最適輸送理論と確率解析

桒田 和正

(東京工業大学大学院理工学研究科)

確率解析
2014 年 3 月 18 日 – 20 日 数理解析研究所

0. 楠岡先生との御縁

確率線積分族に対する LDP

[Kusuoka, K. & Tamura '10] (cf. [K. '06])

$(X_t)_{t\geq 0}$: 閉 Riemann 多様体上の Brown 運動

$$\bigstar \left(\left(\frac{1}{t} \int_{X[0,t]} \alpha \right)_{\alpha \in \mathcal{D}_{r,p}}, \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{X_s} ds \right) \text{は}$$

$t \to \infty$ で大偏差原理をみたす
& 速度関数の具体型

確率線積分族に対する LDP

[Kusuoka, K. & Tamura '10] (cf. [K. '06])

$(X_t)_{t\geq 0}$: 閉 Riemann 多様体上の Brown 運動

$$\bigstar \left(\left(\frac{1}{t} \int_{X[0,t]} \alpha \right)_{\alpha \in \mathcal{D}_{r,p}}, \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{X_s} ds \right) \text{は}$$

$t \to \infty$ で大偏差原理をみたす
& 速度関数の具体型

[Donsker & Varadan]	$\leftrightarrow$	0th-order perturbation
[KKT]	$\leftrightarrow$	1st order perturbation

確率線積分族に対する LDP

[Kusuoka, K. & Tamura '10] (cf. [K. '06])

$(X_t)_{t \geq 0}$: 閉 Riemann 多様体上の Brown 運動

★ $\left(\left(\frac{1}{t} \int_{X[0,t]} \alpha \right)_{\alpha \in \mathcal{D}_{r,p}}, \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{X_s} ds \right)$ は

$t \to \infty$ で大偏差原理をみたす

& 速度関数の具体型 (Fisher 情報量)

[Donsker & Varadan]	$\leftrightarrow$	0th-order perturbation
[KKT]	$\leftrightarrow$	1st order perturbation

確率線積分族に対する LDP

[Kusuoka, K. & Tamura '10] (cf. [K. '06])

$(X_t)_{t\geq 0}$: 閉 Riemann 多様体上の Brown 運動

$$\bigstar \left(\left(\frac{1}{t} \int_{X[0,t]} \alpha \right)_{\alpha \in \mathcal{D}_{r,p}}, \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{X_s} ds \right) \text{は}$$

$t \to \infty$ で大偏差原理をみたす

& 速度関数の具体型

[Donsker & Varadan]	$\leftrightarrow$	0th-order perturbation
[KKT]	$\leftrightarrow$	1st order perturbation

