,∞) 空間とする．このとき以下が成立.

(C) *(*W_2**-収縮性***)* 各 $\nu,\nu'\in\mathscr{P}_2(X)$, $t>0$ で,

$$W_2(P_t^*\nu,P_t^*\nu')\leq \mathrm{e}^{-Kt}W_2(\nu,\nu').$$

(D) *(****Bakry-Émery*** **の微分評価***)* 各 $f\in W^{1,2}(X)$, $t>0$ で

$$|\nabla P_tf|_*^2\leq \mathrm{e}^{-2Kt}P_t(|\nabla f|_*^2).$$

(E) *(****Bakry-Émery*** **の** *(***弱***)* **曲率次元条件** *(*$N=\infty$*))* $f\in\mathscr{D}(\mathcal{L})$ かつ $\mathcal{L}f\in W^{1,2}(X)$ をみたす f と $h\in\mathscr{D}(\mathcal{L})\cap L^\infty(\mathfrak{m})$, $h\geq 0$ かつ $\mathcal{L}h\in L^\infty(\mathfrak{m})$ をみたす h に対して，次が成立する.

$$\frac{1}{2}\int_X|\nabla f|_*^2\mathcal{L}h\,\mathrm{d}\mathfrak{m}-\int_X\langle\nabla f,\nabla\mathcal{L}f\rangle_*h\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\geq K\int_X|\nabla f|_*^2h\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

条件 (E) で弱形式 (積分形) で Bakry-Émery の曲率次元条件を定式化しているのは，$|\nabla f|_*^2\in\mathscr{D}(\mathcal{L})$[62] がいつ成り立つか不明であったため．この点は 9.1 節で掘り下げることになる．なお，この弱形式の定式化は最初に [74] で与えられ，[10, 11] で洗練された.

[62] 正確には，$\mathscr{D}(\mathcal{L})$ は L^1 の意味での定義域.

Proof of Theorem 7.12. (C) は Theorem 7.9 と Theorem 6.4 から直ちに従う．以下，(C) ⇒ (D) ⇒ (E) の順に示す．

「(C) ⇒ (D)」の証明の概略を述べる．ここでは，$f \in \mathrm{Lip}(X)$ として，minimal relaxed gradient の代わりに局所 Lipschitz 定数に対する結果として示す．Minimal relaxed gradient の場合は，そこからうまく (最適輸送に沿った) 積分の形に持ち込んで近似する．以下の証明は [117] によるが，最適輸送を用いた (もう少し洗練された) 証明が [10, Theorem 6.2] で述べられている [63]．$t > 0$ を固定し，$x, y \in X$ とする．また，$\pi \in \Pi(P_t^*\delta_x, P_t^*\delta_y)$ を W_2 に関する最適カップリングとする．このとき，

$$|P_t f(y) - P_t f(x)| = \left| \int_X f \,\mathrm{d}P_t^*\delta_y - \int_X f \,\mathrm{d}P_t^*\delta_x \right| = \left| \int_{X\times X} (f(z) - f(w))\, \pi(\mathrm{d}z\mathrm{d}w) \right|$$

を得る．$|f(z) - f(w)| \le |\nabla f|(z) d(z,w) +$ (誤差項) と考えられるので，誤差項を無視すると，Schwarz 不等式と (C) から，

$$\begin{aligned}|P_t f(y) - P_t f(x)| &\le \sqrt{\int_{X\times X} |\nabla f|(z)^2\, \pi(\mathrm{d}z\mathrm{d}w) \int_{X\times X} d(z,w)^2\, \pi(\mathrm{d}z\mathrm{d}w)} \\ &\le \sqrt{P_t(|\nabla f|^2)(x)} W_2(P_t^*\delta_x, P_t^*\delta_y) \le \mathrm{e}^{-Kt}\sqrt{P_t(|\nabla f|^2)(x)} d(x,y).\end{aligned}$$

ここまで来れば，あとは容易．

「(D) ⇒ (E)」は，Theorem 2.3 の議論を $N = \infty$ の場合に (積分形で) 適用すればよい．□

Theorem 7.12 より，当初の目標であった Sturm, Lott-Villani の曲率次元条件 $\mathsf{CD}(K, \infty)$ から (自然な「無限小 Hilbert 的」の仮定のもとで) Bakry-Émery の曲率次元条件を導出できた．ここで，Theorem 7.12 の応用も含め，P_t が関数をどの程度「よい」関数にうつすのか，ということに関連する次の注を述べておく．理論を厳密に展開する上でかなり重要な内容を含むが，技巧的でやや重い話題と考え注とした．本来は定理として述べるべきものである．

Remark 7.13 (P_t による関数の regularization)

(i) (E) において，試験関数 f, h にはかなり強い制約を課している．このような条件をみたす関数はちゃんと沢山あることを確認しておこう．まず f について，$f := P_t f_0$, $f_0 \in L^2(\mathfrak{m})$, $t > 0$ であれば，$\mathcal{L} f = P_{t/2}\mathcal{L}P_{t/2} f_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ であるから，(E) の条件をみたす．h については半群の軟化 *(mollification)* *(例えば [159, Theorem 2.7 の証明] 参照)* を用いる．$\theta \in C_c^\infty((0,\infty))$, $\theta \ge 0$ で $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \theta(x)\,\mathrm{d}x = 1$ となるものと $h \in L^2(\mathfrak{m})$ に対して，$\displaystyle\mathfrak{P}_\varepsilon h := \varepsilon^{-1}\int_0^\infty \theta(\varepsilon^{-1} r) P_r f \,\mathrm{d}r$ と定める．このとき，

$$\mathcal{L}\mathfrak{P}_\varepsilon h = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\infty \theta'\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) P_r f \,\mathrm{d}r$$

となるので，$h_0 \in L^2 \cap L^\infty(\mathfrak{m})$, $\varepsilon > 0$ に対して $h := \mathfrak{P}_\varepsilon h_0$ であれば，h は所与の条件をみたす．なお，半群の軟化の技法は，この種の解析を進める際に様々な場面で有効な近似として用いることができる．$\varepsilon \to 0$ で $\mathfrak{P}_\varepsilon h \to h$ *in* $L^2(\mathfrak{m})$ となることは容易．

[63] ただし，後で扱う $N < \infty$ の場合の証明は，ここで紹介する考え方 (の拡張) によるものしか知られていないと思われる．

(ii) $\mathsf{RCD}(K,\infty)$ 空間上，(D) の不等式で，左辺の *minimal relaxed gradient* を局所 *Lipschitz* 定数に置き換えた式が成り立つ *[10, Theorem 6.2]*．これは，おおまかには *Theorem 7.5* による．*(*試験輸送計画に沿った*)* 線積分を，左辺の量を *minimal weak upper gradient* とみなして評価する．すると，その評価が一様になる *(*ように関数を近似できる*)* ことから，試験輸送計画の極限移行によって *Lipschitz* 評価が従う．

よって，$f \in W^{1,2}(X)$ のとき $P_t f$ は *Lipschitz* 連続になると分かる．特にこのことから

「$f \in W^{1,2}(X)$ かつ $|\nabla f|_* \le 1$ であれば，$f \in \mathrm{Lip}(X)$ かつ各 $x \in X$ で $|\nabla f|(x) \le 1$」

が示せる *[10, Theorem 6.2]*[64]．これを**条件** (L) と呼ぶことにする．

(iii) $\mathsf{RCD}(K,\infty)$ 空間上，(D) を用いて P_t に関する *Poincaré* 不等式

$$P_t(f^2) - (P_t f)^2 \le \frac{1 - \mathrm{e}^{-2Kt}}{K} P_t(|\nabla f|_*^2)$$

および，逆向き *Poincaré* 不等式

$$\frac{\mathrm{e}^{2Kt} - 1}{K} |\nabla P_t f|_*^2 \le P_t(f^2) - (P_t f)^2$$

が得られる *([11, 18, 20, 124]* 等参照；形式的には，*Theorem 2.3* (1) $\Rightarrow$ (2) の証明と類似の議論を $\Phi(s)$ の代わりに $P_s((P_{t-s}f)^2)$ に対して行えばよい；(2.4) に相当する性質を用いる*)*．$K > 0$ のとき，この P_t に関する *Poincaré* 不等式において $t \to \infty$ とすることで，通常の *Poincaré* 不等式 *(*ただし定数は $1/K$*)* が得られる．

(iv) 上の (ii) と同様の考え方を (iii) に適用すると，次の評価が得られる *[10, Theorem 6.5]*：各 $x \in X$ で

$$|\nabla P_t f|(x) \le \sqrt{\frac{K}{\mathrm{e}^{2Kt} - 1}} \|f\|_\infty, \tag{7.8}$$

ここから，$f \in L^\infty(\mathfrak{m})$ であれば $t > 0$ で $P_t f \in \mathrm{Lip}_b(X)$ が従う．

Theorem 7.12 で導入された (C)(D)(E) は，単に $\mathsf{RCD}(K,\infty)$ 条件から従う，というだけでなく，次に述べる意味で $\mathsf{RCD}(K,\infty)$ と同値になっている．これを紹介してこの節を終わろう．

Theorem 7.14 (Bakry-Émery $\Rightarrow$ RCD, $N = \infty$) $(X, d, \mathfrak{m})$ は (V)，(L) をみたし，かつ無限小 *Hilbert* 的と仮定する．このとき，*Theorem 7.12* の (C)(D)(E) いずれかの条件が成り立てば，$(X, d, \mathfrak{m})$ は $\mathsf{RCD}(K,\infty)$ 条件をみたす[65]．

証明は省略する (易しいからではなく，複雑な上に私には要約し難いからである；4.3 節の議論とは異なり，(D) から (A) に至る)．[11] 参照．Theorem 7.9, 7.12, 7.14 を合わせると，それぞれの定理で登場した (A)-(E) の条件は (然るべき仮定の下で) 全て同値と分かる[66]．

---

[64] 正確には，「f の同値類から $\mathrm{Lip}(X)$ に属するものが取れる」と言うべき．

[65] (C) から話を始める場合には，正確には，$\nu_i \ll \mathfrak{m}$, $\nu_i = \sigma_i \mathfrak{m}$, $\sigma_i \in L^1 \cap L^2(\mathfrak{m})$ の場合に限定して，$P_t^* \nu_i$ の代わりに $P_t \sigma_i \mathfrak{m}$ とした式をまず考える $(i = 0, 1)$．そこから Proposition 7.11 に相当する主張を導くことができる．

[66] (E) から出発する時は Theorem 2.3 の議論を通じて (D) をまず示す．

7.4　曲率次元条件の同値性 ($N < \infty$)

前節の結果を $N < \infty$ の場合へと拡張しよう．この場合には最適輸送に基づく曲率次元条件が複数あることが問題を複雑にしていたが，今まで見てきたことを利用すると次が分かる．

Theorem 7.15 ($\mathsf{CD}^e(K,N) \Leftrightarrow \mathsf{CD}^*(K,N)$)　次は同値.

(A)′　$(X, d, \mathfrak{m})$ は無限小 *Hilbert* 的，かつ $\mathsf{CD}^e(K,N)$ をみたす.

(A)″　$(X, d, \mathfrak{m})$ は無限小 *Hilbert* 的，かつ $\mathsf{CD}^*(K,N)$ をみたす.

Proof.　(A)′(A)″のいずれも $\mathsf{RCD}(K,\infty)$ を導く (Remark 5.1 (i) 参照)．よって Corollary 7.10 より強 $\mathsf{CD}(K,\infty)$ が成立．従って Theorem 5.11, 5.12 (i) から結論を得る． □

Definition 7.16 (Riemann 的曲率次元条件，$N < \infty$)　*Theorem 7.15* の (A)′ が成り立つとき，$(X, d, \mathfrak{m})$ は ***Riemann* 的曲率次元条件 *(Riemannian curvature-dimension condition)*** $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ をみたす，という [67].

さて，以上で $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ 空間を導入した．この空間では，前節と類似の議論を経由して $N < \infty$ の場合の Bakry-Émery の曲率次元条件が証明できる．以下，その粗筋を紹介しよう．

Definition 7.17 ((K,N)-EVI)　$\nu_0 \in \mathscr{D}(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}})$ とする．$\mathscr{P}_2(X)$ 上の曲線 $(\nu_t)_{t\ge 0}$ が ν_0 **を初期条件とする** (K,N)**-EVI の意味での** $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ **の勾配流**であるとは，$(\nu_t)_{t>0}$ が絶対連続曲線であって，$\lim_{t\to 0} W_2(\nu_t, \nu_0) = 0$，かつ，各 $\nu \in \mathscr{P}_2(X)$ に対して以下が成り立つこととする：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathfrak{s}^2_{K/N}\left(\frac{W_2(\nu_t,\eta)}{2}\right) + K\mathfrak{s}^2_{K/N}\left(\frac{W_2(\nu_t,\eta)}{2}\right) \le \frac{N}{2}\left(1 - \frac{U_N(\eta)}{U_N(\nu_t)}\right).$$

Definition 7.18 (熱流による曲率次元条件達 ($N < \infty$) [55])　条件 (B)′–(E)′ を次で定める：

(B)′　$(X, d, \mathfrak{m})$ は (V) をみたし，各 $\nu_0 \in \mathscr{D}(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}})$ に対して，ν_0 を初期条件とする (K,N)-EVI の解が存在する.

(C)′　*(***時空間** W_2**-収縮性***)* 各 $\nu, \nu' \in \mathscr{P}_2(X)$, $t, s \ge 0$ に対して次が成り立つ：

$$\mathfrak{s}^2_{K/N}\left(\frac{W_2(P_t^*\nu, P_s^*\nu')}{2}\right) \le \mathrm{e}^{-K(s+t)}\mathfrak{s}^2_{K/N}\left(\frac{W_2(\nu,\nu')}{2}\right) + \frac{N}{2}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-K(s+t)}}{K(s+t)}\left(\sqrt{t}-\sqrt{s}\right)^2.$$

(D)′　***(Bakry-Ledoux* の微分評価*)*** ある関数 $C : (0,\infty) \to (0,\infty)$，$C(t) = 1 + O(t)$ $(t \to 0)$ で，各 $f \in W^{1,2}(X)$, $t > 0$ に対して次をみたすものがある：

$$|\nabla P_t f|_*^2 + \frac{2tC(t)}{N}|\mathcal{L}P_t f|^2 \le \mathrm{e}^{-2Kt}P_t(|\nabla f|_*^2) \quad \mathfrak{m}\text{-}a.e.$$

(E)′　***(Bakry-Émery* の *(*弱*)* 曲率次元条件*)*** $f \in \mathscr{D}(\mathcal{L})$，$\mathcal{L}f \in W^{1,2}(X)$ なる f と $h \in \mathscr{D}(\mathcal{L}) \cap L^\infty(\mathfrak{m})$，$h \ge 0$ かつ $\mathcal{L}h \in L^\infty(\mathfrak{m})$ なる h に対して次が成り立つ：

$$\frac{1}{2}\int_X |\nabla f|_*^2 \mathcal{L}h\,\mathrm{d}\mathfrak{m} - \int_X \langle\nabla f, \nabla\mathcal{L}f\rangle_* h\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \ge K\int_X |\nabla f|_*^2 h\,\mathrm{d}\mathfrak{m} + \frac{1}{N}\int_X (\mathcal{L}f)^2 h\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

[67] $K = 0$ のときは CD 条件と CD^* 条件は一致する (Theorem 5.8 (ii)) ので，そのときは $\mathsf{RCD}(0,N)$ と書くこともある.

