最適輸送理論，Riemann 的曲率次元条件と熱分布

桒田 和正 *

(東京工業大学 大学院理工学研究科)

1 導入

m 次元 (重みつき)Riemann 多様体において，「Ricci 曲率が K 以上，かつ，次元が N 以下」($K \in \mathbb{R}, N \in [m, \infty]$) という条件の特徴づけとその応用については，膨大な研究がある．標題にある「曲率次元条件」(curvature-dimension condition) は，最も広い意味として，そのような特徴づけを与える各条件を指す．本講演では，それらの各種条件のうち，熱分布 (熱方程式の解) によるものと，この 10 年くらいで急速に進展した最適輸送理論によるものの双方を紹介すると共に，それらの関係とそこからの応用および近年の更なる進展について扱う．

複数の特徴づけを考えることには，研究推進上幾つかの意義がある．ひとつには，各条件が持つ固有の特性によって，従来より理論の適用範囲を拡げることができる点があるだろう．「曲率次元条件」という言葉が初めて導入されたのは，80 年代半ばの D. Bakry と M. Émery による先駆的研究が最初であろう．そこでの定式化は，Bochner-Weitzenböck の公式を土台とした解析的なものであり，2 階楕円型 (自己共役) 微分作用素の言葉で条件が書けることにその特徴がある．そのような作用素は閉双線形形式 (特にエネルギー形式) に自然に対応するため，エネルギー形式が構築できる抽象的な枠組で理論が展開できる．特に $K > 0$ のときには，この理論を介して対数 Sobolev 不等式などの様々な関数不等式を導出することができる．実際に彼らの曲率次元条件は，無限次元空間を含む種々の設定での関数不等式へと応用されてきた．このように，曲率次元条件に関する研究は，その当初から，理論の適用範囲を拡げることを意識した形で展開されてきたと言える (Bakry-Émery 理論については，例えば [0] を参照).

一方で，K.-Th. Sturm [0] と J. Lott, C. Villani [0] らに与えられた曲率次元条件の最適輸送理論による定式化は，より幾何学的な問題意識に基づいたものと言える．その特性は，まず，記述に距離と参照測度 (Riemann 多様体であれば，Riemann 距離と体積測度) のみで定義が可能な点にある．結果として，多様体の構造を持つとは限らない測度距離空間に対しても理論が適用できる．更にこの条件の重要な点は，各種の空間の変形で安定なことにある．特に，同様の条件を (一定の K, N で) みたす Riemann 多様体列の測度 Gromov-Hausdorff 極限を対象として含む．そのため，J. Cheeger と T. Colding によって着手された，それら極限空間の解析 ([0] およびその参考文献を参照) への extrinsic な方向からの研究が可能になる．詳細は後述するが，熱分布はこれら 2 つの定式化の双方と関係する位置にあり，熱分布自身による曲率次元条件の特徴づけを介して，この 2 つのアプローチを結合することができる．そのような，異なる定式化の橋渡しを与える点も，複数の特徴づけを考えることの意義と言えよう．複数の手法を結合することで，それぞれの利点を同時に利用できることになり，より多角的な理論展開が可能となる．

複数の特徴づけを考えることの別の意義として，既存の条件 (あるいは前提) が成り立たない空間へと理論を拡張する際の足掛かりにできる点がある．幾何学的に重要な例としては，Finsler 多様体 ([0] およびその参考文献を参照)，劣 Riemann 多様体 ([0] をはじめとする，F. Baudoin と

*URL: `http://www.math.titech.ac.jp/~kuwada` e-mail: `kuwada@math.titech.ac.jp`

N. Garofalo およびその共同研究者らの一連の仕事)，あるいは離散空間 (グラフ) への理論の拡張 ([0] 以降，盛んに研究されている．ここでは個別に文献は挙げないが，離散空間では複数の定式化が提唱され，それらの間の関係がはっきりしないまま理論が進んでいる状況にあると言える) などがある．これらの結果は，通常の意味では Ricci 曲率が定義できないような空間であっても，空間の幾何学的特性に応じて条件を修正することによって，理論が (部分的に) 拡張されている．それらの枠組みでは，上で紹介したように複数の条件が結合するとは限らず (正確には，多くの場合，他の定式化が機能しないと判明しているわけではなく未解決問題として残されている)，上記の拡張でも，出発点とする条件は対象とする空間 (と動機) によって異なる．例えば Finsler 多様体では，下記定理 5 (iv) に相当する性質はそのままの形では成立しないことが知られている [0].