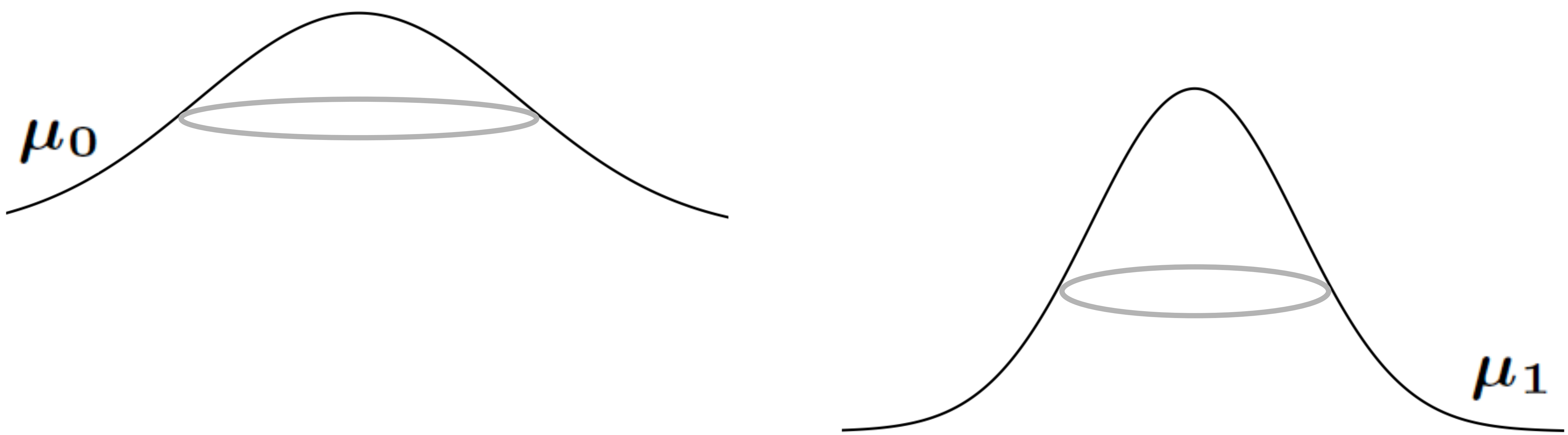
1. 最適輸送理論の (私的) 概観

最適輸送理論

$\boldsymbol{X_0}$, $\boldsymbol{X_1}$: ポーランド空間, $\boldsymbol{c : X_0 \times X_1 \to \bar{\mathbb{R}}}$

$\boldsymbol{\mu_i \in \mathcal{P}(X_i)}$, $\boldsymbol{\Pi(\mu_0, \mu_1)}$: カップリングの成す集合

$$\boldsymbol{\mathcal{T}_c(\mu_0, \mu_1) := \min_{\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)} \left\{ \int_{X_0 \times X_1} c(x, y) \pi(dxdy) \right\}}$$

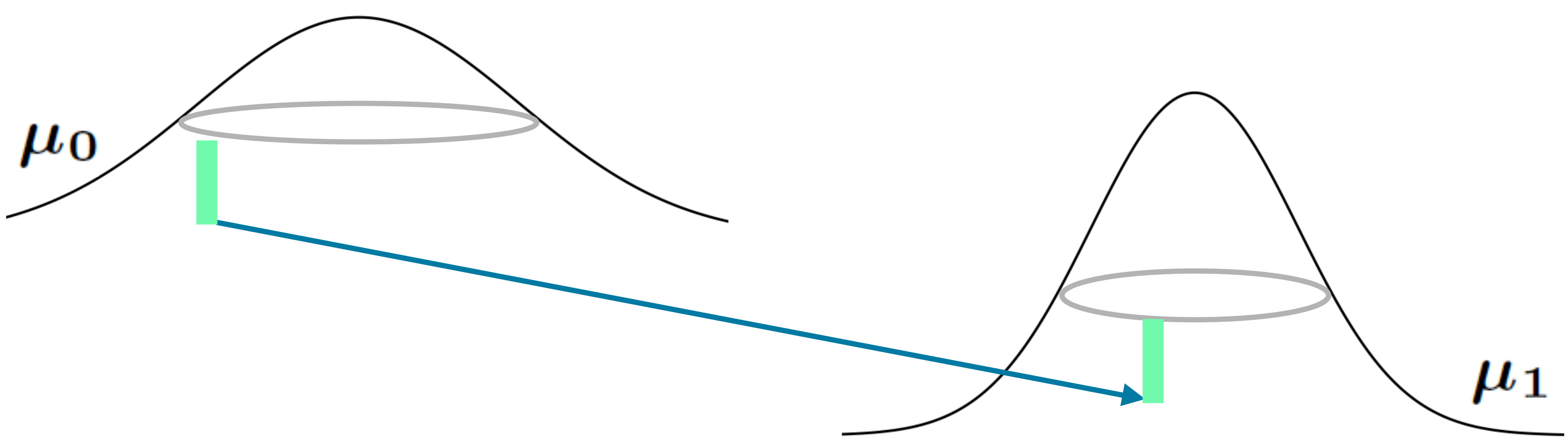


最適輸送理論

$\boldsymbol{X}_0$, $\boldsymbol{X}_1$: ポーランド空間，$\boldsymbol{c} : \boldsymbol{X}_0 \times \boldsymbol{X}_1 \to \bar{\mathbb{R}}$