(C)$'$, (D)$'$, (E)$'$ は，それぞれ (4.15), Theorem 2.3 (2), (2.2) の再定式化に他ならない．

Theorem 7.19 (RCD* $\Leftrightarrow$ **Bakry-Émery [13, 55]**)

(i) (A)$'$ と (B)$'$ は同値．

(ii) (B)$'$ が成り立つとする．このとき (C)$'$(D)$'$(E)$'$ が成立する．

(iii) $(X, d, \mathfrak{m})$ は (V), (L) をみたし，かつ無限小 *Hilbert* 的とする．このとき，(C)$'$(D)$'$(E)$'$ のいずれかが成り立てば，(A)$'$ が成立する [68]．

Proof. 基本的な考え方は $N = \infty$ の場合に帰するので，要点のみ述べる ($N = \infty$ で省略した話は，こちらでも省略する)．

(i) は Theorem 6.6, Theorem 7.9 と同様 (計算はもっと複雑になる)．(ii) で (C)$'$ を (B)$'$ から導く際には，2 つの勾配流の時間スケールを変えて $N = \infty$ の場合と同様の議論を行う．ただ，Otto 解析の場合に比べると，単純な変換で済む．「(C)$'$ $\Rightarrow$ (D)$'$」については少し丁寧にコメントしておこう ([121] も参照)．(C)$'$ では時間のズレを含んでおり，その結果として，「(C) $\Rightarrow$ (D)」で行った評価の代わりに $|P_t f(x) - P_s f(y)|$ の評価が可能になる．そこで，この量について，$y \to x$, $s \to t$ の極限を取る．その際に，$\alpha \in \mathbb{R}$ について $s - t = \alpha d(x, y)$ という関係をみたしながら極限移行する．そのあとで，得られた式を α について最適化することで (D)$'$ が得られる．その結果として，時間の差の部分から P_t の時間微分即ち $\mathcal{L}P_t f$ が現れる (この項が，Bakry-Ledoux の微分評価で $N < \infty$ の場合特有の量になっている)．(D)$'$ $\Rightarrow$ (E)$'$ は (D) $\Rightarrow$ (E) とほぼ同じ．(iii) では，やはり (D)$'$ から (A)$'$ を導く． □

Remark 7.20 (Definition 7.18 の諸条件に対する補足)

(i) (K, N)-EVI の式は，*Proposition 6.3* の証明の議論と同様にして (4.12) から *Otto* 解析で形式的に導くことができる．また，(K, N)-EVI および時空間収縮性は，*6.1* 節で扱ったように，距離空間 *(*あるいは *Riemann* 多様体*)* の枠組で一般の *(*汎*)* 関数の勾配流に関する理論として書ける *([55]* の *2* 章参照*)*．滑らかな空間の場合でも，(K, N) 凸性に基づく勾配流の解析はおそらく未知であったと思われる．

(ii) (D)$'$ で $C(t)$ という関数を導入している理由は，「この式を他の条件から導出する場合，出発点となる条件や議論のやり方によって違う定数が現われる」ことによる．一方，この形から他の条件に移行できるため，情報を損なってはいない．更には，(C)$'$ にも，$\mathfrak{s}_\kappa$ を使わない別の形の定式化が知られている *([55, 121]* 参照*)*．その式も (C)$'$ と同値になる．ただ，不等式としては (4.15) の方が精密と思われる．

7.5 Dirichlet 形式論との関連

Dirichlet エネルギー汎関数から熱半群を定める，という考え方は，確率論の立場から見ると Dirichlet 形式論と深い関連がある．実際，RCD(K, ∞) 空間で考察していた Cheeger 型エネルギー汎関数は，この設定では準正則強局所的 Dirichlet 形式になり，Markov 過程の一般論を介して，対応する標準的な拡散過程 (通常の慣例に習って，Brown 運動と呼ぶ) が X 上に定まる

[68] Theorem 7.14 の場合と同様に，この主張はやや不正確．脚注 65 参照．

[6, 10]．なお，X が局所コンパクトであれば準正則は正則まで強められる [69]．また，Dirichlet 形式が定める内在的距離は元々の距離 d と一致する [10, Theorem 6.10]．このことは，(L) が成り立つことからも，ある程度類推できるだろう．

逆に，出発点として位相空間に Dirichlet 形式が与えられた状況の下で，対応する内在的距離が定める測度距離空間上で，前述の曲率次元条件あるいは Cheeger 型エネルギー汎関数との関係を調べた結果もある [11, 116, 115]．ここでは，[11] の設定を紹介しよう．以下，Dirichlet 形式の基本的な用語は説明なく用いる ([35, 64, 136] 等参照)．X をポーランド位相空間とし，$\mathfrak{m}$ を X 上の Borel 集合族 (の完備化) 上で定義された σ-有限測度で $\operatorname{supp}\mathfrak{m} = X$ とする．$(\mathcal{E}, \mathscr{D}(\mathcal{E}))$ を carré du champ Γ を許容する $L^2(\mathfrak{m})$ 上の強局所的対称 Dirichlet 形式とする [70]．慣例に従い，$\Gamma(f,f)$ を $\Gamma(f)$ と略記する．**内在的距離 (intrinsic distance)** $d_{\mathcal{E}} : X \times X \to [0,\infty]$ を次で定める：

$$d_{\mathcal{E}}(x,y) := \inf\{\psi(y) - \psi(x) \mid \psi \in \mathscr{D}(\mathcal{E}) \cap C(X),\, \Gamma(\psi) \le 1\}.$$

$S \in C^1(\mathbb{R})$ を，$S|_{[-1,1]} \equiv 1$, $S|_{[-3,3]^c} \equiv 0$, $|S'| \le 1$ なる関数とし，各 $k \in \mathbb{N}$ に対して，$S_k := kS(r/k)$ とおく (ある種の cut-off 関数)．この関数を用いて，次の概念が定義される：

Definition 7.21 (Energy measure space) $(X, \mathfrak{m}, \mathcal{E})$ が ***energy measure space*** である，とは，次の (1)(2) をみたすこととする．

(1) ある $\theta \in C(X)$ で，「各 $k \in \mathbb{N}$ で $S_k \circ \theta \in \mathscr{D}(\mathcal{E})$ かつ $\Gamma(S_k \circ \theta) \le 1$ $\mathfrak{m}$-*a.e.*」をみたすものが存在する．

(2) $d_{\mathcal{E}}$ は X 上の距離になり，$(X, d_{\mathcal{E}})$ は元の位相と同じ位相を定める完備距離空間になる (特に，$d_{\mathcal{E}}$ は *length distance* になる)．

Definition 7.22 (Riemannian energy measure space) $(X, \mathfrak{m}, \mathcal{E})$ が ***Riemannian energy measure space*** である，とは，次の (1)(2)(3) をみたすこととする．

(1) $(X, \mathfrak{m}, \mathcal{E})$ は *energy measure space*

(2) ある $\mathcal{E}_1 = \sqrt{\mathcal{E} + \|\cdot\|^2_{L^2(\mathfrak{m})}}$ で稠密な $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}(\mathcal{E})$ で，各 $f \in \mathscr{C}$ に対し，$f_n \in \mathscr{D}(\mathcal{E}) \cap C_b(X)$ と有界かつ上半連続な $g_n : X \to \mathbb{R}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$ であって，「$f_n \to f \in L^2(\mathfrak{m})$, $\Gamma(f_n) \le g_n$ かつ $\varlimsup_{n\to\infty} \int_X g_n^2 \,\mathrm{d}\mathfrak{m} \le \mathcal{E}(f)$」をみたすものが存在する ([11] では，この条件を「$\mathcal{E}$ が *upper regular*」と呼んでいる)．

(3) $f \in \mathscr{D}(\mathcal{E})$, $\Gamma(f) \le 1$ ならば $f \in C(X)$．

Riemannian energy measure space の性質は，内在的距離が定める距離構造に関して次のように言い換えることもできる．[11] でのまとめ方とは若干異なるが，Dirichlet 形式論から見て分かりよいと思われる形にした．

---

[69] 今の設定では Lipschitz 関数が $W^{1,2}(X)$ で稠密 [10, Proposition 4.10]．従って，例えば $\mathsf{RCD}^*(K,N)$, $N < \infty$ なら OK (Theorem 7.15, 5.8, 5.9 による)．

[70] [11] では，必ずしも carré du champ が $\mathscr{D}(\mathcal{E})$ 全体で定義されているとは限らない状況から論を起こしているが，曲率次元条件を論じるための仮定を付加していくと，最終的に carré du champ を許容することになる ([11, Theorem 3.14] と，以下の説明参照)．

Theorem 7.23 (Riemannian energy measure space の特徴づけ) $(X,\mathfrak{m},\mathcal{E})$ が *Riemannian energy measure space* であることと，次の (1)–(5) が全て成り立つことは同値：

(1) X の元の位相と同じ位相を定める完備な距離 d で，$d=d_{\mathcal{E}}$ なるものがある *(*以下，測度距離空間について以前に導入した記号を，この距離 d に関するものとして断りなく使う*)*.

(2) 各 $x\in X$, $r>0$ で $\mathfrak{m}(B_r(x))<\infty$.

(3) (L) をみたす.

(4) 台が有界な任意の $f\in \mathrm{Lip}(X)$ に対して，$f\in\mathscr{D}(\mathcal{E})$ かつ $\Gamma(f)\le|\nabla f|$ $\mathfrak{m}$-*a.e.* 特に，そのような f 達は $\mathscr{D}(\mathcal{E})$ で $\mathcal{E}_1$ について稠密.

(5) $\mathsf{Ch}=2\mathcal{E}$[71]．特に $(X,d,\mathfrak{m})$ は無限小 *Hilbert* 的で $|\nabla f|_*^2=\Gamma(f)$.

実際には，(5) は (他の仮定の下で)$\mathcal{E}$ が upper regular であることと同値．なお，(5) から，Dirichlet 形式を出発点としても，上記の仮定をみたす Riemannian energy measure space を考える限りは，内在的距離が定める距離構造に関して測度距離空間を考え，その (無限小 Hilbert 的な)Cheeger エネルギーを考えていることになる．従って，内在的距離を用いて前節までの枠組に話が帰着される．なお，Definition 7.22 を見ると，Riemannian energy measure space の定義には空間に a priori に与えられている距離に関する条件を必要としていないことを注意しておこう．

8　応用と関連する話題

ここまでで扱った内容と関連する 3 つの話題を，以下の 3 つの節で独立に扱う．節の名前から内容は類推できると思われるので，ここでは説明を省略する．

8.1　CD 条件が導く関数不等式

まず，関数不等式に関連する話をしておく．$\mathsf{CD}(K,\infty)$ 空間では，空間の定義から容易に，**HWI 不等式**と呼ばれる次の不等式が成立する [157, 179][72]：$\mu_0,\mu_1\in\mathscr{P}_2(X)$ に対して，

$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0)\le \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_1)+W_2(\mu_0,\mu_1)\sqrt{\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(\mu_0)}-\frac{K}{2}W_2(\mu_0,\mu_1)^2. \tag{8.1}$$

この不等式は，$K>0$, $\mathfrak{m}\in\mathscr{P}_2(X)$ のとき，容易に対数 Sobolev 不等式

$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu)\le\frac{1}{2K}\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(\mu) \tag{8.2}$$

および **Talagrand 不等式**

$$W_2(\mathfrak{m},\mu)^2\le\frac{2}{K}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu)$$

[71] 右辺は $f\mapsto\mathcal{E}(f,f)$ の意．また，定義域が一致していることも等号の意味に含めている．

[72] 無限小 Hilbert 的でなくてもよい．

を導く (それぞれ，$\mu_1 = \mathfrak{m}$ の場合，$\mu_0 = \mathfrak{m}$ の場合を考えればよい)．これらいずれの不等式も，次の形の **(大域)Poincaré 不等式** (L^2-spectral gap 不等式)

$$\int_X \left| f - \frac{1}{\mathfrak{m}(X)} \int_X f \, d\mathfrak{m} \right|^2 d\mathfrak{m} \le \frac{1}{K} \int_X |\nabla f|_*^2 \, d\mathfrak{m}. \tag{8.3}$$

を導く．また，Talagrand 不等式は測度集中と深い関連がある．これらの話題に関する参考文献として，前述の他に [181, 4.3 節], [79] を挙げておく．

$\mathsf{CD}^e(K,N)$ 空間では，$N < \infty$ の情報を用いてこれらの各種関数不等式を精密化できる ([55, 3.4 節] 参照)．まず，HWI 不等式は次の形 (N-HWI 不等式) になる：$\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}_2(X)$, $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0) < \infty$ に対して，

$$\frac{1}{U_N(\mu_0)} \le \frac{1}{U_N(\mu_1)} \left(\mathfrak{c}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1)) + \frac{1}{N} \mathfrak{s}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1)) \sqrt{\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(\mu_0)} \right).$$

ここで，$\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}$ は minimal relaxed gradient で定義された Fisher 情報量とする (Remark 4.6 参照)．ここから，対数 Sobolev 不等式および Talagrand 不等式の $N < \infty$ での対応物が得られる：

- N-対数 Sobolev 不等式：$K > 0$ とし，$\mathfrak{m} \in \mathscr{P}_2(X)$ とする．このとき，各 $\mu \in \mathscr{P}_2(X)$ に対して，
$$KN \left[\exp\left(\frac{2}{N} \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) \right) - 1 \right] \le \mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(\mu).$$
N-対数 Sobolev 不等式は，logarithmic entropy-energy 不等式とも言われる (例えば [20] 参照)．また，ここから (大域的)L^2-Sobolev 不等式が従う ([20, Proposition 6.2.3] 参照；$\mathsf{RCD}(K,N)$ 空間の枠組みで，定数を最良まで改良できることも知られている [44, 163])．

- N-Talagrand 不等式：上記と同様の仮定の下，各 $\mu \in \mathscr{P}_2(X)$ で $W_2(\mu,\mathfrak{m}) \le \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N}{K}}$ であり，
$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) \ge -N \log\cos\left(\sqrt{\frac{K}{N}} W_2(\mu,\mathfrak{m}) \right).$$
なお，[157] での対数 Sobolev 不等式から Talagrand 不等式を導く議論をなぞると，上記よりも少し弱い形の N-Talagrand 不等式を得る [55, Proposition 3.32]．

なお，これらの不等式は，$N \to \infty$ として leading term を抽出すれば，それぞれ $N = \infty$ の場合の不等式を復元する．N-HWI 不等式の証明について少し述べておこう．Otto 解析による形式的な議論としては，$|\boldsymbol{\nabla} \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}|^2 = \mathrm{I}_{\mathfrak{m}}$ が成り立つことに注意して，(5.3) を用いて $\dot{\mu}_0$ 方向への $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の方向微分を評価すればよい．実際の証明も，この考え方に沿って行われる．

Riemann 多様体の場合，次元の情報を加味することで，$\mathrm{Ric} \ge K$ で既知の不等式の定数を改良できることがある．代表的なものは，大域 Poincaré 不等式の精密化である Lichnerowicz の不等式であろう．そのような改良は RCD 空間でも成り立つ：$(X,d,\mathfrak{m})$ を $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ 空間で，$K > 0$ とする．このとき，$-\mathcal{L}$ は非負離散スペクトルのみを持ち，第一非零固有値 λ_1 は $\lambda_1 \ge NK/(N-1)$ をみたす (Lichnerowicz 不等式；[55, Theorem 4.22])．これを Rayleigh 商表示で述べれば，(8.3) の定数 K が $NK/(N-1)$ に改良されることを意味する．また，同様の定数の改良が (8.1), (8.2) でも成り立つことが，W_1 に関する最適輸送理論の深い結果により知られている [44] ([181, 7 章] に少し解説がある)．なお彼らは，同様の手法を用いて，Lévy-Gromov

型の等周不等式 ($N < \infty$ の場合) を始めとする多くの不等式を，次元の情報を加味した精密な定数で示している [43, 44]．彼らの手法の要は，関数不等式の証明を最適輸送に現れる各測地線上の解析に帰着させることで問題を 1 次元化することにある．この手法は [112] によって Riemann 多様体の場合に導入され，彼らによって CD 空間へと拡張された．Riemann 多様体の場合ですら，従来は幾何学的測度論による複雑な議論を要した Lévy-Gromov の等周不等式 (を含む，等周不等式の族) の証明を見通しのよいものに置き換えており，[112] の結果それ自身が既に非常に興味深い．

ここで挙げたものの他にも様々な関数不等式が最適輸送理論および CD 条件と関連している．[178, 179] 等を参照のこと．特に CD 条件と直接的な繋がりが強いものとして, Brunn-Minkowski 不等式 (の拡張) [150, 172, 179] だけ挙げておき，これ以上の説明は割愛する．

8.2 RCD 空間の幾何学

ここではまず，(Riemann 的) 曲率次元条件，およびその同値な言い換えの幾何学的な帰結について (証明ほぼ抜きで) 述べる．初等的なものについては，既に幾つかを Theorem 5.9 で見た．ここでは，基本的あるいは重要な結果，および，熱分布の解析と更なる相互作用が見込まれる話題の中から，幾つか重要と思われるものを選んで紹介する．

(1) 幾何学的安定性

$\mathsf{RCD}^*(K,N)(N = \infty$ の場合も含む) は，測度 Gromov-Hausdorff 収束で安定 ([10, Theorem 6.11], [55, Theorem 3.22], [76]) [73]．また，その帰結として，Ricci limit は $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ 条件をみたす．この安定性は，微妙なバランスで成り立っている性質だということを注意しておこう．「無限小 Hilbert 的」は，一般には，それ単独では測度 Gromov-Hausdorff 収束では保たれない．また「強 K 凸性 (または強 (K,N) 凸性)」も同様 (Remark 5.14 (ii))．なお，この主張は EVI による条件 ((B) または (B)$'$) の保存性を示すことで証明される [74]．この点からも，熱分布を考えることの幾何学的意義の一端が垣間見られる．

また，以下の操作での RCD 条件の変化あるいは安定性について，Riemann 多様体での結果の自然な拡張が知られている：

- 測度 $\mathfrak{m}$ に重み関数を掛ける変換 [55, Lemma 2.10].
- RCD^* 空間の直積 (tensorization) [55, Theorem 3.23].
- 局所一様に RCD^* 条件が成り立つ空間が RCD^* 空間になること (local-to-global) [55, Theorem 3.25], [14, Theorem 7.8]．あるいは局所化 [14, Proposition 7.7]
- 空間から作る測度距離錐 (metric measure cone) の RCD 性と，元の空間 (作られた空間の断面になる) の RCD 性の対応 [105] ([17, 104] も参照).