2　設定と基礎概念

$(X, d, \mathfrak{m})$ を測度距離空間とする．すなわち，(X, d) は完備可分な距離空間，$\mathfrak{m}$ は $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の Borel 測度で，各 $r > 0$, $x \in X$ で，$\mathfrak{m}(B_r(x)) < \infty$ とする ($B_r(x)$ は X の開距離球)．また簡単のため $\operatorname{supp}(\mathfrak{m}) = X$ とし，ある $c > 0$, $x_0 \in X$ で

$$\int_X \exp\left(-cd(x_0, x)^2\right) \mathfrak{m}(dx) < \infty \tag{I}$$

をみたすとする．更に，d は測地距離 (すなわち，各 $x, y \in X$ に対して $\gamma : [0, 1] \to X$ で，$\gamma_0 = x$, $\gamma_1 = y$, $d(\gamma_s, \gamma_t) = |s - t| d(x, y)$ をみたすもの (最短測地線) が取れる) と仮定する．$\mathcal{P}(X)$ を，X 上の Borel 確率測度全体が成す集合とする．また，$\int_X d(x_0, x)^2 \mu(dx) < \infty$ をみたす $\mu \in \mathcal{P}(X)$ の元全体を $\mathcal{P}_2(X)$ と書く．$\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$ に対して，$\pi \in \mathcal{P}(X \times X)$ が μ と ν のカップリングである，とは，任意の有界可測関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対して，

$$\int_{X\times X} f(x)\pi(dxdy) = \int_X f(x)\mu(dx), \quad \int_{X\times X} f(y)\pi(dxdy) = \int_X f(y)\nu(dy)$$

が成り立つこととする．また，$\mathcal{P}(X)$ 上の L^2-Wasserstein(擬) 距離 W_2 を，次で定義する：

$$W_2(\mu, \nu) := \inf\{\|d\|_{L^2(\pi)} \mid \pi \text{ は } \mu \text{ と } \nu \text{ のカップリング}\}.$$

μ, ν を土砂などの空間的な分布 ($\mu(A)$ を A にある土砂の総量とみる) とした場合，$W_2^2(\mu, \nu)$ は μ から ν へと土砂を移動させるのに要する輸送費用の最小値 (最適輸送費用) とみなせる (ただし，$x \in X$ から $y \in X$ へと unit mass を運搬する費用は $d(x, y)^2$ とする)．このとき $(\mathcal{P}_2(X), W_2)$ は完備可分距離空間になり，特に W_2 は測地距離になる．W_2-測地線については，この抽象的な枠組においても，更に詳しい記述ができる．$\mathrm{Geo}(X)$ を X 上 $[0, 1]$ でパラメトライズされた最短測地線の全体 (一様収束位相と，それに伴う Borel 集合族を考える) とし，$e_t : \mathrm{Geo}(X) \to X$ を $e_t(\gamma) := \gamma_t$ ($t \in [0, 1]$) とする．$(\mu_s)_{s\in[0,1]}$ が与えられたとき，$\Gamma \in \mathcal{P}(\mathrm{Geo}(X))$ であって，$(e_t)_\sharp \Gamma = \mu_t$ ($\sharp$ は，写像による測度の押し出し (pushforward) を表す)，かつ，各 $(e_s, e_t)_\sharp \Gamma$ が μ_s と μ_t の最適カップリング ($W_2(\mu_s, \mu_t)$ の minimizer) を与えるものが取れる [0]．この Γ を $(\mu_s)_{s\in[0,1]}$ の持ち上げという．このような Γ の存在から，最適輸送においては，個々の mass は底空間 X の最短測地線に沿って運搬されることが分かる．最適輸送理論に関する参観文献として [0, 0] を挙げておく．

この枠組では，熱分布の定義は勿論非自明である．既知の有効な定義は 2 つあり，以下では両方を紹介する．ひとつめは，古典的な変分法の見方で，Dirichlet エネルギー汎関数の L^2-空間における勾配流としての定義である．そのために，まずエネルギー汎関数を導入する ([0] の 4 章を参照).

定義 1 $f : X \to \mathbb{R}$ に対して，**局所 Lipschitz 定数** $|\nabla f| : X \to \mathbb{R}$ を

$$|\nabla f|(x) := \varlimsup_{y \to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} \left(= \lim_{r \downarrow 0} \sup_{y \in B_r(x) \setminus \{x\}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} \right)$$

で定める．また，**Cheeger 型 Dirichlet エネルギー汎関数** Ch を次で定める：

$$\mathsf{Ch}(f) := \frac{1}{2} \inf_{\substack{f_j \in \mathrm{Lip}(X) \\ f_j \to f \text{ in } L^2(\mathfrak{m})}} \varliminf_{j \to \infty} \int_X |\nabla f_j|^2 \, d\mathfrak{m}$$

(つまり，局所 Lipschitz 定数が定める Dirichlet エネルギーの relaxation)．また，Ch の有効領域 (effective domain) を，$D(\mathsf{Ch}) := \{ f \in L^2(\mathfrak{m}) \mid \mathsf{Ch}(f) < \infty \}$ とする．

Cheeger 型エネルギー汎関数の性質として，$f \in D(\mathsf{Ch})$ のとき，ある $L^2(\mathfrak{m})$ の元 $|\nabla f|_*$ で，

$$\mathsf{Ch}(f) = \frac{1}{2} \int_X |\nabla f|_*^2 \, d\mathfrak{m}$$

をみたすもの (f の **minimal relaxed gradient**) が存在する．$|\nabla f|_*$ は，Riemann 多様体上で関数の (Sobolev の意味での) 微分の絶対値が持つ様々な性質と類似の性質を持つ．更に，$|\nabla f|_*$ は，最適輸送理論と適合するよう定義された微分概念 (minimal weak upper gradient)$|\nabla f|_w$ と一致する．大まかに言うと，$\mathcal{P}_2(X)$ 内の “よい” 曲線 (例えば W_2-最短測地線)$(\mu_s)_{s \in [0,1]}$ の持ち上げ Γ に対して，

$$|f(\gamma_1) - f(\gamma_0)| \le \int_0^1 |\nabla f|_*(\gamma_s) |\dot{\gamma}_s| \, ds \quad \Gamma\text{-a.e. } \gamma$$