$\boldsymbol{\mu}_i \in \mathcal{P}(\boldsymbol{X}_i)$，$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\mu}_1)$: カップリングの成す集合

$$\mathcal{T}_c(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\mu}_1) := \min_{\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)} \left\{ \int_{X_0 \times X_1} \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{dxdy}) \right\}$$

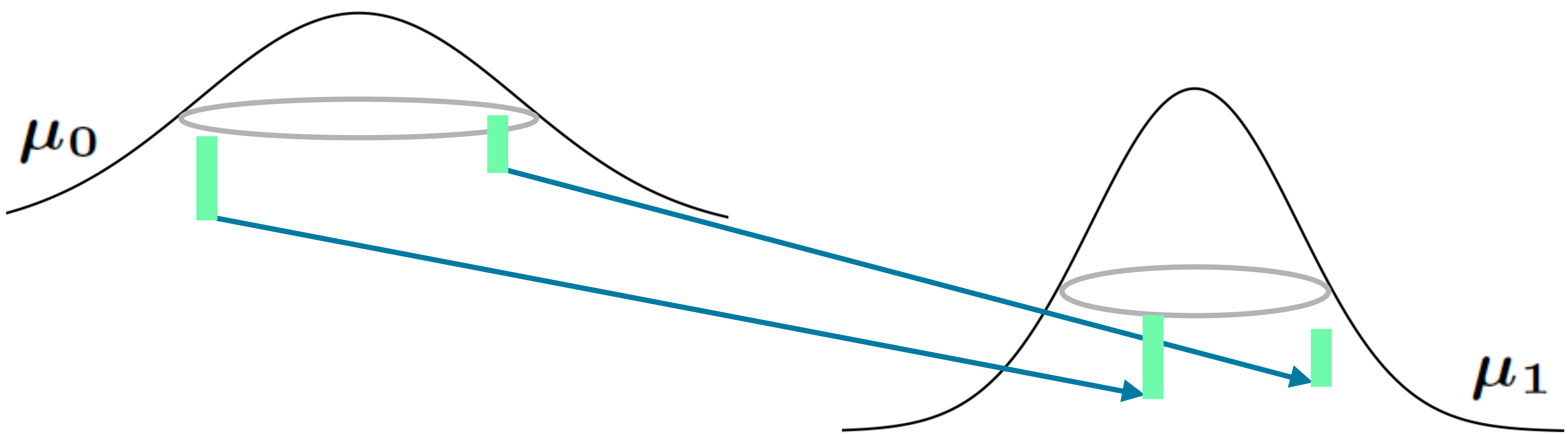


最適輸送理論

$\boldsymbol{X_0}$, $\boldsymbol{X_1}$: ポーランド空間,　$\boldsymbol{c : X_0 \times X_1 \to \bar{\mathbb{R}}}$

$\boldsymbol{\mu_i} \in \mathcal{P}(\boldsymbol{X_i})$,　$\boldsymbol{\Pi(\mu_0, \mu_1)}$: カップリングの成す集合

$$\mathcal{T}_c(\boldsymbol{\mu_0}, \boldsymbol{\mu_1}) := \min_{\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)} \left\{ \int_{X_0 \times X_1} \boldsymbol{c(x, y)\pi(dxdy)} \right\}$$