測地線が (本質的) 非分岐であるかどうかが，上記の幾つかの性質の証明に関係している ([17] の議論も参照のこと)．最後のものは，例えば「円錐と，その断面としての円周」のような例で，円周と円錐の間の RCD 条件の対応を (測度距離空間として) 見たものである．錐の取り方

[73] 空間列の収束については，(点つき) 測度 Gromov-Hausdorff 収束以外にも (近い関係にある) 幾つかの別の定義があるが，ここでは簡単のため「測度 Gromov-Hausdorff 収束」以外の言葉は使わない．例えば [76] 参照.
[74] [76] では，Ch の Mosco 収束を用いた証明も与えている．

にもヴァリエーションがあり，S^1 を赤道として球を作る操作なども含まれる．なお，この性質を調べる上で，[105] では Bakry-Émery の曲率次元条件を利用している．

(2) 幾何学的剛性

ここでは，剛性 (rigidity) という言葉を「極端な性質を持つ空間はかなり限定される」という意味で用いる．例えば N. Gigli による Cheeger-Gromoll の分裂定理 (の，測度距離空間への拡張) [68] は，「$\mathsf{RCD}(0, N)$ 空間が $\mathbb{R}$ からの等距離写像を持てば，空間は $\mathbb{R}$ と $\mathsf{RCD}(0, N-1)$ 空間の直積に測度距離空間として分裂する」と主張する．この定理は，Riemann 多様体の測度 Gromov-Hausdorff 極限に対する almost splitting theorem と呼ばれるものを主張に含み，その証明の手法 (Laplacian 比較定理の導出 [70]，Busemann 関数の勾配流の解析，等) も含め，$N < \infty$ の RCD 空間上の幾何解析に大きな進展をもたらした．また，関連して以下のような剛性定理が知られている：

- Cheng の最大直径定理 (Bonnet-Myers の定理で直径の上限が実現される場合) [105].
- (Lichnerowicz-) 小畠の定理 (K, N による spectral gap の下限が実現される場合) [106].
- 「Zhong-Yang の定理 ($K = 0$, $\operatorname{diam} X < \infty$ のときの $\operatorname{diam} X$ と N による spectral gap の下限)」の等号成立の場合 [123].
- 体積剛性 (距離球の体積が，比較対象となる定曲率空間上のものと対応する場合) [71].
- 幾つかの幾何学的関数不等式の剛性 [43, 44].

これらの剛性定理に共通することとして，Riemann 多様体では現れなかった (多様体とは限らない) 空間が現れることを注意しておこう．

(3) RCD 空間の局所構造

Gigli の分裂定理を用いて，($N < \infty$ の)RCD 空間の局所構造の研究は大きな進展を見せた．まず $x \in X$ の近傍を拡大する測度 Gromov-Hausdorff 極限 (Riemann 多様体では接空間が現れることから，**接錐 (tangent cone)** と呼ばれる) の集積点 [75] について，a.e. x で一意的に次元 N 以下の Euclid 空間が現れる [75, 142]．さらに解析を推し進めることで rectifiability と呼ばれる次の性質まで知られている [77, 142]：

> 各 $\varepsilon > 0$ に対し，$\mathfrak{m}(X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n) = 0$ なる可測集合 $U_n \subset X$ と $k_n \in \mathbb{N}$, $k_n \leq N$ で，各 U_n が k_n 次元 Euclid 空間の Borel 部分集合と $(1+\varepsilon)$-双 Lipschitz 同値になるものが存在する．

これは距離のみに関する性質であるが，さらに測度まで含め，各 U_n 上への $\mathfrak{m}$ の制限は k_n 次元 Hausdorff 測度に絶対連続ということまで判明している [77, 100] ([42] も参照)．なお，k_n が n によって異なる RCD 空間の例は，私の知見の及ぶ限り，知られていない．一方で，k_n が n に無関係になるための判定法については結果がある [110, Theorem 1.4]．関連する問題として，1 次元的な接錐を許容する (正確には，「$\mathbb{R}$ のみを接錐に持つ点」を含む) RCD 空間は古典的なもの [76] に限られることが知られている [111].

また，更には，接空間を直接定義する代わりに「接空間に値をとる関数の空間」を定めることで，測度距離空間上でテンソル解析を展開する試みがある [67].

---

[75] 一般に極限は一意とは限らない．

[76] 区間または円周；測度には若干の自由度があるが，$\mathfrak{L}^1$ に絶対連続ではある．

なおここで扱った幾つかの話題については，より詳しい解説が [181] にある．それらの結果は，Ricci limit では既知であったものも多い [185]．寧ろ，Ricci limit での結果を辿る形で理論が進展してきた側面もある．一方でその証明方法は必ずしも類似しておらず，別種の技術的な困難もある．多くの結果は，決して自明な拡張ではない．

8.3 他の空間族への拡張

Definition 7.18 に登場する条件あるいは 5 章でみた各種の曲率次元条件は，基本的には Riemann 多様体の場合に成立することをその土台として理論が構築されている．その一方で，Riemann 多様体とは質的に異なる空間で，同種の条件あるいはその修正版が成り立つかどうか，ということについても近年には膨大な研究がある．ここではすべての結果を網羅的に述べることはしない (私にはできない) が，ある程度の紹介を試みたい [77]．私自身詳しくない方面も多く，これは説明の濃淡にも反映されている．そのため，以下の説明は他の部分に比べて不適切な文章が混じっている可能性が若干高い．読者諸賢の寛恕を乞う．

なお，「個々の設定での標準的な Markov 過程 (の分布) を確率測度の空間上の勾配流として捉える」という問題に関する研究については，6.3 節の冒頭も参照のこと．

(1) Finsler 多様体，Lagrangian/Hamiltonian

既に幾度か言及したが，Finsler 多様体では曲率次元条件に相当する条件を考えることができる [183]．実際，7.3, 7.4 節で扱った，曲率次元条件の同値条件に相当する結果が W_2-収縮性を除いて知られている．前述のように，W_2-収縮性は一般には成立しない．Riemann 多様体の場合以外には成立しないと考えられている．

この場合には熱方程式が非線形になり，そのことに起因する困難が生じる．例えば確率解析的な手法 (極限定理等を用いた熱方程式の解の表示等) が適用可能であるかどうか，現時点では知られていない．

また，Finsler 多様体よりも一般に，Lagrangian/Hamiltonian に自然に付随する構造を考えて，同様の理論を展開する試みもある ([149]，および，その参考文献を参照)．

(2) 負の次元

$N \le 0$ **の場合**にも，ここまでで紹介した曲率次元条件や関数不等式には意味を持つものがある ([114, 151]，および，それらの参考文献を参照)．$1/N$ が小さい方が弱い条件になる，という考え方で，従って $N < 0$ のときは $|N|$ が大きい方が条件が強く，$N \downarrow -\infty$ で $N = \infty$ の場合の結果を復元する．この考え方は，例えば (2.2) の式の形を見れば自然であろう．条件が弱い分，適用範囲を広げることができるという利点がある．Euclid 空間上で確率測度 $\mathfrak{m}$ がこの条件をみたす分布は，典型的には heavy tail を持つ (らしい)．例えば，Cauchy 分布はこの種の条件をみたす例になっている [114]．

(3) Ricci 曲率の絶対値

Ricci 曲率の下限の代わりに，Ricci 曲率の絶対値を評価したい文脈がしばしばある．例として，経路空間上の無限次元解析を展開する場合がある．実際に，経路空間上の関数不等式を用いた，Ricci 曲率の絶対値評価の同値な特徴づけが知られている [143]．そこでは更に，その特徴づけを用いて Ricci 曲率の絶対値が有界な測度距離空間の概念も提唱されている．

[77] 少しでも足掛かりがあれば，そこから興味の赴くままに芋蔓式に文献を探していけるものと期待している．

(4) 時間依存計量，特に Ricci 流

Ricci 流のような，空間の計量 (あるいは距離や測度) が時間に依存するような空間で曲率次元条件に相当する問題を (測度距離空間の枠組で) 考えうる．念頭にあるのは Ricci 流の方程式

$$\partial_t g(t) = 2\,\mathrm{Ric}_{g(t)}$$

であり，この式を出発点として 2 つのアプローチが知られている．ひとつは，$g(t)$ が t に依存しない場合に上記の $=$ を $\leq$ と見ると非負 Ricci 曲率となることに着目し，その不等式 (優 Ricci 流) の特徴づけを与える研究である [170]．もうひとつは，$g(t)$ が時間に依存しない場合の Ricci 流を $|\,\mathrm{Ric}\,| = 0$ とみなして，Ricci 曲率の絶対値の特徴づけを拡張する研究である [86]．空間が滑らかな場合にも幾つかの先行結果があるが，ここでは割愛する．上記の文献を参照のこと．

一般に Ricci 流は有限時刻で特異性を発生する．特異性解析の手段として，「対象を時間変化する測度距離空間とみなし，特異性を許容したまま Ricci 流を拡張したい」と考えるのは自然かつ魅力的な着眼点ではある．一方，そのような大目標から現状を見ると，いずれのアプローチも研究の初期段階にあり，今後の一層の進展が望まれる状態と言えるだろう．

(5) Ricci 曲率の各点での下限

曲率次元条件は Ricci 曲率の一様な下限の評価を考えるので，「非常に狭い範囲でのみ評価が悪い」という空間ではよい評価を得られない．一方で，空間の大域的な特性 (熱分布で言えば，長時間挙動) の中には，そのような局所的な障害の影響を受けないと考えられるものが少なからずある．幾何学においても，「曲率の下限」を「曲率の積分量の下限」に置き換えた形へと各種幾何学的関数不等式を拡張するような試みがある ([161, 177] 等参照．前者については，著者らがかなりの関連研究を展開している)．その意味では，Ricci 曲率の各点での下限を定式化し，考えうる他の定式化との対応を調べることには一定の意義が認められる．そのような研究として [101, 103, 173] が挙げられる．

現状では，空間の特異性制御のため，一様な曲率の下限を別の (より悪い) パラメータで押さえられている場合に理論は限定されている．例えば Riemann 多様体上では，熱分布が総熱量を保つ (あるいは Dirichlet 形式が保存的) であるための Ricci 曲率による十分条件として，おおよそ「ある定数 c と $x_0 \in X$ で，$\mathrm{Ric} \geq -cd(x_0, \cdot)^2$」くらいまでは許容されることが知られている [81, Theorem 15.4 (a)]．この条件下で，何らかの厳密な意味で熱分布が相対エントロピーの勾配流とみなせるかどうかは知られていない．

(6) Dirichlet 形式の変換論

8.2 節で述べたような空間の変形に類似した話題として，Dirichlet 形式の理論で知られている様々な解析的な変換 (Doob の h-変換，時間変更等) と曲率次元条件との関連についても，近年研究が進みつつある [84, 169]．これらについて空間一様な曲率次元条件を期待することは理論の適用対象を大きく制限することになると思われる．この点を解消するため，前述の「Ricci 曲率の各点での下限」の理論と合わせた進展が期待される．

(7) 非対称生成作用素

今までの話では，生成作用素 $\mathcal{L}$ は対称 Dirichlet 形式に付随するものとして論を展開している．一方，Riemann 多様体上では非対称作用素に対しても自然に重みつき Ricci テンソルを考えることができ，実際に幾何学的な結論を導くことが知られている (例えば [120] 参照)．非対称作用素が現れる設定における，7.3, 7.4 節で見てきたような曲率次元条件の同値性に相当する結果については，その定式化も含めてまだ不明な点も多い．確率測度の空間上の勾配流を考

える場合も，$\mathcal{L}$ の非対称性を加味して，弱解の概念を区別して扱う必要がある．この方面の近年の進展として [102] を挙げておく．

(8) 準楕円型生成作用素，劣 Riemann 多様体

劣 Riemann 多様体とは，大まかには，計量が退化した Riemann 多様体の族であって，各接空間において，非退化な方向に沿うベクトル場の成す Lie 環が接空間全体を生成するものである．「よい」劣 Riemann 多様体上で標準的に定まる “熱分布” は，Hörmander 条件をみたす準楕円型生成作用素によって生成される．逆に，準楕円型生成作用素を持つ拡散過程は，しばしば，ある劣 Riemann 多様体上の標準的な拡散過程とみなせる．

これらの空間族上では，典型的には，Ricci 曲率を形式的に計算すると下に非有界になる [78]．実際，通常の CD 条件は Heisenberg 群でも成立せず [93]，一般に不成立と考えられている．一方で，MCP 条件は (うまく N を選べば) 成立することがある [126, 128, 167]．Bakry-Émery の曲率次元条件については，計量が退化した方向の情報を加味した新しい条件が F. Baudoin, N. Garofalo らによって導入され [26]，以来，Baudoin を中心に盛んに研究されている．特に，Bakry-Émery 理論の設定に沿って，幾何学的関数不等式の導出が為されてきた．近年は彼らの条件からの熱半群の微分評価の導出 [24] や W_2-収縮性評価 [25] 等も得られつつある．このような手法は kinetic Fokker-Planck 方程式など準楕円型作用素に付随する放物型方程式にも応用されており，解析的な視点からも興味深い．また熱半群の微分評価については，Riemann 多様体の場合とは質的に異なる形が幾つかの Lie 群上で知られている [50, 139] が，その背後にある幾何学的構造は充分に判明しているとは言い難い．今後の研究の進展が期待される．また，Baudoin らとはやや別の観点からの確率解析による研究として，[83] を挙げておく．

一般に劣 Riemann 幾何においては，精密評価は典型的には Riemann 幾何とは質的に異なる形になる (例えば [127])．また，等号成立まで含めた精密な評価の導出や剛性定理はかなり難しい．Bakry-Émery 条件については，意味のある形で質的に異なる定式化が導入されたが，CD 条件や EVI についてはまだ不明なことも多い．

(9) 離散空間

7.3, 7.4 節で見てきたような広義の曲率次元条件達の「いずれか」を離散的な設定で調べる問題は，近年盛んに研究されている．ただ，元来の定義では期待される性質がみたされない場合が多く，様々な形で定義の修正が行われている．現状は百家争鳴状態に近く，修正された条件の間の関係などもあまりはっきりしない．

相対エントロピーの凸性に関する研究として [34, 56, 80, 141] を挙げておく．Bakry-Émery の曲率次元条件に関するものとして [28, 38] を挙げておく [79]．Markov 連鎖の Wasserstein 収縮性を起点とするものとして [113, 154] を挙げておく [80] とりわけ [56, 141] は，相対エントロピーの勾配流が熱分布 (標準的に付随する連続時間 Markov 連鎖) となるように W_2 の定義に修正を施し，理論を構築している．ここで修正は，「Benamou-Brenier 公式 (4.4) を W_2 の定義とする」という発想を土台にしている．そして，その枠組では，7.3 節で見たような広義の曲率次元条件達の対応関係がある程度成り立つ．なお，これらの結果のある程度包括的な概観が，ここでは紹介していない先行研究も含め，[155] で述べられている．