が成り立つ ([0] の 5,6 章を参照；右辺に然るべき意味がつくことも主張に含まれている)．これは，線積分に対する Stokes の定理 (の，不等式版) に相当する．最適輸送理論を，曲線概念を測度の空間へと拡張したものと見るのであれば，この評価は Sobolev の意味での微分概念に対しても，拡張された意味で線積分と類似の解析が展開可能になることを意味する．最適輸送理論に関連した解析ではしばしば輸送経路に沿った微分を考えるため，これは極めて重要な性質と言える．

Ch の持つ特性 (凸性，下半連続性) から，$L^2(\mathfrak{m})$ 上で Ch の勾配流が構成できる (例えば [0] の 1.4 節 (および，その参考文献) を参照)．初期条件 f に対して時刻 t での関数を対応させる写像を P_t と書き，**熱半群**と呼ぶ．また P_t の生成作用素 (Δ と書く) も，然るべき意味で定義できる．この定義では，一般には P_t も Δ も線形ではないことを注意しておく．一方この場合でも，P_t は各 $p \in [1, \infty]$ に対して L^p-空間上の縮小写像へと一意拡張される．また，仮定 I の下で総熱量は保存される．すなわち，$f \in L^1_+(\mathfrak{m})$ に対して $\|P_t f\|_{L^1(\mathfrak{m})} = \|f\|_{L^1(\mathfrak{m})}$.

定義 2 Ch が 2 次形式になる，すなわち，$\mathsf{Ch}(f+g) + \mathsf{Ch}(f-g) = 2(\mathsf{Ch}(f) + \mathsf{Ch}(g))$ をみたすとき，$(X, d, \mathfrak{m})$ は**無限小 Hilbert 的** (infinitesimally Hilbertian) である，という．

無限小 Hilbert 的な空間では，Ch は 2 次形式になり，$D(\mathsf{Ch})$ は $f \mapsto \sqrt{\|f\|^2_{L^2(\mathfrak{m})} + \mathsf{Ch}(f)}$ をノルムとして Hilbert 空間になる (一般に Banach 空間にはなっている)．このとき，双線形写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(\mathfrak{m}) \times L^2(\mathfrak{m}) \to L^1(\mathfrak{m})$ で，$\langle f, f \rangle = |\nabla f|_*^2$ をみたすものが自然に定まる．「無限小 Hilbert 的」という条件は，「接空間が内積空間になる」という特性を，接空間を定義せずに定めたものと言える．実際，Finsler 多様体が無限小 Hilbert 的になるのは Riemann 多様体のとき，かつ，そのときに限る．無限小 Hilbert 的な空間では，P_t および Δ は線形作用素になる．

相対エントロピー汎関数 Ent : $\mathcal{P}_2(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を次で定める：

$$\mathrm{Ent}(\mu) := \begin{cases} \displaystyle\int_X \rho \log \rho \, d\mathfrak{m}, & \mu \ll \mathfrak{m},\ \mu = \rho\mathfrak{m}, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

仮定 (I) の下，Ent は well-defined になる ($\mathfrak{m}$ が有限測度ならば，$\mathcal{P}_2(X)$ に制限する必要はない)．上では Ch による熱分布の定式化を与えたが，別の見方として，熱分布は $(\mathcal{P}_2(X), W_2)$ 上で Ent の勾配流とみなせる．これは Otto により導入された $(\mathcal{P}_2(X), W_2)$ 上の形式的 Riemann 構造において，発見的考察により提案された [0, 0]．その後，距離空間上の勾配流の理論を用いて「Ent の勾配流」の厳密な定式化が与えられ，様々な設定で上記の設定と適合する ($f \in L^2(\mathfrak{m})$ が確率密度関数のとき，$P_t f$ が f を初期条件とする Ent の勾配流になる) ことが厳密に証明された ([0, 0, 0] および，その参考文献を参照)．

距離空間上の勾配流には複数の定式化があり，解の存在や一意性が問題になる．特に本講演で紹介する定式化では，その解の存在そのものが広い意味での曲率次元条件になっている．

3　主結果

$\kappa \in \mathbb{R}$ に対して $\mathfrak{s}_\kappa(\theta) := \sin(\sqrt{\kappa}\theta)/\sqrt{\kappa}$ とおく ($\kappa < 0$ のときも，sin を複素関数と見れば実数値関数になる；$\kappa = 0$ のときは極限で定義)．