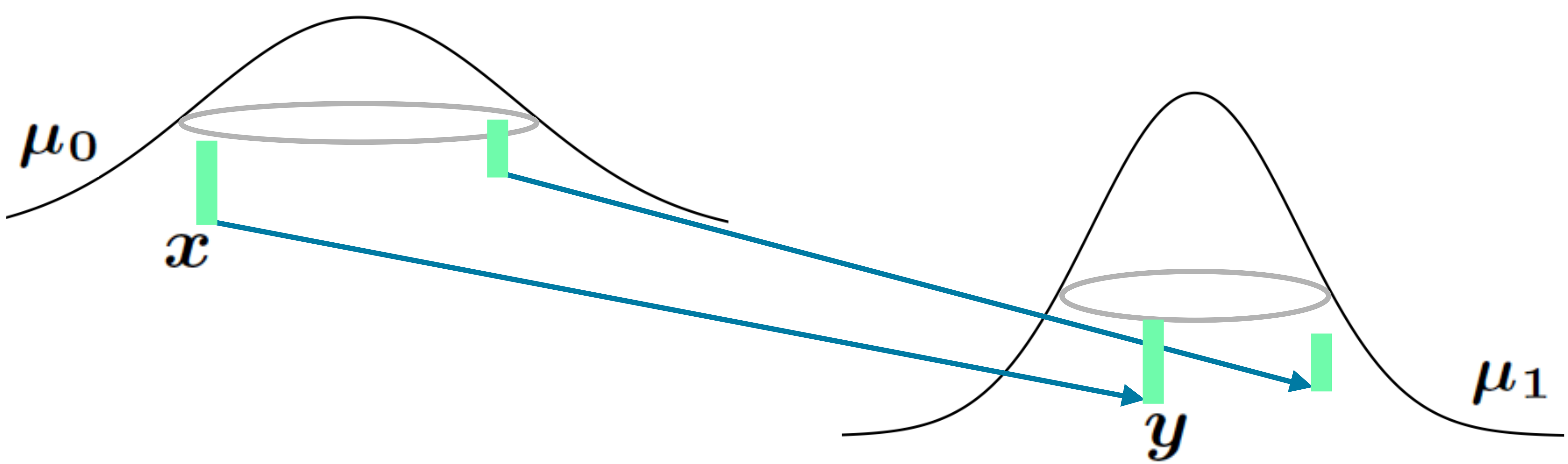


最適輸送理論

$\boldsymbol{X_0}$, $\boldsymbol{X_1}$: ポーランド空間, $\boldsymbol{c : X_0 \times X_1 \to \bar{\mathbb{R}}}$

$\boldsymbol{\mu_i \in \mathcal{P}(X_i)}$, $\boldsymbol{\Pi(\mu_0, \mu_1)}$: カップリングの成す集合

$$\boldsymbol{\mathcal{T}_c(\mu_0, \mu_1) := \min_{\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)} \left\{ \int_{X_0 \times X_1} c(x, y) \pi(dxdy) \right\}}$$