この方面の研究では確率論と幾何学の問題意識が交錯しており，大きく分けてそのいずれかを着想の起点にしている．幾何 (解析) 的な問題意識においては，Riemann 幾何から類推さ

[78] 少なくとも，Riemann 幾何での Euclid 空間にある種対応する空間である Heisenberg 群ではそうなっている．

[79] 正確には [38] は Theorem 2.4 に相当する議論を行っている．論じているのは (2.6) のみであり，これは Bakry-Émery の曲率次元条件より弱い．

[80] 実際は，これらの文献では，離散的とは限らない空間で理論を展開している．

れる各種定理がどこまで近い形で成り立つかが主要な課題になる．上に挙げた文献の中では，[34, 28, 113, 154] はこの立場に依る．確率論との関係では，極限定理における空間列の収束との関係が気になる．[34, 154] では，彼ら彼女らの導入した曲率次元条件と Gromov-Hausdorff 収束との関係についても論じている．一方で，確率論的な問題意識においては，ある程度一般的な枠組みでの関数不等式の導出 (おおまかに言えば [80] はこれに属する) や，具体的な確率模型での条件の検証が課題になる．[28, 38] で用いている条件は，Bakry-Émery の曲率次元条件がそうであるように，局所的な計算から (原理上は) 条件を判定できる．この点は，[113, 154] についても類似の特徴がある (Markov 連鎖の 1-step あるいは複数 step の推移確率間のカップリングを構成することになる)．[56, 141] の条件は，W_2 の修正版の具体的な計算が恐ろしく複雑なため (状態空間が 3 点の場合で既に厳しい) 導入当初は検証が困難であった．現在は (4.14) に相当する式が知られており，しかもこの式の右辺にあたる量が [38] で扱っている Bakry-Émery 条件に相当する量と対応している．このことを通じて，幾つかの確率模型で相対エントロピーの K 凸性が検証されている [61]．スケール極限等の最先端の問題に応用するにはまだ遠い段階と思われるが，新しいアプローチとして注目に値する．

また，関連する話題として，飛躍型確率過程に対する結果 [52] を挙げておく．

(10) 無限次元空間

確率解析の主たる研究対象のひとつである無限次元空間についてもこの方面で若干の結果がある．ただ，扱えている具体的な空間は，Wiener 空間 [57] や (相関がない粒子の) 配置空間 [54] 程度である．

典型的には，幾何学的に自然な距離として Wiener 空間の Cameron-Martin 距離のような擬距離 (値が無限大を取りうる) が現れることが，問題を一段難しくしている．一般論として，距離として擬距離を許容する拡張された意味での測度距離空間を考え，曲率次元条件 (達) とそれらの同値性についての研究が近年展開されている [5, 8] が，条件が検証できる具体例についての研究の進展が望まれる．

(11) 自由確率論

自由確率論から自然に現れる自由エントロピーの解析手法として，最適輸送理論の観点からの研究が幾つか展開されている．自由エントロピーの勾配流 (自由 Fokker-Planck 方程式) は，ある種の McKean-Vlasov 方程式の解になる．McKean-Vlasov 方程式に対しては粒子系近似が知られており，確率論との接点もある (これらの話題について，[132] およびその参考文献参照)．また自由対数 Sobolev 不等式や自由 Talagrand 不等式，自由 Poincaré 不等式等の関数不等式に関する研究もある ([125, 144] 等)．

また，別路線として，Clifford 代数の成す非可換確率空間上の Fermionic Fokker-Planck 方程式の研究もある [39]．Otto 解析の考え方を基にうまく Riemann 計量を入れることで，エントロピーの勾配流として方程式を特徴づけることができる．

(12) フラクタル

自己相似集合上の幾何学・解析学については既に膨大な研究があり，代表的な特異空間の例として知られている．実際，ある程度広いクラスの自己相似集合上には標準的な Dirichlet 形式が定まり，対応する熱分布について詳しく調べられている [109]．ただ，現在知られている話の多くは，底空間の測度あるいは熱分布の構造と空間の距離との対応は非 Riemann 的である．例えば，幾何学的に自然な距離を導入すると，典型的には測地距離にはなるが非分岐ではない．このため，7.3, 7.4 節で見てきたような曲率次元条件は (少なくとも従来の形では) みたされないと考えられている．

代表的な自己相似集合である Sierpiński gasket 上では，曲率次元条件に関する若干の研究が現れつつある．上記の考察と合致するように，調和 Sierpiński gasket 上では，通常の意味での $\mathsf{CD}(K,\infty)$ 条件は成立しない [95]．調和 Sierpiński gasket は通常の構造を付与した場合よりも Riemann 多様体に近いと考えられるが，それでも positive な結果は従わない．その一方で，ごく最近，「測度をうまく選べば，Bakry-Émery の曲率次元条件が成立することがある」との報告がある [27].

8.4 その他の話題

最適輸送理論と確率論との関係は多岐に亘る．例えば，Markov 過程の “よい” カップリングの構成は，定常状態への収束速度評価と密接に繋がっており，古くから研究されてきた．最適輸送費用がカップリングを用いて定義されている以上，それらの問題とは直接的な関係がある．本論と関わりの深いものとして [122] を，収束速度評価との関係については，ここでは [49] を挙げるに止める (この文献の参考文献も参照のこと).

また，確率論における結合法との別の形での関連として，Schrödinger のエントロピー最小化問題に言及しておく．この問題でも，最適輸送問題同様に端点の測度を与えた上でその補間を考える．その際，経路空間上の測度として，3.5 節で見た $\Xi \in \mathscr{P}(C([0,1];X))$ の代わりに拡散過程の分布に関連するものが自然に現れる．ここではこれ以上の詳細には立ち入らず，確率制御理論等の関連する話題についての解説 [184] および，本論に関連する研究 (Ricci 曲率の情報の抽出) として [129] を挙げておくに止める (この文献の参考文献も参照のこと).

統計物理学の問題との関連では，粒子系のスケール極限の問題への最適輸送理論を用いたアプローチが近年登場している．粒子系の時間発展を確率測度の空間上の勾配流と捉え，勾配流の収束 (ポテンシャル関数の収束を含む) を経由して粒子系の収束を調べる，という考え方による．この観点は大偏差原理と深い相関があると指摘されており [1]，実際に，ある枠組においては勾配流に対応する汎関数の Γ-収束と大偏差原理の成立が必要充分であるとも証明されている [59]．また，同様の考え方の流体力学極限への応用として，対称単純排他過程の場合の結果が知られている [60] (各文献の参考文献も参照のこと)．これらの見方は，部分的には先行研究で与えられていたもののようであり，本質的に新しいアプローチではないのかもしれない．一方で，この方面の問題を掘り下げていくことには一定の価値があるのではないかと想像している．なにぶん私自身の理解が不充分な分野なので見当違いかもしれないが，このような研究の萌芽があることは，ここで指摘しておくだけの価値があると判断した.

あと，近年，数理ファイナンスにおいて，最適輸送費用において martingale 型の制約条件を coupling の制約条件に付加した概念である martingale optimal transport が盛んに研究されている．Kantorovich 双対性の拡張や最適輸送写像の存在等の最適輸送理論の基本的な結果の拡張のほか，Skorokhod 埋め込み問題への応用など，様々な興味深い進展があるように見受けられる．残念ながら，私自身はこれを紹介するには勉強が追いついていない．最近の文献として [29, 66] を挙げておく (これらの文献の参考文献も参照)．私がここに下手な説明を書くよりは，それらの論文 (あるいはその参考文献) の導入部を見て頂く方が良いであろう.

9　RCD 空間上の解析に関する幾つかの話題

最後に，RCD 空間上の (幾何) 解析のうち主に解析に関わる結果について，重要と思われるもの，とりわけ個人的に興味・関与があるものを幾つか説明する．ただ，既に膨大な結果があり，全てに言及するのは難しい．ここで紹介しきれない比較的最近の結果については，把握している範囲でキーワードと参考文献だけを以下に列挙しておく：

> 1 階 Sobolev 空間に関する理論 [3, 4, 9, 73]，次元を加味した (時空間的でない)W_2-収縮性の精密化 [33]，F.-Y. Wang の Harnack 不等式 [11, 131]，Li-Yau 不等式 [65, 89]，精密な熱核評価 [90] Cheng の微分評価 [87]，調和関数の正則性 [88, 98]，Liouville 型定理と多項式増大度を持つ調和関数 [87]，最適輸送写像の存在 [41, 78]，連続方程式 [16, 72] . . .

具体的な話に入る前に，少し全体的な状況を俯瞰しておく．7.1 節で紹介した測度距離空間の微分概念の同定は，その証明方法がもたらす考え方も含めて，非常に強力な解析の土台を提供してくれる [81]．また，熱半群 P_t について，Remark 7.13 (iv) で述べたような Lipschitz 正則化を代表とする各種の正則化効果が判明したことで，熱半群を軟化子として使用することが可能になっている (実際に，これまでに紹介した結果を近似を用いて厳密に証明する際，熱半群の力を借りて議論する場面もある)．あるいは Bakry-Émery の曲率次元条件の別側面として，関数に対するある種の regularity を保証する手段として条件が利用されるようになってきた．これは，滑らかな空間を想定して理論が展開されていた際には必要がなかった発想と思われる．例えば，Remark 2.2 で言及した既存の理論の欠点がそのような視点から補えることが明らかになってきている (この話題は 9.1 節で扱う)．RCD 空間の理論の近年の爆発的進展は，これらの地盤が固められたことに依るところが大きいと考えられる．

ここで一点だけ, 確率論に関係する話題として, 熱核評価のことを注意しておこう．CD(K,∞) 空間で $\mathfrak{m}$ が局所 volume doubling 条件をみたすなら, 局所 Poincaré 不等式が成り立つ [164]([96, 97] も参照のこと)．よって特に，RCD*(K,N) 空間 $(N<\infty)$ なら，Theorem 5.9 より，上下からの局所一様 Gauss 型熱核評価が従う [171] (尤も，この場合には，より精密な評価が知られている [90])．

9.1　Bakry-Émery の曲率次元条件の解析的応用

Bakry-Émery 理論が強力な理論たり得た理由のひとつは, 次の性質にある：重みつき Riemann 多様体 M 上で (2.2) が $N=\infty$ で成立していれば，任意の $f\in C_0^\infty(M)$ で次が成立する [82]：

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}|\nabla f|^2-\langle\nabla f,\nabla\mathcal{L}f\rangle\ge K|\nabla f|^2+\frac{|\nabla|\nabla f|^2|^2}{4|\nabla f|^2}. \tag{9.1}$$

これを Bakry-Émery の曲率次元条件の**自己改良 (self-improvement)** という．つまり，元々なかった右辺第 2 項を自動的に追加できるのである．実際，(9.1) を用いて $N=\infty$ の場合の Theorem 2.3 (1) ⇒ (2) と同様の議論を行うことで，熱半群に対する L^1-微分評価

$$|\nabla P_t f|\le \mathrm{e}^{-Kt}P_t(|\nabla f|) \tag{9.2}$$

[81] 原論文では，測度距離空間上の別の幾つかの微分概念をも，同時に同定していることが注意してある．

[82] $|\nabla f|=0$ なる点では，右辺第 2 項は 0 とする．

を示すことができる．この不等式から，P_t に対する (逆向き) 対数 Sobolev 不等式 [18, 20, 124]，(逆向き)Gauss 型等周不等式 [12, 20, 22]，F.-Y. Wang の dimension-free Harnack 不等式 [11, 131] などの，数々の強力な関数不等式を得ることができる．対数 Sobolev 不等式，等周不等式については，$K > 0$ のときには $t \to \infty$ とすることで，通常の対数 Sobolev 不等式および Gauss 型等周不等式が得られる．

同様の自己改良は Theorem 7.12 の条件 (E) についても可能なことが知られている [168]．だがそれは，決して自明ではない．既存の上記 (9.1) の証明は，試験関数として，$\Phi(f, g, h)$ (Φ は 2 次多項式) の形の関数を (2.2) の左辺に代入し，合成関数の微分規則 (derivation property) を用いて計算し，多項式の係数と試験関数 f, g, h を適切に選ぶことで得られる．これを 7 章で述べたような測度距離空間の枠組で行おうとすると，登場する関数の regularity が問題になる．実際．(9.1) の右辺第 2 項に相当する量に意味がつく f を確定せねばならぬし，$|\nabla f|_*^2$ にある程度の regularity を保証せねばならない．抽象的な枠組での自己改良の議論は，以下の性質 ([168, Lemma 2.6, Lemma 3.2] 参照) に基づく：

Theorem 9.1 ($\mathcal{L}|\nabla f|_*^2$ の実現) *$N = \infty$ とし，Theorem 7.12 の (E) を仮定する．また，$f \in \mathscr{D}(\mathcal{L}) \cap L^\infty(\mathfrak{m})$, $|\nabla f|_* \in L^\infty(\mathfrak{m})$ かつ $\mathcal{L} f \in W^{1,2}(X)$ とする．このとき $|\nabla f|_*^2 \in W^{1,2}(X)$ であり，更に $\mathcal{L}|\nabla f|_*^2$ が次の意味で測度として定まる：ある X 上の符号付測度 μ で，μ は極集合に mass を持たず，各 $\varphi \in W^{1,2}(X)$ に対して*

$$\int_X \langle \nabla |\nabla f|_*^2, \nabla \varphi \rangle_* \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = -\int_X \tilde{\varphi} \, \mathrm{d}\mu \tag{9.3}$$

をみたすものが存在する [83]*．なお，$\tilde{\varphi}$ は φ の準連続変形.*

Proof. 熱半群の軟化 $\mathfrak{P}_\varepsilon$(Remark 7.13 (i) 参照) を用いる．$g \in L^1 \cap L^2(\mathfrak{m})$ を

$$g := 2\langle \nabla f, \nabla \mathcal{L} f \rangle_* + 2K |\nabla f|_*^2$$

で定める ($g \in L^2(\mathfrak{m})$ は，$|\langle \nabla f, \nabla \mathcal{L} f \rangle_*| \le |\nabla f|_* |\nabla \mathcal{L} f|_*$ と f の仮定から分かる)．このとき，任意の $\varphi \in L^2 \cap L^\infty(\mathfrak{m})$ に対して，条件 (E) より，

$$\int_X \mathcal{L}\mathfrak{P}_\varepsilon(|\nabla f|_*^2)\, \varphi \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_X |\nabla f|_*^2 \mathcal{L}\mathfrak{P}_\varepsilon \varphi \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \ge \int_X g \mathfrak{P}_\varepsilon \varphi \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \tag{9.4}$$

が成り立つ．ここで $\varphi = \mathfrak{P}_\varepsilon(|\nabla f|_*^2)$ と取れるので，

$$\int_X \langle \nabla \mathfrak{P}_\varepsilon(|\nabla f|_*^2), \nabla \mathfrak{P}_\varepsilon(|\nabla f|_*^2) \rangle_* \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \le -\int_X \mathfrak{P}_\varepsilon g \, \mathfrak{P}_\varepsilon(|\nabla f|_*^2) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

右辺は $\varepsilon \downarrow 0$ で収束するので，左辺のスペクトル分解を考えれば $|\nabla f|_*^2 \in W^{1,2}(X)$ を得る．

ここで，$W^{1,2}(X)$ 上の汎関数 ℓ を

$$\ell(\varphi) := -\int_X \langle \nabla |\nabla f|_*^2, \nabla \varphi \rangle_* \, \mathrm{d}\mathfrak{m} - \int_X g \, \varphi \, \mathrm{d}\mathfrak{m}$$

で定める．この汎関数は明らかに $W^{1,2}(X)$ 上で連続 (位相は Proposition 7.3 (ii) 参照)．よって Riesz の表現定理から，ある $h_\ell \in W^{1,2}(X)$ で，各 $\varphi \in W^{1,2}(X)$ に対して

$$\ell(\varphi) = \int_X \langle \nabla h_\ell, \nabla \varphi \rangle_* \, \mathrm{d}\mathfrak{m} + \int_X h_\ell \, \varphi \, \mathrm{d}\mathfrak{m}$$

[83] 右辺の積分が well defined であることも主張に含む.