定義 3 (Y, d_Y) を距離空間で，d_Y は測地距離とする．Y 上の関数 V に対し，$V_N := \exp(-\frac{1}{N}V)$ とおく．V が (K,N)**-凸**である，とは，各 $x, y \in Y$ に対して最短測地線 $\gamma : [0,1] \to Y$ で，$\gamma_0 = x$, $\gamma_1 = y$ かつ次が成り立つものが存在することをいう：

$$V_N(\gamma_t) \geq \frac{\mathfrak{s}_{K/N}((1-t)d_Y(x,y))}{\mathfrak{s}_{K/N}(d_Y(x,y))} V_N(x) + \frac{\mathfrak{s}_{K/N}(t d_Y(x,y))}{\mathfrak{s}_{K/N}(d_Y(x,y))} V_N(y). \tag{凸}$$

また，$(X, d, \mathfrak{m})$ が (K,N)-**エントロピー的曲率次元条件** *(以下* $\mathit{CD}^e(K,N)$ *と書く)* をみたす，とは，Ent が $(\mathcal{P}_2(X), W_2)$ 上で (K,N)-凸であることをいう．

式 (凸) は，微分不等式 $\partial_t^2 V_N(\gamma_t) \leq -\frac{K}{N} d(x,y)^2 V_N(\gamma_t)$ の積分形と言える．実際，右辺を $\Psi(t)$ とおくと，$\Psi(i) = V_N(\gamma_i)$ $(i = 0, 1)$ および $\Psi''(t) = -\frac{K}{N} d(x,y)^2 \Psi(t)$ をみたすので，上の式は 2 階常微分方程式の比較定理の形をしている．特に Y が Riemann 多様体，d_Y が Riemann 距離で $V \in C^2(Y)$ ならば，V が (K,N)-凸であるのは，$\mathrm{Hess}\, V - \frac{1}{N}\nabla V \otimes \nabla V \geq K$ のとき，かつそのときに限る．

定理 4 以下は同値 [0, Theorem 3.17]：

(i) $(X, d, \mathfrak{m})$ は無限小 Hilbert 的で，**簡約曲率次元条件** $\mathsf{CD}^*(K,N)$ が成り立つ (定義は [0] 参照)．

(ii) $(X, d, \mathfrak{m})$ は無限小 Hilbert 的で，$\mathsf{CD}^e(K,N)$ が成り立つ．

(iii) 各 $\mu \in \mathcal{P}_2(X)$, $\mathrm{Ent}(\mu) < \infty$ に対して，$\mu_0 = \mu$ をみたす絶対連続曲線 $\mu_t \in \mathcal{P}_2(X)$ $(t \geq 0)$ で，次をみたすものが存在する：各 $\nu \in \mathcal{P}_2(X)$ に対して，

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{s}_{K/N}^2\left(\frac{1}{2}W_2(\mu_t, \nu)\right) + K\mathfrak{s}_{K/N}^2\left(\frac{1}{2}W_2(\mu_t, \nu)\right) \leq \frac{N}{2}\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{N}(\mathrm{Ent}(\nu) - \mathrm{Ent}(\mu_t))\right)\right)$$

((K,N)-**発展変分不等式 (evolution variational inequality)**．(以下 $\mathsf{EVI}(K,N)$ と書く))．

更に，(i)–(iii) が成り立つとき，(iii) で $\mu_0=\rho_0\mathfrak{m}$, $\rho_0\in L^2(\mathfrak{m})$ とすると，$\mu_t=(P_t\rho_0)\mathfrak{m}$ が成り立つ．

測度距離空間上で最適輸送理論を用いて曲率次元条件を定式化しようとする試みでは，Ent の (K,∞)-凸性がまず最初に登場し，$N<\infty$ の場合の定式化には別の汎関数 (Rényi エントロピー) が用いられた [0] ([0] も参照のこと)．その後，当初の条件を少し弱めて幾何的な安定性を導く目的で，K. Bacher と Sturm によって簡約曲率次元条件が導入された [0]．一方，$\mathsf{CD}^e(K,N)$ 条件は $N<\infty$ の場合も含めて Ent のみで記述される点にその特徴がある．この定式化により，熱分布の特性と接点が生じる．実際，上記のように熱分布は Ent の勾配流とみなせるため，$\mathsf{CD}^e(K,N)$ 条件は勾配流のポテンシャル関数に対する凸性の条件と解釈できる．Riemann 多様体では，これらの曲率次元条件は「輸送経路に沿って体積要素がどう変化するか」を調べた結果の積分形と解釈できる．その評価および積分の仕方によって条件に違いが生じる．

ここで，$\mathsf{EVI}(K,N)$ は Ent の勾配流の定式化になっている [0, 0, 0]．このことは発見的考察からも確認できる．その意味で定理 4 の (i)⇒(ii) は自然と言える．また，定理 4 の最後の結果から，実際に $\mathsf{EVI}(K,N)$ の解 μ_t が Ch の勾配流と対応していると分かる．なお，定理 4 から分かるように，$\mathsf{EVI}(K,N)$ は熱分布の勾配流の定式化としては極めて制約の強いものであり，ポテンシャル関数 Ent の (K,N)-凸性と，熱分布の線形性を情報として含んでいる．