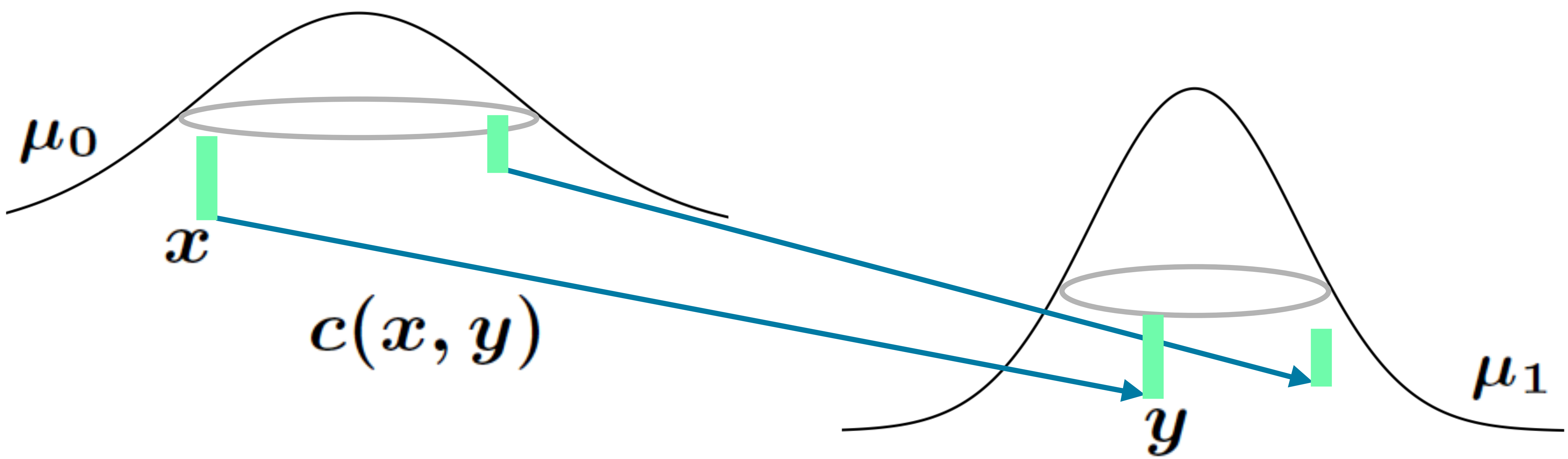


最適輸送理論

$\boldsymbol{X}_0$, $\boldsymbol{X}_1$: ポーランド空間, $\boldsymbol{c} : \boldsymbol{X}_0 \times \boldsymbol{X}_1 \to \bar{\mathbb{R}}$

$\boldsymbol{\mu}_i \in \mathcal{P}(\boldsymbol{X}_i)$, $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\mu}_1)$: カップリングの成す集合

$$\mathcal{T}_c(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\mu}_1) := \min_{\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)} \left\{ \int_{X_0 \times X_1} \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{dxdy}) \right\}$$



最適輸送理論

$\boldsymbol{X_0}$, $\boldsymbol{X_1}$: ポーランド空間, $\boldsymbol{c : X_0 \times X_1 \to \bar{\mathbb{R}}}$

$\boldsymbol{\mu_i \in \mathcal{P}(X_i)}$, $\boldsymbol{\Pi(\mu_0, \mu_1)}$: カップリングの成す集合

$$\boldsymbol{\mathcal{T}_c(\mu_0, \mu_1) := \min_{\pi \in \Pi(\mu_0,\mu_1)} \left\{ \int_{X_0 \times X_1} c(x,y)\pi(dxdy) \right\}}$$

<u>基本的な研究対象</u>

$\boldsymbol{\mathcal{T}_c(\mu_0, \mu_1)}$ および minimizer(s) の性質

(ある種の最小作用問題)

最適輸送理論

$\boldsymbol{X_0}$, $\boldsymbol{X_1}$: ポーランド空間, $\boldsymbol{c : X_0 \times X_1 \to \bar{\mathbb{R}}}$

$\boldsymbol{\mu_i \in \mathcal{P}(X_i)}$, $\boldsymbol{\Pi(\mu_0, \mu_1)}$: カップリングの成す集合

$$\boldsymbol{\mathcal{T}_c(\mu_0, \mu_1) := \min_{\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)} \left\{ \int_{X_0 \times X_1} c(x, y) \pi(dxdy) \right\}}$$

$\boldsymbol{X_0 = X_1}$, $\boldsymbol{p \in [1, \infty)}$, $\boldsymbol{d}$: $\boldsymbol{X_0}$ 上の距離

$\boldsymbol{W_p(\mu_0, \mu_1) := \mathcal{T}_{d^p}(\mu_0, \mu_1)^{1/p}}$: $\boldsymbol{L^p}$-Wasserstein 距離

最適輸送理論

$W_p(\mu_0, \mu_1) := \mathcal{T}_{d^p}(\mu_0, \mu_1)^{1/p}$: L^p-Wasserstein 距離

- 空間の幾何的特性を強く反映
  (e.g. d: 測地的 $\Rightarrow$ W_p: 測地的)
- 結合法／弱位相と相性が良い
- 双対公式 (Kantorovich 双対性) の存在,
  ($\leftrightsquigarrow$ Hamilton-Jacobi 方程式)
- Otto 解析に基づく，PDE との (形式的) 関連