をみたすものが存在する．更に，ℓ は正値汎関数になる．実際，$\varphi \geq 0$ のとき，$\mathfrak{P}_\varepsilon(\varphi \wedge n)$ を考えて極限を取れば，(9.4) より $\ell(\varphi) \geq 0$ を得る．

7.5 節の冒頭で述べたように，Ch は強局所的準正則 Dirichlet 形式 (が定める 2 次形式) である．ℓ の正値性より，h_ℓ はその Dirichlet 形式に関して 1-excessive になる．よって，[136, Chapter VI, Proposition 2.1] より，

$$\ell(\varphi) = \int_X \tilde{\varphi}\, \mathrm{d}\mu_0$$

を各 $\varphi \in W^{1,2}(X)$ でみたす，極集合に mass を持たない (非負) 測度 μ_0 が存在する．従って特に $\mu := \mu_0 + g\mathfrak{m}$ とおけば，これが所望の性質 (9.3) をみたすものになっている．□

Theorem 9.1 により，Theorem 7.12 の条件 (E) の記述に現れる写像

$$h \mapsto \frac{1}{2}\int_X |\nabla f|_*^2 \mathcal{L}h\, \mathrm{d}\mathfrak{m} - \int_X \langle \nabla f, \nabla \mathcal{L} f\rangle h\, \mathrm{d}\mathfrak{m}$$

は (符号付) 測度を定める．上記の証明から，この測度の特異部分は非負になることが分かる．この測度の $\mathfrak{m}$ に絶対連続な部分の密度関数を Remark 2.2 の記法に基づき，$\Gamma_2^\dagger(f,f)$ と書くことにする．この記法を用いて，Riemann 多様体の場合の考え方に沿って論を展開することで，次の形で自己改良性を得ることができる：

Theorem 9.2 (Bakry-Émery 条件の自己改良 [168]) *f を Theorem 9.1 の通りとする．このとき，次が成り立つ：*

$$|\nabla f|_*^2 \left(\Gamma_2^\dagger(f,f) - K|\nabla f|_*^2\right) \geq \frac{1}{4}|\nabla|\nabla f|_*^2|_*^2 \quad \mathfrak{m}\text{-}a.e.$$

特に，各 $f \in W^{1,2}(X)$ に対し次の L^1-微分評価が成り立つ：

$$|\nabla P_t f|_* \leq \mathrm{e}^{-Kt} P_t(|\nabla f|_*) \quad \mathfrak{m}\text{-}a.e. \tag{9.5}$$

Remark 9.3 ($\mathcal{L}f$ の測度としての実現について)

(i) やや *regularity* の低い関数 f に対して，$\mathcal{L}f$ を測度として定める，という考え方自体は標準的ではある．例えば，*Riemann* 幾何における *Laplacian* 比較定理は，その形で最小跡まで拡張される．実際，*Laplacian* 比較定理を RCD 空間で論じる際にも同様の考え方が有効に用いられる *[70]*.

(ii) *[168]* では，*Cheeger* エネルギー汎関数よりも一般の対称強局所的準正則 *Dirichlet* 形式の枠組で自己改良性を論じている．*Remark 2.2* で言及した仮定と *Theorem 9.1* の仮定との *(*決定的な*)* 違いは，*Theorem 9.1* の仮定は関数の各種操作で比較的安定なことにある．例えば，*Remark 7.13* の逆向き *Poincaré* 不等式より，$f = P_t f_0$, $f_0 \in L^2 \cap L^\infty(\mathfrak{m})$, $t > 0$ は *Theorem 9.1* の仮定をみたすと分かる．

$N < \infty$ の場合にも，(E)$'$ の改良に関する理論はある程度展開されている ([85, 169] や，その参考文献を参照)．ただ，$N = \infty$ の場合に比べて改良の方向性が複数ありうるようで，不明な点も多い．ここでは，P_t の微分評価の改良に関する次の結果を紹介しておこう．これらは，はじめに Riemann 多様体上で Brown 運動の結合法を用いて導出された [121].

Theorem 9.4 (自己改良：$N<\infty$ の場合) *f を Theorem 9.1 の通りとする．また $p>2$ とし，p_* を p の Hölder 共役指数とする．このとき次が成り立つ：*

$$|\nabla f|_*^2\left(\Gamma_2^\dagger(f,f)-K|\nabla f|_*^2-\frac{1}{N+p-2}(\mathcal{L}f)^2\right)\geq\frac{2-p_*}{4}|\nabla|\nabla f|_*^2|_*^2\quad \mathfrak{m}\text{-}a.e.$$

また，Bakry-Ledoux の微分評価の改良に相当する次の式が $f\in W^{1,2}(X)$ で成り立つ：

$$|\nabla P_tf|_*^2+\frac{1-\mathrm{e}^{-2Kt}}{(N+p-2)K}(\mathcal{L}P_tf)^2\leq\mathrm{e}^{-2Kt}P_t(|\nabla f|_*^{p_*})^{2/p_*}. \tag{9.6}$$

証明の考え方は $N=\infty$ の場合と同じだが，試験関数に用いる多項式のパラメータ選択はより複雑になる．詳細は省略する．

最後に，Bakry-Émery の曲率次元条件に関連する話題として，$|\nabla f|_*$ の可積分性評価と局所化された試験関数の存在に関する次の主張を紹介しておこう．可積分性評価は後で直接使うわけではないが，Bakry-Émery 理論の有用性を説明する例として記載した．

Proposition 9.5 ($|\nabla f|_*$ の補間評価 [14, Theorem 3.1]) (E) を仮定する．$p\in\{2,\infty\}$ とし，$\lambda\geq(-K)\vee 0$ とする．このとき，以下をみたす $c>0$ が存在する：各 $f\in L^2\cap L^\infty(\mathfrak{m})$ について，$\mathcal{L}f\in L^p(\mathfrak{m})$ ならば $|\nabla f|_*^2\in L^p(\mathfrak{m})$ かつ $\||\nabla f|_*^2\|_{L^p(\mathfrak{m})}\leq c\|f\|_\infty\|(\lambda-\mathcal{L})f\|_p$.

証明には Remark 7.13 (iii) の P_t-逆向き Poincaré 不等式を用いる．詳細は省略する．

Proposition 9.6 (試験関数の局所化 [87, Proposition 2.9]) $(\mathrm{E})'$ を仮定する．$F\subset X$ をコンパクト集合とする．このとき，コンパクト台を持つ $\psi\in\mathscr{D}(\mathcal{L})\cap\mathrm{Lip}(X)$ で，$\mathcal{L}\psi\in L^\infty(\mathfrak{m})\cap W^{1,2}(X)$ かつ $\psi|_F\equiv 1$ なるものが取れる．

証明は省略する．なお，Proposition 9.6 に類似の結果は，$N=\infty$ の場合も知られている．[14, Lemma 6.7] 参照．

9.2 W_2-収縮性の拡張

7.3, 7.4 節を通じて，熱分布間の W_2-距離の評価が曲率次元条件を特徴づける性質であることを見てきた．一方で，以下に見るように，熱半群 P_t の微分評価から最適輸送費用の評価を導出することができる．それは，前述の条件では (C)(あるいは $(\mathrm{C})'$) が (D)(あるいは $(\mathrm{D})'$) から直接導けることを意味する ([6, 10] の他，[21, 20, 117, 119, 121] を参照)．更には，前節で得た微分評価の精密化から，最適輸送費用評価の精密化も得られる．これは，双対性と言って差し支えのない対応であろう．そのような議論の最も易しい例は，既に Corollary 3.3 で見た．まず，この系の拡張から述べよう．

Theorem 9.7 (微分評価と最適輸送費用評価の双対性 [117, 119]) *$P(x,\cdot)\in\mathscr{P}(X)$ $(x\in X)$ を Markov 核とする．P の $f\in C_b(X)$ および $\mu\in\mathscr{P}(X)$ への作用をそれぞれ $Pf\in C_b(X)$, $P^*\mu\in\mathscr{P}(X)$ と書く．このとき，$p\in(1,\infty]$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, $C>0$ について，次は同値．*

(1) 各 $\mu_0,\mu_1\in\mathscr{P}(X)$ で $W_p(P^*\mu_0,P^*\mu_1)\leq CW_p(\mu_0,\mu_1)$.

(2) 各 $f\in\mathrm{Lip}_b(X)$ で $|\nabla Pf|\leq C|P(|\nabla f|^q)^{1/q}$.

(1), (2) はそれぞれ条件 (C), (D) に対応している．ただ，条件 (D) は局所 Lipschitz 定数ではなく minimal relaxed gradient で述べられている (この置き換えについては，Remark 7.13 (ii) および [6, 10] の議論を参照)．また，P が熱半群のときの (2) $\Rightarrow$ (1) には，P_t と Hopf-Lax 半群 Q_s の交換関係に関する不等式を介する証明もある [20, 21].

なお，Theorem 9.7 を Theorem 9.2 と合わせると，$\mathsf{RCD}(K,\infty)$ 空間上，$p=\infty$ の場合の L^p-Wasserstein 距離の評価

$$W_\infty(P_t^*\mu_0, P_t^*\mu_1) \le \mathrm{e}^{-Kt} W_\infty(\mu_0,\mu_1) \tag{9.7}$$

が得られる．

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) は，本質的に Theorem 7.12 の証明の該当箇所の議論に準ずる (Schwarz 不等式の代わりに Hölder 不等式を用いる).

(2) $\Rightarrow$ (1) について論じよう．$p=\infty$ のときは，任意の $p<\infty$ で (2) が成立するので，$p<\infty$ で示しておいてから $p\to\infty$ とすればよい ([117] 参照)．よって，以下 $p<\infty$ とする．例によって，微分可能性や積分と微分の順序交換はすべて都合良く認める．証明の発想は，Theorem 4.1 の "$\le$" の証明あるいは Theorem 6.9 の証明で用いた考え方に準ずる．W_p^p に対する Kantorovich 双対性を (3.11) を用いて書き直すと，

$$\frac{1}{p}W_p(P^*\mu_0, P^*\mu_1)^p = \sup_{f\in \mathrm{Lip}_b(X)} \left[\int_X PQ_1 f\,\mathrm{d}\mu_1 - \int_X Pf\,\mathrm{d}\mu_0\right]$$

となる (Remark 3.6 も参照のこと)．右辺の sup の中身を試験関数 f によらない形で評価したい．$\Xi \in \mathscr{P}(C([0,1];X))$ を μ_0,μ_1 に対する動的最適カップリングとする．このとき，$Q_s f$ が (3.14) をみたすことから，

$$\begin{aligned}
\int_X PQ_1 f\,\mathrm{d}\mu_1 - \int_X Pf\,\mathrm{d}\mu_0 &= \int_{C([0,1];X)} \big(PQ_1 f(\gamma_1) - Pf(\gamma_0)\big)\,\Xi(\mathrm{d}\gamma)\\
&= \int_{C([0,1];X)} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} PQ_s f(\gamma_s) \mathrm{d}s\,\Xi(\mathrm{d}\gamma)\\
&\le \int_{C([0,1];X)} \int_0^1 \left(|\nabla PQ_s f|(\gamma_s)|\dot\gamma|(s) - \frac{1}{q}P(|\nabla Q_s f|^q)(\gamma_s)\right) \mathrm{d}s\,\Xi(\mathrm{d}\gamma)\\
&\le \int_{C([0,1];X)} \int_0^1 \left(CP(|\nabla Q_s f|^q)^{1/q}(\gamma_s)|\dot\gamma|(s) - \frac{1}{q}P(|\nabla Q_s f|^q)(\gamma_s)\right) \mathrm{d}s\,\Xi(\mathrm{d}\gamma)\\
&\le \frac{C^p}{p}\int_{C([0,1];X)} \int_0^1 |\dot\gamma|^p(s)\mathrm{d}s\,\Xi(\mathrm{d}\gamma) = \frac{C^p}{p} W_p(\mu_0,\mu_1)^p.
\end{aligned}$$

よって結論を得た (第 2 の等号が要．第 2 の不等号は仮定，第 3 の不等号は Hausdorff-Young 不等式から従う). □

$N<\infty$ の時にも同様の関係がある．特に [121, Theorem 2.5] の議論より次が分かる：

Theorem 9.8 ($N<\infty$ での双対性) $(X,d,\mathfrak{m})$ は無限小 *Hilbert* 的で，(V), (L) をみたすとする．このとき，$p\in[2,\infty)$ について，次の *2* 条件は同値 [84].

[84] 例によってやや不正確．脚注 65 参照．なお，ここでの (1)(2) いずれの条件も Theorem 7.14 の (C)(D) の条件を導く ($N\to\infty$ としてから，[117, Remark 2.3 (v)] を用いる).

(1) 各 $\nu_0, \nu_1 \in \mathscr{P}_2(X)$, $0 \le s \le t$ に対して，(C)′ の W_2 を W_p に，N を $N+p-2$ に置き換えた式が成立.

(2) 各 $f \in W^{1,2}(X)$ で (9.6) が成立.

証明は Theorem 9.7 と類似の考え方による．ただし時間のずれを考慮して, その補間も行う必要がある．その際に，線形補間ではなく別の補間が必要になる (この点，考え方は Theorem 4.9 の証明に近い).

ここまでの結果を標語的にまとめると，「P_t の微分に関する関数不等式があれば，対応する熱分布間の最適輸送費用の評価がある」と言える．そこで，W_p 以外の最適輸送費用が登場する例を以下に挙げておこう．そのため記号を準備する．$\Phi : [-\infty, \infty] \to [0,1]$ を

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-u^2/2)\,\mathrm{d}u$$

とし，$\mathcal{I} := \Phi' \circ \Phi^{-1}$ とおく．また，各 $t > 0$, $u \ge 0$ に対し，$\varphi_t(u)$ を次で定める：

$$\varphi_t(u) := 2\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{\mathrm{e}^{2Kt}-1}}u\right) - 1$$

Theorem 9.9 (全変動評価) $(X, d, \mathfrak{m})$ を $\mathsf{RCD}(K, \infty)$ 空間とする．このとき以下が成立：

(i) ***(P_t-逆向き Gauss 型等周不等式 [20, 21])*** 各可測関数 $f : X \to [0,1]$ に対し

$$\frac{\mathrm{e}^{2Kt}-1}{K} |\nabla P_t f|_*^2 \le \mathcal{I}(P_t f)^2 - P_t(\mathcal{I}(f))^2.$$

(ii) 各 $\nu, \nu' \in \mathcal{P}(X)$ に対して

$$\|P_t^* \nu - P_t^* \nu'\|_{\mathrm{TV}} \left(:= \sup_{A \subset X} |P_t^* \nu(A) - P_t^* \nu'(A)| \right) \le \mathcal{T}_{\varphi_t(d)}(\nu, \nu').$$

Remark 9.10 (Theorem 9.9 の主張への補足)

(i) *Theorem 9.9* (ii) の不等式の右辺は $K \ge 0$ のとき $t \to \infty$ で *0* に収束する．

(ii) 重みつき *Riemann* 多様体の枠組みで，$M = \mathbb{R}$，$V = Kx^2/2$ のとき，ν_0, ν_1 が原点に対して互いに対称な分布になっていれば，*Theorem 9.9* (ii) で等号が成立する．

Proof. (i): Theorem 2.3 と類似の議論による．$\mathcal{I}''\mathcal{I} = -1$ を用いた (形式的な) 計算により，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{P_{t-s}(\mathcal{I}(P_s f))\}^2 = 2P_{t-s}(\mathcal{I}(P_s f))P_{t-s}\left(\frac{|\nabla P_s f|_*^2}{\mathcal{I}(P_s f)}\right) \ge 2P_{t-s}(|\nabla P_s f|_*)$$

を得る (不等号は P_{t-s} に関する Schwarz 不等式から)．この式に (9.5) を適用し，s について $[0,t]$ 上で積分すれば結論を得る．