定理 4(i)–(iii) が成り立つとき「$(X,d,\mathfrak{m})$ は **Riemann 的曲率次元条件**をみたす」という (この条件を $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ と書く)．$N=\infty$ では，当初の曲率次元条件と $\mathsf{CD}^*(K,\infty)$, $\mathsf{CD}^e(K,\infty)$ は全て一致する．なお，$\mathsf{RCD}^*(K,N)$ 条件は測度 Gromov-Hausdorff 収束の下で安定だが，その証明には $\mathsf{EVI}(K,N)$ を用いる [0, 0, 0, 0]．この点で，$\mathsf{EVI}(K,N)$ は幾何学的にも重要な条件と言える (「無限小 Hilbert 的」は，それ単独では，測度 Gromov-Hausdorff 収束の下で安定ではない)．

定理 5 (1) $(X,d,\mathfrak{m})$ は $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ をみたすとする．このとき，各 $f\in D(\mathsf{Ch})$ で，$|\nabla f|_*\le 1$ $\mathfrak{m}$-a.e. であれば，f の代表元として Lipschitz 連続かつ Lipschitz 定数 1 以下のものが取れる．

(2) $(X,d,\mathfrak{m})$ は $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ をみたすとする．このとき以下が成り立つ：

(iv) 各 $f,g\in L^2(\mathfrak{m})$，$f\mathfrak{m},g\mathfrak{m}\in\mathcal{P}_2(X)$ と $t,s\ge 0$ に対して次が成立：

$$\mathfrak{s}_{K/N}^2\left(\frac{1}{2}W_2(P_tf\mathfrak{m},P_sg\mathfrak{m})\right)\le \mathrm{e}^{-K(s+t)}\mathfrak{s}_{K/N}^2\left(\frac{1}{2}W_2(f\mathfrak{m},g\mathfrak{m})\right)+\frac{N}{2}\frac{1-\mathrm{e}^{-K(s+t)}}{K(s+t)}\left(\sqrt{t}-\sqrt{s}\right)^2$$

(**時空間 W_2-拡大率評価** ($\mathsf{W}(K,N)$ と書く))．

(v) 各 $f\in D(\mathsf{Ch})$ と $t>0$ に対して，$C(t)=1+O(t)$ $(t\to 0)$ をみたす定数 $C(t)>0$ で，次をみたすものが存在する：

$$|\nabla P_tf|_*^2+\frac{2tC(t)}{N}|\Delta P_tf|^2\le \mathrm{e}^{-2Kt}P_t(|\nabla f|_*^2)\quad \mathfrak{m}\text{-a.e.},$$

(**Bakry-Ledoux の微分評価** ($\mathsf{G}(K,N)$ と書く))．

(vi) 各 $f\in D(\Delta)$，$\Delta f\in D(\mathsf{Ch})$ と各 $g\in D(\Delta)\cap L^\infty(\mathfrak{m})$，$g\ge 0$ $\Delta g\in L^\infty(\mathfrak{m})$ に対して，以下が成立：

$$\frac{1}{2}\int_X\Delta g|\nabla f|_*^2\,d\mathfrak{m}-\int_X g\langle\nabla f,\nabla\Delta f\rangle\,d\mathfrak{m}\ge K\int_X g|\nabla f|_*^2\,d\mathfrak{m}+\frac{1}{N}\int_X g(\Delta f)^2\,d\mathfrak{m}$$

(**弱 Bochner 不等式，または Bakry-Émery の曲率次元条件** ($\mathsf{BE}(K,N)$ と書く))．

(3) $(X,d,\mathfrak{m})$ は無限小 Hilbert 的，かつ，(1) の結論の条件が成り立つとする．このとき，(iv)-(vi) は全て同値．更に，(v) から (ii) が従う．

(1) は，Sobolev の意味での微分の評価が関数の (Lipschitz) 連続性を保証するものであり，(v) の微分評価と結合することで，熱半群 P_t の Lipschitz 正則化評価 (P_t が有界可測関数を Lipschitz 連続関数に写す) を導く．特に (iv) の評価では熱分布を測度として扱っており，測度の双対空間は連続関数の空間であるから，関数の連続性を保証する手段は理論を補完する上で重要と言える．(2) の条件のうち，(v) は (vi) の (t に関する) 積分形と解釈できる．また，(v) と (iv) の同値性は，直接的な議論で (つまり，他の条件を経由せず) 証明できる [0].

(vi) の条件は，g を試験関数として弱形式で書いているが，念頭にあるのは Bochner 不等式

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|_*^2 - \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle \geq K|\nabla f|_*^2 + \frac{1}{N}(\Delta f)^2$$

である．Riemann 多様体上であれば，この式は Bochner-Weitzenböck の公式

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 - \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle = \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \|\operatorname{Hess} f\|_{\mathrm{HS}}^2$$

から ($N = \dim X$ として) 直ちに従う．Riemann 幾何において，Bochner 不等式の有用性は広く認識されている．上の定理 4,5 の帰結として，同様の不等式が最適輸送で定式化された曲率次元条件と同値になることが分かる．勿論，空間が可微分構造を持っているわけではないので，Riemann 多様体上で Bochner 不等式から導けたことが全て自動的に従うわけではないが，それでも，測度距離空間の枠組へと多くの結果が拡張されている．拡張のために従来にない方法でこの不等式を利用するなど，本質的に新しいアイデアを含むものもある ([0, 0] 等).