Otto 解析

★ $\mathcal{P}(X)$ 上の，W_2 と整合する形式的 Riemann 構造

- $T_\mu \mathcal{P}(X) := \{\nabla \varphi \mid \varphi : X \to \mathbb{R}, \nabla \varphi \in L^2(\mu)\}$
- $\langle \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle_{T_\mu \mathcal{P}(X)} := \int_X \langle \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle d\mu$

Otto 解析

★ $\mathcal{P}(X)$ 上の，W_2 と整合する形式的 Riemann 構造

- $T_\mu \mathcal{P}(X) := \{\nabla\varphi \mid \varphi : X \to \mathbb{R}, \nabla\varphi \in L^2(\mu)\}$
- $\langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle_{T_\mu \mathcal{P}(X)} := \int_X \langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle d\mu$

★ $\mathcal{P}(X)$ 上の勾配曲線 $\leftrightarrow$ PDE の解

$$\dot{\mu}_t = -\nabla U(\mu_t)$$

[Otto '01]

Otto 解析

★ $\mathcal{P}(X)$ 上の，W_2 と整合する形式的 Riemann 構造

- $T_\mu\mathcal{P}(X) := \{\nabla\varphi \mid \varphi : X \to \mathbb{R}, \nabla\varphi \in L^2(\mu)\}$
- $\langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle_{T_\mu\mathcal{P}(X)} := \int_X \langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle d\mu$
- $\dot{\mu}_t = \nabla\varphi_t \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \partial_t \int_X f\, d\mu_t = \int_X \langle \nabla f, \nabla\varphi_t \rangle d\mu_t$

★ $\mathcal{P}(X)$ 上の勾配曲線 $\leftrightarrow$ PDE の解

$$\dot{\mu}_t = -\nabla U(\mu_t)$$

[Otto '01]

Otto解析

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}_t = -\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{U}(\boldsymbol{\mu}_t)$$

- $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\rho}\mathfrak{m}) = \int_X \boldsymbol{\rho} \log \boldsymbol{\rho} \, d\mathfrak{m}$

Otto解析

$\dot{\mu}_t = -\nabla U(\mu_t)$

- $U(\rho\mathfrak{m}) = \int_X \rho \log \rho \, d\mathfrak{m} \leftrightarrow \partial_t \rho_t = \Delta \rho_t$

Otto解析

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}_t = -\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{U}(\boldsymbol{\mu}_t)$$

- $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\rho}\mathfrak{m}) = \int_X \boldsymbol{\rho} \log \boldsymbol{\rho} \, d\mathfrak{m} \leftrightarrow \ \boldsymbol{\partial}_t \boldsymbol{\rho}_t = \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\rho}_t$

- $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\rho}\mathfrak{m}) = \dfrac{1}{\boldsymbol{n} - 1} \int_X \boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{n}} \, d\mathfrak{m}$

Otto解析

$$\dot{\mu}_t = -\nabla U(\mu_t)$$

- $U(\rho\mathfrak{m}) = \int_X \rho \log \rho \, d\mathfrak{m} \leftrightarrow \ \partial_t \rho_t = \Delta \rho_t$

- $U(\rho\mathfrak{m}) = \dfrac{1}{n-1} \int_X \rho^n \, d\mathfrak{m} \leftrightarrow \partial_t \rho_t = \Delta(\rho_t^n)$

Otto解析

$$\dot{\mu}_t = -\nabla U(\mu_t)$$

- $U(\rho\mathfrak{m}) = \int_X \rho \log \rho \, d\mathfrak{m} \leftrightarrow \ \partial_t \rho_t = \Delta \rho_t$

- $U(\rho\mathfrak{m}) = \frac{1}{n-1} \int_X \rho^n \, d\mathfrak{m} \leftrightarrow \partial_t \rho_t = \Delta(\rho_t^n)$

[cf. Ohta & Takatsu '11, '13]

Otto解析

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}_t = -\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{U}(\boldsymbol{\mu}_t)$$