(ii): $\nu = \delta_x$, $\nu' = \delta_y$ のときに示せば充分 ([179, Theorem 4.8] を用いる)．Remark 7.13 (ii) の前半と同様の議論から，(i) の左辺は minimal relaxed gradient の代わりに局所 Lipschitz 定数に置き換えることができる．このとき，

$$|\nabla \Phi^{-1}(P_t f)| = \frac{|\nabla P_t f|}{\mathcal{I}(P_t f)} \le \sqrt{\frac{K}{\mathrm{e}^{2Kt}-1}}$$

を得る．よって，局所 Lipschitz 定数が upper gradient になる ((3.2) の後の説明参照) ことから，$x, y \in X$ に対してこの 2 点を結ぶ測地線に沿った線積分を考えることで，

$$\Phi^{-1}(P_t f(x)) \le \Phi^{-1}(P_t f(y)) + \sqrt{\frac{K}{\mathrm{e}^{2Kt}-1}}\, d(x,y) \tag{9.8}$$

を得る．以下，(9.8) から

$$P_t f(x) - P_t f(y) \le \varphi_t(d(x,y)) \tag{9.9}$$

を導出する．この式が導出できれば，$\pi \in \Pi(\nu_0, \nu_1)$ で積分すれば f の任意性から結論を得る．$P_t f(y) < P_t f(x)$ の場合のみ考えればよい．$\chi : [0,\infty] \to [0,1]$ を $\chi(u) := 2\Phi(u) - 1$ とおく．χ は単調増加凹関数で，$\chi(0) = 0$ となる．

(a) $P_t f(y) \le 1/2 \le P_t f(x)$ のとき：$\Phi^{-1}(P_t f(y)) \le 0 \le \Phi^{-1}(P_t f(x))$ なので，χ の凹性と (9.8) から，

$$\begin{aligned}
\varphi_t(d(x,y)) &\ge \frac{1}{2}\chi\left(\Phi^{-1}(P_t f(y)) + \sqrt{\frac{K}{\mathrm{e}^{2Kt}-1}}\, d(x,y)\right) + \frac{1}{2}\chi(-\Phi^{-1}(P_t f(y))) \\
&\ge \frac{1}{2}\chi(\Phi^{-1}(P_t f(x))) + \frac{1}{2}\chi(-\Phi^{-1}(P_t f(y))) \\
&= \frac{1}{2}\big(2P_t f(x) - 1 + \chi(\Phi^{-1}(1 - P_t f(y)))\big) = P_t f(x) - P_t f(y)
\end{aligned}$$

となり，(9.9) を得る．

(b) $1/2 \le P_t f(y) \le P_t f(x)$ のとき：$\chi(u_1 + u_2) \le \chi(u_1) + \chi(u_2)$ が成り立つので，

$$\chi\left(\frac{1}{2}\Phi^{-1}(P_t f(x))\right) \le \chi\left(\frac{1}{2}\Phi^{-1}(P_t f(y))\right) + \varphi_t(d(x,y))$$

を得る．χ の凹性から $\chi(u_2/2) - \chi(u_1/2) \ge (\chi(u_2) - \chi(u_1))/2$ が成り立つので，これを用いれば (a) の最後の部分と同様にして (9.9) を得る．

(c) $P_t f(y) \le P_t f(x) \le 1/2$ のとき：

$$\Phi^{-1}(P_t f(x)) - \Phi^{-1}(P_t f(y)) = \Phi^{-1}(P_t(1-f)(y)) - \Phi^{-1}(P_t(1-f)(x))$$

より，(b) に帰着される．　□

重みつき Riemann 多様体上では, 多様体上の確率解析が Ricci 曲率と熱分布を橋渡しする．例えば, Riemann 多様体上の Brown 運動のカップリングを構成することで, (C) や，Theorem 9.7 で見た W_p への拡張を, $\mathrm{Ric} \ge K$ から直接証明できる [180] (Remark 6.8 も参照)．Theorem 9.9 (ii) も，別種のカップリングを用いて確率論的に証明できる [122]．また，解析的な手法を経由すれば (C)$'$ もそのような方法で導出できる [121]．$\mathsf{RCD}^*(K,N)$ 空間ではこのような手法を直接適用することはできないが，上述のように，Bakry-Émery の曲率次元条件を経由することで．最適輸送費用の評価を導出することができる．しかし，重みつき多様体で知られている全ての最適輸送費用評価が RCD 空間に拡張できているわけではない．重みつき Riemann 多様体でしか知られていない評価として，次のものがある (知る限り最も一般的な形で書いたので，少し複雑になっている) [121, Theorem 4.11]：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}_{\mathfrak{s}^p_{K^*}(d/2)}(P_s^*\nu_0, P_t^*\nu_1)^{2/p} \le \mathrm{e}^{-\theta}\mathcal{T}_{\mathfrak{s}^p_{K^*}(d/2)}(\nu_0,\nu_1)^{2/p} + \frac{\hat{N}(1-\mathrm{e}^{\theta})}{2\theta}(\sqrt{t}-\sqrt{s})^2, \\
&\qquad K^* := \frac{K}{N-1}, \quad \hat{N} := N + p - 2, \quad \theta := K(s+t) + \frac{pK^*(\sqrt{t}-\sqrt{s})^2}{2}.
\end{aligned}$$

また，RCD 空間での前述の結果の延長線上の問題として，逆向きの問題すなわち「解析的な方法から最適輸送費用の評価を通じて，拡散過程のカップリングが RCD 空間上に構成できるか？」と問うのは自然であろう．その問いへの答えのひとつとして，W_∞-評価 (9.7) に対応する Brown 運動のカップリングは次の形で構成できる：

Theorem 9.11 (平行移動カップリングの構成 [173]) $(X, d, \mathfrak{m})$ を RCD(K, ∞) 空間とし，更に局所コンパクトを仮定する [85]．このとき，任意の $x_0, x_1 \in X$ に対して，(x_0, x_1) を出発する *Brown* 運動のカップリング $(B_t^{(0)}, B_t^{(1)})$ で，各 $t \geq s \geq 0$ で

$$d(B_t^{(0)}, B_t^{(1)}) \leq \mathrm{e}^{-K(t-s)} d(B_s^{(0)}, B_s^{(1)})$$

をみたすものが存在する．

Proof. 例によって概要のみ述べる．

Brown 運動の時間離散化 $B_{k/2^n}$ $(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ で得られる Markov 連鎖をまず考え，主張に対応する Markov 連鎖のカップリングを構成する．そして，そのカップリングを極限移行して Brown 運動のカップリングを構成する．所与の性質をみたす Markov 連鎖のカップリングは，各 $x_0, x_1 \in X$ に対して $W_\infty(P^*_{1/2^n}\delta_{x_0}, P^*_{1/2^n}\delta_{x_1})$ の最適カップリング π^{x_0,x_1} を 1-step 推移確率のカップリングとして，その反復合成で構成できる ((x_0, x_1) に関する measurable selection が要る；所与の評価をみたしていることの検証で (9.7) を用いる)．極限移行に関しては，収束部分列を取る議論による． □

Theorem 9.9 に対応する Brown 運動のカップリングも RCD 空間上で構成できると考えられる．Riemann 多様体ではより一般の最適輸送費用評価が知られており [122]，それが得られれば問題はほぼ解決する [86]．またこれは $N = \infty$ の場合の結果であり，$N < \infty$ の場合の問題もある (これも Riemann 多様体では解決済み [122])．

9.3 熱分布の W_2-評価と $\mathcal{W}$-エントロピー

7.3, 7.4 節では，曲率次元条件の同値条件として多くの条件を紹介し，その後，それらの条件の応用について説明を加えてきた．最後に，(C)′ の応用の一例として，RCD$(0, N)$ 空間上での Perelman の $\mathcal{W}$-エントロピーの解析について述べる．

Perelman は，彼の有名なプレプリント [160] において，Ricci 流の解析への応用を目的として $\mathcal{W}$-エントロピーを導入した．この量の解析は，彼による Poincaré 予想解決の証明の一角を形成している．一方で，計量が時間に依存しない場合 ((重みつき)Riemann 多様体) でも対応する形で $\mathcal{W}$-エントロピーが導入され，その性質が研究されている ([133, 145, 146] 等参照)．ここでは，それらの結果の RCD 空間への拡張について論じる．$h \in L^2(\mathfrak{m})$ とし，$f = f(t, x)$ を

$$P_t h(x) = \frac{\mathrm{e}^{-f(t,x)}}{(4\pi t)^{N/2}}$$

で定める．重みつき Riemann 多様体 M 上では，通常はこの f を用いて，$\mathcal{W}$-エントロピーを

$$\int_M [t|\nabla f|^2 + f - N] \frac{\mathrm{e}^{-f}}{(4\pi t)^{N/2}} \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \tag{9.10}$$

[85] この仮定は原論文には置かれていない．Dirichlet 形式の一般論「のみ」を用いて全ての出発点から Brown 運動を構成しようとすると必要になる．おそらく不要な仮定だが，ここでは念のため課しておく．

[86] この結果を以前に口頭発表したが，後に証明の誤りが判明した．修正はまだ終わっていない．

と，(f, t の関数として) 定める [87]．一方で，これは h と t の関数でもあり，ここまでの話との対応で言うと，相対エントロピー $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ と Fisher 情報量 $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}$ を用いた簡便な表示を持つ．今回は (通常の慣例と異なり) そちらを定義に用いよう．また，後の議論で自然な形になるよう，関数の代わりに分布を用いる：$\nu \in \mathscr{D}(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}})$, $t > 0$ に対して，**$\mathcal{W}$-エントロピー** $\mathcal{W}(\nu, t)$ を

$$\mathcal{W}(\nu, t) := t\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(\nu) - \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu) - \frac{N}{2}\log t + c_1 \tag{9.11}$$

で定める．ただし，$\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}$ は，minimal relaxed gradient による Fisher 情報量 (Remark 4.6 参照) とし，定数 $c_1 \in \mathbb{R}$ は前の定義と整合するよう選ぶ (具体的な値は以下の話に影響しないし，測度距離空間の枠組みではあまり適切な意味を持たない)．

Ricci 流あるいは非負 (重みつき)Ricci テンソルをもつ重みつき Riemann 多様体において，$\mathcal{W}$-エントロピーに関する最も基本的な結果は，時間単調性即ち (9.10) が t について単調非増加となることである．更に，この単調性は剛性を持つ．重みつき Riemann 多様体 $(M, g, \mathfrak{m})$ の場合であれば，

「(9.10) の t-微分が (ある t で)0 であれば，(M, g) は Euclid 空間となり，
更に $N = \dim M$，即ち重み関数 V は定数関数となる」

という性質が成り立つ [88]．実は，これらの性質は $\mathsf{RCD}(0, N)$ へと自然に拡張される．結果を述べるため，ひとつ概念を用意する ([105, Definition 5.4] 参照)．測度距離空間 $(Y, d_Y, \mathfrak{m}_Y)$ について，$(X, d, \mathfrak{m})$ が $(Y, d_Y, \mathfrak{m}_Y)$ の $(0, N)$-cone であるとは，以下をみたすことを言う．

- $X = Y \times [0, \infty)/\sim$, $(x, u) \sim (y, v) \Leftrightarrow u = v = 0$,
- $d((x, u), (y, v)) = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos(d_Y(x, y) \wedge \pi)}$,
- $\mathfrak{m}(\mathrm{d}x\mathrm{d}u) = u^N \mathrm{d}u\mathfrak{m}_Y(\mathrm{d}x)$.

また $Y \times \{0\}$ に相当する点を X の頂点という．これは 8.2 節で述べた測度距離錐の一例である．

Theorem 9.12 ($\mathcal{W}$-エントロピーの単調性と剛性) $(X, d, \mathfrak{m})$ を $\mathsf{RCD}(0, N)$ 空間とし，$N \geq 2$ とする．このとき，以下が成り立つ：

(i) 各 $\mu \in \mathscr{P}_2(X)$ に対し，$\mathcal{W}(P_t^*\mu, t)$ は t について単調非増加.

(ii) ある $t > 0$ で $\displaystyle\varlimsup_{\delta\downarrow 0} \frac{\mathcal{W}(P_{t+\delta}^*\mu, t+\delta) - \mathcal{W}(P_t^*\mu, t)}{\delta} = 0$ とする．このとき，ある $x_0 \in X$ が存在し，$\mu = \delta_{x_0}$ となる．更に，ある $\mathsf{RCD}(N-2, N-1)$ 空間 $(Y, d_Y, \mathfrak{m}_Y)$ で，$(Y, d_Y, \mathfrak{m}_Y)$ の $(0, N-1)$-*cone* と $(X, d, \mathfrak{m})$ は測度距離空間として同型 [89] になるものがある．またこのとき，x_0 は *cone* の頂点.

この結果は中国科学院の X.-D. Li 氏との (進行中の) 共同研究による．なお，(ii) の結論が成り立つとき，$\mathcal{W}(P_t^*\mu, t)$ は t に依存しない．従って (ii) の主張は逆も成り立つ．また，(i) は X がコンパクトの場合には既に知られている [91]．[91] の証明は解析的な計算と近似に基づくもの

[87] Perelman は，$\mathcal{W}$-エントロピーを Ricci 流の下で考えた．従って，彼自身の $\mathcal{W}$-エントロピーの定義は，枠組の違いを自然に反映するよう，若干違う形を取る．
[88] Ricci 流の場合は，Ricci 流が勾配縮小 Ricci ソリトンになる．
[89] 即ち，pushforward で両向きに測度を対応づける等距離写像が存在する．

で，以下で見る我々の証明の方が一般的かつ簡潔と言える．なお，(重みつき)Riemann 多様体の場合 [133, 145, 146]，Theorem 9.12 に相当する主張の証明では，$\mathcal{W}(P_t^*\mu, t)$ の微分を具体的に計算する．微分が非正関数の積分になることから単調性が分かり，被積分関数が 0 になることの帰結として剛性が得られる．そこで，微分を計算する為に空間には非負 (重みつき)Ricci 曲率に追加の仮定を置いている．Theorem 9.12 を (重みつき)Riemann 多様体に適用する場合にその仮定は必要ないので，この定理は可微分空間においてすら新しい結果となっている．

Ricci 流の場合に，最適輸送理論を用いた $\mathcal{W}$-エントロピーの単調性の証明が知られている [176]．その証明では，輸送費用関数として Perelman の L-汎関数と呼ばれる時空間曲線の汎関数の最小値 (L-距離) を採用する．そこで，適当な rescaling の下で，熱分布間の最適輸送費用が時間について単調非増加になることをまず示し，その評価を熱分布のズレについて微分することで $\mathcal{W}$-エントロピーの単調性を導く．実は，その時考える最適輸送費用の rescaling が，$K=0$ のときの (C)$'$(あるいは (4.17)) に類似している．この類似に基づき，(C)$'$ に対して [176] と同様の計算を遂行すると，そこから (i) が従う．つまり，[176] で見た最適輸送費用の単調性公式は，$K=0$ の場合の (C)$'$ に対応している．これが，以下で述べる (i) の証明の背景になっている．

Proof. 例によって概略だが，特に雰囲気を伝えることのみを目指して書いた．従って，「読者が自力で厳密に補完できるように」ということは考慮から外した．簡単のため，$\mu=\delta_{x_0}$ を仮定する．まず，各 $t>0$ で [90]

$$\varlimsup_{\delta\downarrow 0}\frac{W_2(P_{t+\delta}^*\mu, P_t^*\mu)^2}{\delta^2}=\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(P_t^*\mu)$$

が成り立つことを注意する．これは，(6.11) で等号が成り立つことを意味する (Theorem 6.9 の証明を読めば，等号が成立することが分かる)．$\alpha>0$, $t>s>0$ とする．また $\delta>0$ とする．(C)$'$ の $K=0$ の式から，

$$\frac{W_2(P_t^*\mu, P_{t+t^\alpha\delta}^*\mu)^2}{\delta^2}\le\frac{W_2(P_s^*\mu, P_{s+s^\alpha\delta}^*\mu)^2}{\delta^2}+2N\left(\frac{\sqrt{(t-s)+(t^\alpha-s^\alpha)\delta}-\sqrt{t-s}}{\delta}\right)^2$$

を得る．この式で $\delta\downarrow 0$ として，

$$t^{2\alpha}\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(P_t^*\mu)\le s^{2\alpha}\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(P_s^*\mu)+\frac{N}{2}\frac{(t^\alpha-s^\alpha)^2}{t-s} \tag{9.12}$$