L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré とその共同研究者らの一連の研究により，まず $N=\infty$ の場合に定理 4, 5 が示された [0, 0, 0, 0] (それ以前の歴史的経緯は省略した．これらの文献を参照のこと)．定理 5 (2)(3) で $N<\infty$ の場合は [0] による．$N=\infty$ の場合，定理 4 (iii) および定理 5 (iv) の条件は，それぞれ形式的に $N\to\infty$ として得られる以下の条件になる：

(iii)' $\displaystyle \frac{1}{2}\frac{d}{dt}W_2(\mu_t,\nu)^2 + \frac{K}{2}W_2(\mu_t,\nu)^2 \leq \mathrm{Ent}(\nu) - \mathrm{Ent}(\mu_t)$.

(iv)' $W_2(P_t f\mathfrak{m}, P_t g\mathfrak{m}) \leq \mathrm{e}^{-Kt}W_2(f\mathfrak{m}, g\mathfrak{m})$.

(v) の条件は，$N=\infty$ のときには，Bakry-Émery の微分評価と呼ばれる．なお，これら (i)–(vi) の条件は全て，K が小さく N が大きい方が弱い条件になると分かる．

定理 5 (2) の証明においては，「(iii) $\Rightarrow$ (iv)」が成立することが鍵になる．この意味で，熱分布は Sturm-Lott-Villani の曲率次元条件と Bakry-Émery の曲率次元条件を繋ぐ上で本質的な役割を果たしている．ただし，$N<\infty$ の場合には，熱分布の代わりに Rényi エントロピーの勾配流 (多孔媒質方程式) を用いて (i) から (vi) を導くやり方もある [0]．$\mathsf{CD}^*(K,N)$ 条件を基礎に据えると，多孔媒質方程式を用いる方が自然とも言える (定理 4 のあとのコメント参照).

例 6 X を m 次元完備 Riemann 多様体で $\partial X = \emptyset$，$V \in C^2(X)$ とする．このとき，d を Riemann 距離，$\mathfrak{m} = \mathrm{e}^{-V}\mathrm{vol}$ として測度距離空間 $(X,d,\mathfrak{m})$ が定まる．この場合，P_t は Witten Laplacian $\mathrm{e}^V \operatorname{div}(\mathrm{e}^{-V}\operatorname{grad})$ から生成される．このとき，定理 4, 5 の条件 (i)-(vi) は

$$\mathrm{Ric} + \operatorname{Hess} V - \frac{1}{N-m}\nabla V \otimes \nabla V \geq K$$

と同値．ただし $N \geq m$ で，$N=m$ は $V\equiv 0$ のときのみ許容される (その場合，この式は単に $\mathrm{Ric} \geq K$ を意味する)．$\mathrm{Ric}\equiv 0$ であれば，この条件は V の (K,N)-凸性に他ならない．

4　より詳しい性質 (特に，最近の進展)

基本的な幾何学的特性

繰り返し述べたように，RCD*(K, N) 条件は様々な幾何学的な操作で保たれる．測度 Gromov-Hausdorff 収束で条件が保存されること [0, 0, 0, 0] は既に述べた．空間の直積 (tensorization) では，Riemann 多様体での主張がそのまま成立する [0]．また，局所的に RCD*(K, N) 空間ならば全空間も RCD*(K, N) 空間である (From local to global property) [0]．これらの証明では「RCD*(K, N) 空間では測地線が本質的に不分岐になる」という性質 [0] が要になる．測地線が不分岐である，とは，「最短測地線 $\gamma^1, \gamma^2 : [0, 1] \to X$ がある $t \in (0, 1)$ で $\gamma^1|_{[0,t]} = \gamma^2|_{[0,t]}$ をみたせば，$\gamma^1 = \gamma^2$ になる」という性質を指す．W_2-測地線の持ち上げ Γ の下で分岐する測地線は測度 0 でしか登場しないとき，X 上で**測地線が本質的不分岐**であるという．Riemann 多様体や Alexandrov 空間では不分岐である．Riemann 多様体列の測度 Gromov-Hausdorff 極限では不分岐かどうか未解決である．分岐空間の代表例は ℓ^∞-空間である．分岐空間では Riemann 幾何での幾何学的直観に反する様々な反例があり (例えば [0, 0])，(本質的) 不分岐性がそれらの排斥に必要になる．