- $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\rho}\mathfrak{m}) = \int_X \boldsymbol{\rho} \log \boldsymbol{\rho} \, d\mathfrak{m} \leftrightarrow \ \boldsymbol{\partial}_t \boldsymbol{\rho}_t = \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\rho}_t$
- $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\rho}\mathfrak{m}) = \dfrac{1}{\boldsymbol{n}-1} \int_X \boldsymbol{\rho}^n \, d\mathfrak{m} \leftrightarrow \boldsymbol{\partial}_t \boldsymbol{\rho}_t = \boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\rho}_t^n)$

  [cf. Ohta & Takatsu '11, '13]
- McKean-Vlasov eq.

Otto解析

$$\dot{\mu}_t = -\nabla U(\mu_t)$$

- $U(\rho\mathfrak{m}) = \int_X \rho \log \rho \, d\mathfrak{m} \leftrightarrow \ \partial_t \rho_t = \Delta \rho_t$
- $U(\rho\mathfrak{m}) = \dfrac{1}{n-1} \int_X \rho^n \, d\mathfrak{m} \leftrightarrow \partial_t \rho_t = \Delta(\rho_t^n)$

  [cf. Ohta & Takatsu '11, '13]
- McKean-Vlasov eq. ($\leftrightarrow$ Voiculescu's free entropy)

Otto解析

$$\dot{\mu}_t = -\nabla U(\mu_t)$$

- $U(\rho\mathfrak{m}) = \int_X \rho \log \rho \, d\mathfrak{m} \leftrightarrow \ \partial_t \rho_t = \Delta \rho_t$
- $U(\rho\mathfrak{m}) = \dfrac{1}{n-1} \int_X \rho^n \, d\mathfrak{m} \leftrightarrow \partial_t \rho_t = \Delta(\rho_t^n)$
  [cf. Ohta & Takatsu '11, '13]
- McKean-Vlasov eq. ($\leftrightarrow$ Voiculescu's free entropy)
- Keller-Segel

$\vdots$

Otto解析

$$\dot{\mu}_t = -\nabla U(\mu_t)$$

- $$U(\rho\mathfrak{m}) = \int_X \rho \log \rho \, d\mathfrak{m} \leftrightarrow \boxed{\partial_t \rho_t = \Delta \rho_t}$$
  $$(=: \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\rho\mathfrak{m}))$$
- $$U(\rho\mathfrak{m}) = \frac{1}{n-1}\int_X \rho^n \, d\mathfrak{m} \leftrightarrow \partial_t \rho_t = \Delta(\rho_t^n)$$
  [cf. Ohta & Takatsu '11, '13]
- McKean-Vlasov eq. ($\leftrightarrow$ Voiculescu's free entropy)
- Keller-Segel

$\vdots$

2. (確率) 解析との関連

Ricci 曲率と熱半群 P_t

X: 完備 Riem. mfd, $\mathfrak{m} = \mathrm{vol}$, $\partial X = \emptyset$, $K \in \mathbb{R}$

TFAE [von Renesse & Sturm '05]

(i) $\mathrm{Ric} \geq K$

(ii) "$\mathrm{Hess\,Ent} \geq K$" on $(\mathcal{P}(X), W_2)$

(iii) Given μ_0, $^\exists$sol. to "$\dot{\mu}_t = -\nabla \mathrm{Ent}(\mu_t)$" as K-EVI

(iv) $W_2(P_t^*\mu, P_t^*\nu) \leq \mathrm{e}^{-Kt} W_2(\mu, \nu)$

(v) $|\nabla P_t f|^2 \leq \mathrm{e}^{-2Kt} P_t(|\nabla f|^2)$

(vi) $\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 - \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle \geq K|\nabla f|^2$

Ricci 曲率と熱半群 P_t

$(X, d, \mathfrak{m})$: "よい" 測度距離空間, $K \in \mathbb{R}$

TFAE (**RCD**(K, ∞)) [Ambrosio, Gigli, Savaré et al.]