を得る．この式を $\alpha=1$ で適用すると，$t^2\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(P_t^*\mu)-Nt/2$ が t について単調非増加と分かる．ここで (6.9) を使えば，形式的には

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{W}(P_t^*\mu, t)=\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^2\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(P_t^*\mu)-\frac{Nt}{2}\right) \tag{9.13}$$

となる [91]．よって前述の単調性から (i) を得る．

仮定と (9.13) から，

$$\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(P_t^*\mu)=\frac{N}{2t} \tag{9.14}$$

[90] 正確には「t-a.e.」である．

[91] この式の両辺に $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(P_t^*\mu)$ の t-微分が登場するが，微分可能性は一般には不明．実際の証明では，微分の代わりに (微小) 差分を考える．

が成り立つと予測される．(9.12) をうまく使うと，厳密にこれが示せる．ここで，熱核密度 p_t (存在は Proposition 7.11 で保証済み) を用いて，$P_t^*\mu = p_t(x_0,\cdot)\mathfrak{m}$ と書ける．よって，Li-Yau 不等式 [89, Theorem 1.1]

$$\frac{|\nabla p_t(x_0,\cdot)|_*^2}{p_t(x_0,\cdot)^2} - \frac{\mathcal{L}p_t(x_0,\cdot)}{p_t(x_0,\cdot)} \le \frac{N}{2t} \tag{9.15}$$

と (9.14) を組み合わせると，Li-Yau 不等式において $\mathfrak{m}$-a.e. で等号が成立することが容易に分かる．よって，Proposition 9.6 で存在が保証されている $\psi \in C_0(X) \cap \mathscr{D}(\mathcal{L})$ に対して，

$$\begin{aligned}\frac{N}{2t}\int_X \psi\,\mathrm{d}\mathfrak{m} &= \int_X \left(\frac{|\nabla p_t(x_0,x)|_*^2}{p_t(x_0,x)^2} - \frac{\mathcal{L}p_t(x_0,x)}{p_t(x_0,x)}\right)\psi(x)\,\mathfrak{m}(\mathrm{d}x)\\ &= -\int_X \mathcal{L}(\log p_t(x_0,x))\psi(x)\,\mathfrak{m}(\mathrm{d}x)\\ &= -\int_X \log p_t(x_0,x)\mathcal{L}\psi(x)\,\mathfrak{m}(\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

ここで，精密な熱核評価 [90, Theorem 1.1] から，p_t の Varadhan 型短時間漸近挙動

$$\lim_{t\downarrow 0} 4t\log p_t(x_0,x) = -d(x_0,x)^2$$

が従う．よって，

$$\int_X d(x_0,x)^2\mathcal{L}\psi(x)\mathfrak{m}(\mathrm{d}x) = 2N\int_X \psi\,\mathrm{d}\mathfrak{m}$$

を得る．これは，$K=0$ の場合の Laplacian 比較定理 [70, Corollary 5.15] で等号が成立していることに他ならない．(重みつき)Riemann 多様体の枠組であれば，Laplacian 比較定理の等号成立条件により，ここから直ちに結論を得る．測度距離空間では，体積剛性 [71] の議論を踏襲することで結論に至る．実際，Laplacian 比較定理の等号成立は，[71] の主定理の証明でも経由している ([71, Proposition 3.7]). □

参考文献

[1] S. Adams, N. Dirr, M. A. Peletier, and J. Zimmer, *From a large-deviations principle to the Wasserstein gradient flow: a new micro-macro passage*, Comm. Math. Phys. **307** (2011), 791–815.

[2] L. Ambrosio and J. Bertrand, *DC calculus*, Preprint. Available at arXiv:1505.04817.

[3] L. Ambrosio and S. Di Marino, *Equivalent definitions of BV space and of total variation on metric measure spaces*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 4150–4188.

[4] L. Ambrosio, S. Di Marino, and M. Colombo, *Sobolev spaces in metric measure spaces: reflexivity and lower semicontinuity of slopes*, Variational methods for evolving objects, Adv. Stud. Pure Math., 67, 2015, pp. 1–58.

[5] L. Ambrosio, M. Erbar, and G. Savaré, *Optimal transport, Cheeger energies and contractivity of dynamic transport distances in extended spaces*, To appear in Nonlinear Anal. Available at arXiv:1506.05932.

[6] L. Ambrosio, N. Gigli, A. Mondino, and T. Rajala, *Riemannian Ricci curvature lower bounds in metric measure spaces with σ-finite measure*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), 4661–4701.

[7] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, second ed., Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[8] ———, *Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below*, Invent. Math. **195** (2013), 289–391.

[9] ———, *Density of Lipschitz functions and equivalence of weak gradients in metric measure spaces*, Rev. Mat. Iberoam. **29** (2013), 969–996.

[10] ———, *Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below*, Duke Math. J. **163** (2014), 1405–1490.

[11] ———, *Bakry-Émery curvature-dimension condition and Riemannian Ricci curvature bounds*, Ann. Probab. **43** (2015), 339–404.

[12] L. Ambrosio and A. Mondino, *Gaussian-type isoperimetric inequalities in $RCD(K,\infty)$ probability spaces for positive K*, Preprint. Available at arxiv:1605.02852.

[13] L. Ambrosio, A. Mondino, and G. Savaré, *Nonlinear diffusion equations and curvature conditions in metric measure spaces*, Preprint. Available at arXiv:1509.07273.

[14] ———, *On the Bakry–Émery condition, the gradient estimates and the local-to-global property of metric measure spaces*, The Journal of Geometric Analysis **26** (2016), 24–56.

[15] L. Ambrosio, G. Savaré, and L. Zambotti, *Existence and stability for Fokker–Planck equations with log-concave reference measure*, Probab. Theory Related Fields **145** (2008), no. 3-4, 517–564.

[16] L. Ambrosio and D. Trevisan, *Well-posedness of Lagrangian flows and continuity equations in metric measure spaces*, Anal. PDE **7** (2014), 1179–1234.

[17] K. Bacher and K.-Th. Sturm, *Localization and tensorization properties of the curvature-dimension condition for metric measure spaces*, J. Funct. Anal. **259** (2010), no. 1, 28–56.

[18] D. Bakry, *On Sobolev and logarithmic Sobolev inequalities for Markov semigroups*, New trends in stochastic analysis (Charingworth, 1994), World Sci. Publ. River Edge, NJ, 1997, pp. 43–75.

[19] D. Bakry and M. Émery, *Diffusions hypercontractives*, Séminaire de probabilités, XIX, 1983/1984, Lecture notes in Mathematics, 1123, Springer, Berlin, 1985, pp. 177–206.

[20] D. Bakry, I. Gentil, and M. Ledoux, *Analysis and geometry of Markov diffusion operators*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 348, Springer, Cham, 2014.

[21] ———, *On Harnack inequalities and optimal transport*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. **14** (2015), 705–727.

[22] D. Bakry and M. Ledoux, *Lévy-Gromov's isoperimetric inequality for an infinite dimensional diffusion generator*, Invent. Math. **123** (1996), 259–281.

[23] ———, *A logarithmic Sobolev form of the Li-Yau parabolic inequality*, Rev. Mat. Iberoam. **22** (2006), no. 2, 683–702.

[24] F. Baudoin, *Stochastic analysis on sub-Riemannian manifolds with transverse symmetries*, To appear in Ann. Probab. Available at arXiv:1402.4490.

[25] ———, *Wasserstein contraction properties for hypoelliptic diffusions*, Preprint. Available at arXiv:1602.04177.

[26] F. Baudoin and N. Garofalo, *Curvature-dimension inequalities and Ricci lower bounds for sub-Riemannain manifolds with transverse symmetries*, To appear in J. Eur. Math. Soc. arXiv:1101.3590.

[27] F. Baudoin and D. J. Kelleher, *Poincaré duality, Bakry–Émery estimates and isoperimetry on fractals*, Preprint. Available at arXiv:1604.02520.

[28] F. Bauer, P. Horn, Y. Lin, G. Lipper, D. Mangoubi, and S.-T. Yau, *Li-Yau inequality on graphs*, J. Differential Geom. **99** (2015), 359–405.

[29] M. Beiglböck, M. Nutz, and N. Touzi, *Complete duality for martingale optimal transport on the line*, Preprint. Available at arXiv:1507.00671.

[30] R. J. Berman and M. Onnheim, *Propagation of chaos, Wasserstein gradient flows and toric Kahler-Einstein metrics*, Preprint. Available at arXiv:1501.07820.

[31] V. Bogachev, *Measure theory I,II*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

[32] F Bolley, *Separability and completeness for the Wasserstein distance*, Séminaire de probabilités XLI, Springer, Berlin, 2008, pp. 371–377.

[33] F. Bolley, I. Gentil, A. Guillin, and K. Kuwada, *Equivalence between dimensional contractions in Wasserstein distance and the curvature-dimension condition*, Preprint. Available at arXiv:1510.07793.

[34] A.-I. Bonciocat, *A rough curvature-dimension condition for metric measure spaces*, Cent. Eur. J. Math. **12** (2014), 362–380.

[35] N. Bouleau and F. Hirsch, *Dirichlet forms and analysis on Wiener space*, de Gruyter Studies in Mathematics, 14, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1991.

[36] D. Burago, Yu. Burago, and S. Ivanov, *A course in metric geometry*, Graduate studies in mathematics, 33, American mathematical society, Providence, RI, 2001.

[37] Yu. Burago, M. Gromov, and G. Perel'man, *A. D. Aleksandrov spaces with curvatures bounded below*, Russian Math. Surveys **47** (1992), no. 2, 1–58.

[38] P. Caputo, P. Dai Pra, and G. Posta, *Convex entropy decay via the Bochner–Bakry–Emery approach*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **45** (2009), 734–753.

[39] E. Carlen and J. Maas, *An analog of the 2-Wasserstein metric in non-commutative probability under which the fermionic Fokker-Planck equation is gradient flow for the entropy*, Comm. Math. Phys. **331** (2014), 887–926.

[40] J. A. Carrillo, R. J. McCann, and C. Villani, *Kinetic equilibration rates for granular media and related equations: entropy dissipation and mass transportation estimates*, Rev. Mat. Iberoam. **19** (2003), 971–1018.

[41] F. Cavalletti and M. Huesmann, *Existence and uniqueness of optimal transport maps*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **32** (2015), 1367–1377.

[42] F. Cavalletti and A. Mondino, *Measure rigidity of Ricci curvature lower bounds*, To appear in Adv. Math. Available at arXiv:1501.03338.

[43] ———, *Sharp and rigid isoperimetric inequalities in metric-measure spaces with lower Ricci curvature bounds*, Preprint. Available at arXiv:1502.06465.

[44] ———, *Sharp geometric and functional inequalities in metric measure spaces with lower Ricci curvature bounds*, To appear in Geom. Topol. Available at arXiv:1505.02061.

[45] F. Cavalletti and K.-Th. Sturm, *Local curvature-dimension condition implies measure-contraction property*, J. Funct. Anal. **262** (2012), no. 12, 5110–5127.

[46] S. Daneri and G. Savaré, *Eulerian calculus for the displacement convexity in the Wasserstein distance*, SIAM J. Math. Anal. **3** (2008), 1104–1122.

[47] A. Dembo, T. M. Cover, and J. Thomas, *Information-theoretic inequalities*, IEEE Trans. Inf. Theory **37** (1991), 1501–1518.

[48] J.-D. Deuschel and D. W. Stroock, *Large deviations*, Academic Press, Boston, 1989.

[49] A. Eberle, *Reflection couplings and contraction rates for diffusions*, To appear in Probab. Theory and Related Fields. Available at arXiv:1305.1233.

[50] N. Eldredge, *Gradient estimates for the subelliptic heat kernel on H-type groups*, J. Funct. Anal. **258** (2010), 504–533.

[51] M. Erbar, *A gradient flow approach to the Boltzmann equation*, Preprint. Available at arXiv.org:1603.00540.

[52] ———, *Gradient flow of the entropy for jump processes*, Preprint. Available at arXiv:1204.2190.

[53] ———, *The heat equation on manifolds as a gradient flow in the Wasserstein space*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **46** (2010), no. 1, 1–23.

[54] M. Erbar and M. Huesmann, *Curvature bounds for configuration spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations **54** (2015), 397–430.

[55] M. Erbar, K. Kuwada, and K.-Th. Sturm, *On the equivalence of the entropic curvature-dimension condition and Bochner's inequality on metric measure spaces*, Invent. Math. **201** (2015), no. 3, 993–1071.

[56] M. Erbar and J. Maas, *Ricci curvature of finite Markov chains via convexity of the entropy*, Arch. Ration. Mech. Anal. **206** (2012), 997–1038.

[57] S. Fang, J. Shao, and K.-Th. Sturm, *Wasserstein space over the wiener space*, Probab. Theory Related Fields **146** (2010), no. 3–4, 535–565.

[58] A. Fathi and A. Figalli, *Optimal transportation on non-compact manifolds*, Israel J. Math. **175** (2010), 1–59.

[59] M. Fathi, *A gradient flow approach to large deviations for diffusion processes*, To appear in J. Math. Pures Appl. Available at arXiv:1405.3910.

[60] ———, *The gradient flow approach to hydrodynamic limits for the simple exclusion process*, To appear in Particle Systems and Partial Differential equations III, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Available at arXiv:1507.06489.

[61] M. Fathi and J. Maas, *Entropic Ricci curvature bounds for discrete interacting systems*, Ann. Appl. Probab. **26** (2016), 1774–1806.

[62] A. Figalli and N. Gigli, *A new transportation distance between non-negative measures, with applications to gradients flows with Dirichlet boundary conditions*, J. Math. Pures Appl. (9) **94** (2010), 107–130.

[63] ———, *Local semiconvexity of Kantorovich potentials on non-compact manifolds*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **17** (2010), 648–653.

[64] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, second ed., de Gruyter Studies in Mathematics, 19, Walter de Gruyter & Co., Berlin/New York, 2011.

[65] N. Garofalo and A. Mondino, *Li-Yau and Harnack type inequalities in $RCD^*(K,N)$ metric measure spaces*, Nonlinear Anal. **95** (2014), 721–734.

[66] N. Ghoussoub, Y.-H. Kim, and T. Lim, *Structure of optimal martingale transport plans in general dimensions*, Preprint. Available at arXiv:1508.01806.

[67] N. Gigli, *Nonsmooth differential geometry - An approach tailored for spaces with Ricci curvature bounded from below*, Preprint. Available at arXiv:1407.0809.

[68] ———, *The splitting theorem in non-smooth context*, Preprint. Available at arXiv:1302.5555.

[69] ———, *On the heat flow on metric measure spaces: existence, uniqueness and stability*, Calc. Var. Partial Differential Equations **39** (2010), no. 1–2, 101–120.

[70] ———, *On the differential structure of metric measure spaces and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **236** (2015).

[71] N. Gigli and G. De Philippis, *From volume cone to metric cone in the nonsmooth setting*, Preprint. Available at arXiv:1512.03113.

[72] N. Gigli and B.-X. Han, *The continuity equation on metric measure spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations **53** (2015), 149–177.

[73] ———, *Independence on p of weak upper gradient on RCD spaces*, J. Funct. Anal. **271** (2016), 1–11.

[74] N. Gigli, K. Kuwada, and S. Ohta, *Heat flow on Alexandrov spaces*, Comm. Pure Appl. Math. **66** (2013), no. 3, 307–331.

[75] N. Gigli, A. Mondino, and T. Rajala, *Euclidean spaces as weak tangents of infinitesimally Hilbertian metric spaces with Ricci curvature bounded below*, Preprint. Available at arXiv:1304.5359.

[76] N. Gigli, A. Mondino, and G. Savaré, *Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows*, Proc. London Math. Soc. **111** (2015), 1071–1129.

[77] N. Gigli and E. Pasqualetto, *Behaviour of the reference measure on* RCD *spaces under charts*, Preprint. Available at arXiv:1607.05188.

[78] N. Gigli, T. Rajala, and K.-Th. Sturm, *Optimal maps and exponentiation on finite dimensional spaces with Ricci curvature bounded from below*, Preprint. Available at arXiv:1305.4849.