比較不等式

比較幾何学における多くの幾何学的 (関数) 不等式は，RCD*(K, N) 空間では精密な形で成立する．例えば, Bishop-Gromov の不等式や Bonnet-Myers の直径評価など [0]．また, 近年 B. Klartag [0] が導入した needle decomposition (問題を 1 次元に分解する) を測度距離空間に拡張することで，精密な (ある種の剛性をみたす) 等周不等式 (Lévy-Gromov の等周不等式を含む) [0]，Brunn-Minkowski 不等式の精密版，(X の直径や N を加味した) 対数 Sobolev 不等式あるいは p-Laplacian の第 1 固有値の比較定理 (剛性定理を含む；$p = 2$ の場合が Lichnerowicz-小畠の定理 (の拡張) に相当する) などが全て証明されている [0] (剛性定理では, 下記の結果 [0] を利用する)．$\mathrm{diam}(X) < \infty$, $K = 0$ の場合には Laplacian の第 1 固有値に関するより強力な剛性定理も成り立つ [0]．これらの結果のうち幾つかは，Riemann 多様体の測度 Gromov-Hausdorff 極限の場合にすら未知だったことを注意しておく．また，一部の主張は不分岐な CD*(K, N) 空間でも成立する．

RCD*(K, N) 空間の構造

Gigli によって，Bakry-Émery の曲率次元条件を用いて Cheeger-Gromoll の分解定理の拡張がこの枠組に拡張されている [0]．すなわち，RCD*$(0, N)$ 空間 ($N < \infty$) が直線 ($\mathbb{R}$ の等長埋込) を持つならば，空間は $\mathbb{R}$ と RCD*$(0, N-1)$ 空間の直積と (測度距離空間として) 同型になる．これを利用して，最大直径定理 [0] および小畠の定理 [0] が空間の特異性を加味した形で拡張された．また，Cheeger-Colding によって Riemann 多様体の極限で示されていた構造定理 (rectifiability) も，この枠組に拡張されている [0]．他には，Sturm や C. Ketterer による，空間概念の拡張 (K を変数にする等) に関する研究がある．更には，接空間 (等) を直接定義する代わりに「接空間に値を取る関数の空間」を定めることで，測度距離空間上でテンソル解析を展開する試みがある [0]．また，低次元 RCD*(K, N) 空間の分類に関するごく最近の研究として [0] を挙げておく．

調和解析とポテンシャル論

BE(K, N) を基礎に置く解析的な応用としては，種々の積分形の関数不等式 [0, 3.4 節] の他，Li-Yau の不等式 [0] や Cheng-Yau の微分評価，調和関数の正則性や多項式増大度を持つ調和関数の研究 ([0] とその参考文献参照) などが知られている．これらの成果は，BE(K, N) 条件の自動改良性を含む Bakry-Émery のより進んだ理論が適用可能なこと [0] が要になっていると言えよう．また，理論展開上，熱半群 P_t の平滑化作用 (L^∞-関数を Lipschitz にする等) が保証されている [0, 0] ことにより，P_t をある種の軟化子として使用できる点も重要である．

$\mathcal{W}$-**エントロピー**

Perelman の $\mathcal{W}$-エントロピーは，近年着目されている，熱分布が関係する汎関数である．Ricci 流の下での Perelman の $\mathcal{W}$-エントロピーの単調性については，その Riemann 多様体版についても一定の研究がある (例えば [0] とその参考文献を参照)．そこでは，$\mathcal{W}$-エントロピーの微分の直接計算 (エントロピー公式の導出) によって $\mathcal{W}$-エントロピーが時間について単調に減少することを示す，という手法で研究が展開されている．一方で，P. Topping および Lott による，最適輸送理論からのアプローチが知られている [0, 0]．後者の方法をなぞる (具体的には，定理 5 の条件 (iv) を用いる) ことで，RCD$^*(0,N)$ 空間でも，$\mathcal{W}$-エントロピーは単調減少することが分かる．このことに関係するいくつかの問題が考えられるが，それらはこの枠組では未解決である．例えば「Ric ≥ 0 をみたす Riemann 多様体では，$\mathcal{W}$-エントロピーが減少しなければ，空間はユークリッド空間と (測度距離空間として) 同型になる」という剛性定理は，従来はエントロピー公式から導出するため，全く異なる方法が必要になる．

参考文献

[1] L. Ambrosio, N. Gigli, A. Mondino and T. Rajala, *Riemannian Ricci curvature lower bounds in metric measure spaces with σ-finite measure.* Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015). 4661–4701.

[2] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures (second ed.). Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[3] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below.* Invent. Math. **195** (2013), 289–391.

[4] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below.* Duke Math. J. **163** (2014), 1405–1490.

[5] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Bakry–Émery curvature-dimension condition and Riemannian Ricci curvature bounds.* Ann. Probab. **43** (2015), 339–404.

[6] L. Ambrosio, A. Mondino, and G. Savaré. *Nonlinear diffusion equations and curvature conditions in metric measure spaces.* In preparation.

[7] K. Bacher and K.-Th. Sturm. *Localization and tensorization properties of the curvature-dimension condition for metric measure spaces.* J. Funct. Anal. **259**(1) (2010) 28–56.

[8] D. Bakry, I. Gentil and M. Ledoux, Analysis and geometry of Markov diffusion operators. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **348**, Springer, Cham, 2014.

[9] F. Baudoin and N. Garofalo, *Curvature-dimension inequalities and Ricci lower bounds for sub-Riemannian manifolds with transverse symmetries.* J. Eur. Math. Soc. (to appear). Available at arXiv:1101.3590.