[79] N. Gozlan and C. Léonard, *Transport inequalities: A survey*, Markov Processes Relat. Fields **16** (2010), 635–736.

[80] N. Gozlan, C. Roberto, P.-M. Samson, and P. Tetali, *Displacement convexity of entropy and related inequalities on graphs*, Probab. Theory Related Fields **160** (2014), 47–94.

[81] A. Grigor'yan, *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999), no. 2, 135–249.

[82] ———, *Heat kernel and analysis on manifolds*, Amer. Math. Soc., 2009.

[83] E. Grong and A. Thalmaier, *Stochastic completeness and gradient representations for sub-Riemannian manifolds*, Preprint. Available at arXiv:1605.00785.

[84] B.-X. Han, *Conformal transformation on metric measure spaces*, Preprint. Available at arXiv:1511.03115.

[85] ———, *Ricci tensor on $rcd^*(k,n)$ spaces*, Preprint. Available at arXiv:1412.0441.

[86] R. Haslhofer and A. Naber, *Weak solutions for the Ricci flow I*, Prerpint. Available at arXiv:1504.00911.

[87] B. Hua, M. Kell, and C. Xia, *Harmonic functions on metric measure spaces*, Preprint. Available at arXiv:1308.3607.

[88] R. Jiang, *Cheeger-harmonic functions in metric measure spaces revisited*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 1373–1394.

[89] ———, *The Li-Yau inequality and heat kernels on metric measure spaces*, J. Math. Pures Appl. (9) **104** (2015), no. 1, 29–57.

[90] R. Jiang, H.-Q. Li, and H.-C. Zhang, *Heat kernel bounds on metric measure spaces and some applications*, Potential Anal. **44** (2016), no. 3, 601–627.

[91] R. Jiang and H.-C. Zhang, *Hamilton's gradient estimates and a monotonicity formula for heat flows on metric measure spaces*, Nonlinear Anal. **131** (2016), 32–47.

[92] R. Jordan, D. Kinderlehrer, and F. Otto, *The variational formulation of the Fokker-Planck equation*, SIAM J. Math. Anal. **29** (1998), no. 1, 1–17.

[93] N. Juillet, *Geometric inequalities and generalized Ricci bound on the Heisenberg group*, Int. Math. Res. Not. **2009** (2009), no. 13, 2347–2373.

[94] ———, *Diffusion by optimal transport on Heisenberg groups*, Calc. Var. Parital Differential Equations **50** (2014), 693–721.

[95] N. Kajino, *Analysis and geometry of the measurable Riemannian structure on the Sierpiński gasket*, Fractal Geometry and Dynamical Systems in Pure and Applied Mathematics I: Fractrals in Pure Mathematics, Contemp. Math. **600**, 2013.

[96] S. Keith, *Modulus and the Poincaré inequality on metric measure spaces*, Math. Z. **245** (2003), 255–292.

[97] S. Keith and K. Rajala, *A remark on Poincaré inequalities on metric measure spaces*, Math. Scand. **95** (2004), 299–304.

[98] M. Kell, *A Note on Lipschitz Continuity of Solutions of Poisson Equations in Metric Measure Spaces*, Preprint. Available at arXiv:1307.2224.

[99] ———, *q-heat flow and the gradient flow of the Renyi entropy in the p-Wasserstein space*, J. Funct. Anal. **271** (2016), no. 8, 2045–2089.

[100] M. Kell and A. Mondino, *On the volume measure of non-smooth spaces with Ricci curvature bounded below*, Preprint. Available at arXiv:1607.02036.

[101] C. Ketterer, *Evolution variational inequality and wasserstein control in variable curvature context*, Preprint. Available at arXiv:1509.02178.

[102] ———, *Lagrangian calculus for non-symmetric diffusion operators*, Preprint. Available at arXiv:1606.06837.

[103] ———, *On the geometry of metric measure spaces with variable curvature context*, Preprint. Available at arXiv:1506.03279.

[104] ———, *Ricci curvature bounds for warped products*, J. Funct. Anal. **265** (2013), 266–299.

[105] ———, *Cones over metric measure spaces and the maximal diameter theorem*, J. Math. Pures Appl. (9) **103** (2015), 1228–1275.

[106] ———, *Obata's rigidity theorem for metric measure spaces*, Anal. Geom. Metr. Spaces **3** (2015), 278–295.

[107] C. Ketterer and T. Rajala, *Failure of topological rigidity results for the measure contraction property*, Potential Anal. **42** (2015), 645–655.

[108] J. Kigami, *Hausdorff dimensions of self-similar sets and shortest path metrics*, J. Math. Soc. Japan **47** (1995), no. 3, 381–404.

[109] ———, *Analysis on fractals*, Cambridge Tracts in Mathematics, 143, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[110] Y. Kitabeppu, *A Bishop type inequality on metric measure spaces with Ricci curvature bounded below*, Preprint. Available at arXiv:1603.04162.

[111] Y. Kitabeppu and S. Lakzian, *Characterization of low dimensional $RCD^*(K,N)$ spaces*, To appear in Anal. Geom. Metr. Spaces. Available at arXiv:1505.00420.

[112] B. Klartag, *Needle decompositions in Riemannian geometry*, To appear in Mem. Amer. Math. Soc. Available at arXiv:1408.6322.

[113] E. Kokubo and K. Kuwae, *On spectral bounds for symmetric Markov chains with coarse Ricci curvatures*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **59** (2014), 123–155.

[114] A. Kolesnikov and E. Milman, *Poincaré and Brunn-Minkovski inequalities on weighted Riemannian manifolds with boundary*, Preprint. Available at arXiv:1310.2526.

[115] P. Koskela, Shanmugalingam N., and Y. Zhou, *Geometry and analysis of Dirichlet forms II*, J. Funct. Anal. **267** (2014), 2437–2477.

[116] P. Koskela and Y. Zhou, *Geometry and analysis of Dirichlet forms*, Adv. Math. **231** (2012), no. 5, 2755–2801.

[117] K. Kuwada, *Duality on gradient estimates and Wasserstein controls*, J. Funct. Anal. **258** (2010), no. 11, 3758–3774.

[118] ———, *Convergence of time-inhomogeneous geodesic random walks and its application to coupling methods*, Ann. Probab. **40** (2012), no. 5, 1945–1979.

[119] ———, *Gradient estimate for Markov kernels, Wasserstein control and Hopf-Lax formula*, Potential Theory and its Related Fields, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B43, 2013, pp. 61–80.

[120] ———, *A probabilistic approach to the maximal diameter theorem*, Math. Nachr. **286** (2013), no. 4, 374–378.

[121] ———, *Space-time Wasserstein controls and Bakry–Ledoux type gradient estimates*, Calc. Var. Partial Differential Equations **54** (2015), 127–161.

[122] K. Kuwada and K.-Th. Sturm, *Monotonicity of time-dependent transportation costs and coupling by reflection*, Potential Anal. **39** (2013), 231–263.

[123] S. Lakzian, *Characterization of equality in Zhong-Yang type (sharp) spectral gap estimates for metric measure spaces*, Preprint. Available at arXiv:1506.04936.

[124] M. Ledoux, *The geometry of Markov diffusion generators*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **9** (2000), no. 2, 305–366.

[125] M. Ledoux and I. Popescu, *Mass transportation proofs of free functional inequalities, and free Poincaré inequalities*, J. Funct. Anal. **257** (2009), 1175–1221.

[126] P. Lee, *Ricci curvature lower bounds on Sasakian manifolds*, Preprint. Available at arXiv:1511.09381.

[127] P. Lee and C. Li, *Bishop and Laplacian comparison theorems on Sasakian manifolds*, Preprint. Available at arXiv:1310.5322.

[128] P. Lee, C. Li, and I. Zelenko, *Measure contraction properties of contact sub-Riemannian manifolds with symmetry*, Preprint. Available at arXiv:1304.2658.

[129] C. Léonard, *On the convexity of the entropy along entropic interpolations*, Preprint. Available at arXiv:1310.1274.

[130] D. A. Levin, Y. Peres, and E. L. Wilmer, *Markov chains and mixing times*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[131] H.-Q. Li, *Dimension free Harnack inequalities on* $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ *spaces*, To appear in J. Theoret. Probab. Available at arXiv:1308.6129.

[132] S. Li, X.-D. Li, and Y.-X. Xie, *On the law of large numbers for the empirical measure process of generalized Dyson Brownian motion*, Preprint. Available at arXiv:1407.7234.

[133] X.-D. Li, *Perelman's entropy formula for the Witten Laplacian on Riemannian manifolds via Bakry–Emery Ricci curvature*, Math. Ann. **353** (2012), 403–437.

[134] S. Lisini, *Characterization of absolutely continuous curves in Wasserstein spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations **28** (2007), no. 1, 85–120.

[135] J. Lott and C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Ann. Math. **169** (2009), no. 3, 903–991.

[136] Z.-M. Ma and M. Röckner, *Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms*, Universitext, Springer-Verlag, 1992.

[137] J. Maas, *Gradient flow of the entropy for finite Markov chains*, J. Funct. Anal. **261** (2011), no. 8, 2250–2292.

[138] R. J. McCann, *Polar factorization of maps on Riemannian manifolds*, Geom. Funct. Anal. **11** (2001), 589–608.

[139] T. Melcher, *Hypoelliptic heat kernel inequalities on Lie groups*, Stochastic Process. Appl. **118** (2008), no. 3, 368–388.

[140] A. Mielke, *A gradient structure for reaction–diffusion systems and for energy-drift-diffusion systems*, Nonlinearity **24** (2011), 1329–1346.

[141] ———, *Geodesic convexity of the relative entropy in reversible Markov chains*, Car. Var. Partial Differential Equations **48** (2013), 1–31.

[142] A. Mondino and A. Naber, *Structure theory of metric-measure spaces with lower Ricci curvature bounds I*, Preprint: available at arXiv:1405.2222.

[143] A. Naber, *Characterizations of Bounded Ricci Curvature on Smooth and NonSmooth Spaces*, Preprint. Available at arXiv:1306.6512.

[144] A. Nemoto and H. Yoshida, *The free logarithmic Sobolev and the free transportation cost inequalities by time integrations*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **17** (2014), 1450022, 24pp.

[145] L. Ni, *Addenda to "The entropy formula for linear heat equation"*, J. Geom. Anal. **14** (2004), 369–374.

[146] ———, *The entropy formula for linear heat equation*, J. Geom. Anal. **14** (2004), 87–100.

[147] S. Ohta, *On the measure contraction property of metric measure spaces*, Comment. Math. Helv. **82** (2007), no. 4, 805–828.

[148] ———, *Products, cones, and suspensions of spaces with the measure contraction property*, J. Lond. Math. Soc. (2) **76** (2007), no. 1, 225–236.

[149] ———, *On the curvature and heat flow on Hamiltonian systems*, Anal. Geom. Metr. Spaces **2** (2014), 81–114.

[150] ———, *Ricci curvature, entropy and optimal trasnport*, Optimal Transportation (Cambridge), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **413**, Cambridge Univ. Press, 2014, pp. 145–199.

[151] ———, *(K,N)-convexity and the curvature-dimension condition for negative* N, J. Geom. Anal. **26** (2016), 2067–2096.

[152] S. Ohta and K.-Th. Sturm, *Heat flow on Finsler manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **62** (2009), 1386–1433.

[153] ———, *Non-contraction of heat flow on Minkowski spaces*, Arch. Ration. Mech. Anal. **204** (2012), 917–944.

[154] Y. Ollivier, *Ricci curvature of Markov chains on metric spaces*, J. Funct. Anal. **256** (2009), no. 3, 810–864.

[155] ———, *A visual introduction to Riemannian curvatures and some discrete generalizations*, Analysis and geometry of metric measure spaces (Providence, RI), CRM Proc. Lecture Notes, **56**, Amer. Math. Soc., 2013, pp. 197–220.

[156] F. Otto, *The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation*, Comm. Partial Differential Equations **26** (2001), no. 1–2, 101–174.

[157] F. Otto and C. Villani, *Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality*, J. Funct. Anal. **173** (2000), no. 2, 361–400.

[158] F. Otto and M. Westdickenberg, *Eulerian calculus for the contraction in the Wasserstein distance*, SIAM J. Math. Anal. **37** (2006), 1227–1255.

[159] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, **44**, Springer-Verlag, New York, 1983.

[160] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, Preprint. Available at arXiv:0710.3174.

[161] P. Petersen and G. Wei, *Analysis and geometry on manifolds with integral Ricci curvature bounds. II*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 2, 457–478.

[162] A. Petrunin, *Alexandrov meets Lott-Villani-Sturm*, Münster J. Math. **4** (2011), 53–64.

[163] A. Profeta, *The sharp Sobolev inequality on metric measure spaces with lower Ricci curvature bounds*, Potential Anal. **43** (2015), 513–529.

[164] T. Rajala, *Interpolated measures with bounded density in metric spaces satisfying the curvature-dimension conditions of Sturm*, J. Funct. Anal. **263** (2012), no. 4, 896–924.

[165] ———, *Failure of the local-to-global property for $CD(K,N)$ spaces*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. **16** (2016), 45–68.

[166] T. Rajala and K.-Th. Sturm, *Non-branching geodesics and optimal maps in strong CD(K,∞)-spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations **50** (2014), no. 3-4, 831–846.

[167] L. Rizzi, *Measure contraction properties of Carnot groups*, Preprint. Available at arXiv:1510.05960.

[168] G. Savaré, *Self-improvement of the Bakry-Émery condition and Wasserstein contraction of the heat flow in RCD(K,∞) metric measure spaces*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **34** (2014), no. 4, 1641–1661.

[169] K.-Th. Sturm, *Ricci tensor for diffusion operators and curvature-dimension inequalities under conformal transformations and time changes*, Preprint. Available at arXiv:1401.0687.

[170] ———, *Super-Ricci Flows for Metric Measure Spaces. I*, Preprint. Available at arXiv:1603.02193.

[171] ———, *Analysis on local Dirichlet spaces. III. The parabolic Harnack inequality*, J. Math. Pures. Appl.(9) **75** (1996), no. 3, 273–297.

[172] ———, *On the geometry of metric measure spaces. I,II*, Acta. Math. **196** (2006), no. 1, 65–177.

[173] ———, *Metric measure spaces with variable Ricci bounds and couplings of Brownian motions*, Festschrift Masatoshi Fukushima (Hackensack, NJ), Interdiscip. Math. Sci. **17**, World Sci. Publ., 2015, pp. 553–575.

[174] K. Suzuki, *Convergence of Brownian motions on* $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ *spaces*, Preprint. Available at arXiv:1603.08622.

[175] ———, *Convergence of Brownian motions on* $\mathrm{RCD}^*(K,N)$ *spaces*, Preprint. Available at arXiv:1509.02025.

[176] P. Topping, *$\mathcal{L}$-optimal transportation for Ricci flow*, J. Reine Angew. Math. **636** (2009), 93–122.

[177] L. Veysseire, *A harmonic mean bound for the spectral gap of the Laplacian on Riemannian manifolds*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **348** (2010), 1319–1322.

[178] C. Villani, *Topics in optimal transportations*, Graduate studies in mathematics, 58, American mathematical society, Providence, RI, 2003.

[179] ———, *Optimal transport, old and new*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 338, Springer-Verlag, 2008.

[180] M.-K. von Renesse and K.-Th. Sturm, *Transport inequalities, gradient estimates, entropy and Ricci curvature*, Comm. Pure. Appl. Math. **58** (2005), no. 7, 923–940.

[181] 太田 慎一, 桑江 一洋, 桒田 和正, 塩谷 隆, 高津飛鳥, **最適輸送理論と *Ricci* 曲率**, 第 63 回 Encounter with Mathematics 講演予稿.
`http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH/EwM63resume.pdf` より入手可能.

[182] 太田 慎一, **確率測度の空間の幾何学**, 数学**第 63 巻** (2011), 21–42.

[183] ———, **フィンスラー多様体上の幾何解析**, 数学**第 64 巻** (2012), 337–356.

[184] 三上 敏夫, **確率力学としての最適輸送理論**, 数学**第 58 巻** (2006), 364–382.

[185] 本多 正平, ***Ricci* 曲率が有界な空間の構造**, 数学**第 67 巻** (2015), 154–178.