[10] F. Cavalletti and K.-Th. Sturm, *Local curvature-dimension condition implies measure-contraction property.* J. Funct. Anal. **262** (2012) 5110–5127.

[11] F. Cavalletti and A. Mondino, *Sharp and rigid isoperimetric inequalities in metric-measure spaces with lower Ricci curvature bounds.* Preprint. Available at arXiv:1502.06465.

[12] F. Cavalletti and A. Mondino, *Sharp geometric and functional inequalities in metric measure spaces with lower Ricci curvature bounds.* Preprint. Available at arXiv:1505.02061.

[13] M. Erbar, K. Kuwada and K.-Th. Sturm, *On the Equivalence of the entropic curvature-dimension condition and Bochner's inequality on metric measure spaces.* Invent. Math. (to appear). Available at arXiv:1303.4382.

[14] N. Gigli, *The splitting theorem in non-smooth context.* Available at arXiv:1302.5555.

[15] N. Gigli, *Nonsmooth differential geometry – An approach tailored for spaces with Ricci curvature bounded from below.* Available at arXiv:1407.0809.

[16] N. Gigli, A. Mondino and and G. Savaré, *Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows.* Preprint. Available at arXiv:1311.4907.

[17] B. Hua, M. Kell and C. Xia, *Harmonic functions on metric measure spaces* Preprint. Available at: arXiv:1368.3607.

[18] R. Jiang, *The Li-Yau inequality and heat kernels on metric measure spaces.* J. Math. Pures Appl. **104** (2015) 29–57.

[19] C. Ketterer and T. Rajala, *Failure of topological rigidity results for the measure contraction property.* Potential Anal. **42** (2015) 645–655.

[20] C. Ketterer, *Cones over metric measure spaces and the maximal diameter theorem.* J. Math. Pures Appl. **103** (2015) 1228–1275.

[21] C. Ketterer, *Obata's rigidity theorem for metric measure spaces.* Available at arXiv:1410.5210.

[22] Y. Kitabeppu and S. Lakzian, *Characterization of Low Dimensional $RCD^*(K,N)$ spaces.* Preprint. Available at arXiv:1505.00420.

[23] B. Klartag, *Needle decomposition in Riemannian geometry.* Mem. Amer. Math. Soc. (to appear). Available at arXiv:1408.6322.

[24] K. Kuwada, *Space-time Wasserstein control and Bakry-Ledoux type gradient estimates.* Calc. Var. Partial Differential Equations (to appear). Available at arXiv:1308.5471.

[25] S. Lakzian *Characterization of equality in Zhong-Yang type (sharp) spectral gap estimates for metric measure spaces.* Preprint. Available at:arXiv:1506.04936.

[26] X.-D. Li, *Hamilton's Harnack inequality and the W-entropy formula on complete Riemannian manifolds.* Preprint. Available at arXiv:1303.1242.

[27] S. Lisini, *Characterization of absolutely continuous curves in Wasserstein spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations **28** (2007), no. 1, 85–120.

[28] J. Lott, *Optimal transport and Perelman's reduced volume.* Calc. Var. Partial Differential Equations **36** (2009), 49–84.

[29] J. Lott and C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport.* Ann. Math. (2), **169** (2009), 903–991.

[30] A. Mondino and A. Naber, *Structure theory of metric-measure spaces with lower Ricci curvature bounds I.* Preprint. Available at arXiv:1405.2222.

[31] S. Ohta and K.-Th. Sturm, *Non-contraction of heat flow on Minkowski spaces.* Arch. Ration. Mech. Anal. **204** (2012), 917–944.

[32] Y. Ollivier, *Ricci curvature of Markov chains on metric spaces.* J. Funct. Anal. **256** (2009), 810–864.

[33] F. Otto, *The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation.* Comm. Partial Differential Equations **26** (2001), 101–174.

[34] F. Otto and C. Villani, *Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality.* J. Funct. Anal. **173** (2000), 361–400.

[35] T. Rajala, *Failure of the local-to-global property for $CD(K,N)$ spaces.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa (to appear). Avaialble at arXiv:1305.6436.

[36] T. Rajala and K.-Th. Sturm, *Non-branching geodesics and optimal maps in strong $CD(K,\infty)$-spaces.* Calc. Var. Partial Differential Equations **50** (2014), 831–846.

[37] G. Savaré, *Self-improvement of the Bakry-Émery condition and Wasserstein contraction of the heat flow in RCD(K,∞) metric measure spaces*, Disc. Cont. Dyn. Syst. A **34** (2014) 1641–1661.

[38] K.-Th. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. I, II.* Acta Math. **196** (2006), 65–131, 133–177.

[39] P. Topping, *$\mathcal{L}$-optimal transportation for Ricci flow.* J. reine angew. Math. **636** (2009), 93–122.

[40] C. Villani, Topics in optimal transportation. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[41] C. Villani. Optimal transport, Old and new. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[42] 太田 慎一，フィンスラー多様体上の幾何解析．数学 第 64 巻 (2012), 337–356.

[43] 本多 正平，Ricci 曲率が有界な空間の構造．数学 第 67 巻 (2015), 154–178.