(i) $\mathrm{Ric} \geq K$

(ii) "$\mathrm{Hess}\,\mathrm{Ent} \geq K$" on $(\mathcal{P}(X), W_2)$

(iii) Given μ_0, $^\exists$sol. to "$\dot{\mu}_t = -\nabla\,\mathrm{Ent}(\mu_t)$" as K-EVI

(iv) $W_2(P_t^* \mu, P_t^* \nu) \leq \mathrm{e}^{-Kt} W_2(\mu, \nu)$

(v) $|\nabla P_t f|^2 \leq \mathrm{e}^{-2Kt} P_t(|\nabla f|^2)$

(vi) $\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 - \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle \geq K|\nabla f|^2$

Ricci 曲率と熱半群 P_t

$(X, d, \mathfrak{m})$: "よい" 測度距離空間, $K \in \mathbb{R}$

TFAE (**RCD**(K, ∞)) [Ambrosio, Gigli, Savaré et al.]

$\left.\begin{array}{l}\textbf{(ii)}\\ \textbf{(iii)}\end{array}\right\}$ 最適輸送理論
[Lott & Villani '09 / Sturm '06 / . . .]
[Ambrosio, Gigli & Savaré '05 / . . .]

(iv) $W_2(P_t^*\mu, P_t^*\nu) \le \mathrm{e}^{-Kt} W_2(\mu, \nu)$

$\left.\begin{array}{l}\textbf{(v)}\\ \textbf{(vi)}\end{array}\right\}$ Bakry-Émery 理論
[Bakry & Émery '85 / . . .]

拡張と応用

★ $\mathsf{RCD}(K,\infty)$

$\Rightarrow$ L^1-微分評価: $|\nabla P_t f| \le \mathrm{e}^{-Kt} P_t(|\nabla f|)$

[Savaré '13] (cf. [Bakry '85])

★ "$\mathrm{Ric} \ge K$ & $\dim \le N$" ($\mathsf{RCD}(K,N)$ 条件)

[Erbar, K. & Sturm]

応用

- 幾何的な空間操作の下での安定性
- P_t の Lipschitz 正則化 ($\Rightarrow$ 強 Feller)
- Riemann 幾何での結果の (精密な) 拡張

拡張と応用

★ **RCD**(K,∞)

$\Rightarrow L^1$-微分評価: $|\nabla P_t f| \le \mathrm{e}^{-Kt} P_t(|\nabla f|)$

[Savaré '13] (cf. [Bakry '85])

★ "$\mathrm{Ric} \ge K$ & $\dim \le N$" (**RCD**(K,N) 条件)

[Erbar, K. & Sturm]

<u>応用</u>

- 幾何的な空間操作の下での安定性
- P_t の Lipschitz 正則化 ($\Rightarrow$ 強 Feller)
- Riemann 幾何での結果の (精密な) 拡張

拡張と応用

Markov 連鎖／飛躍型過程と Ricci 曲率

- Markov 連鎖の W_p-評価による **RCD** 型条件
  [Ollivier / Veysseire / S.-T. Yau et al. /
  Jost et al. / Kuwae / Kitabeppu / . . .]
- Markov 連鎖への Otto 解析
  - 新 W_2 型距離と **RCD** 条件 [Maas et al. / Mielke]
  - Lévy 過程への拡張 [Erbar]
- グラフ上の最適輸送と **RCD** 型条件
  [Gozlan et al. / Hillion / Léonard / . . .]
  (確率論的アプローチ)

拡張と応用

Markov 連鎖／飛躍型過程と Ricci 曲率

- Markov 連鎖の $\boldsymbol{W_p}$-評価による **RCD** 型条件
  [Ollivier / Veysseire / S.-T. Yau et al. /
  Jost et al. / Kuwae / Kitabeppu / . . .]

- Markov 連鎖への Otto 解析
  - 新 $\boldsymbol{W_2}$ 型距離と **RCD** 条件 [Maas et al. / Mielke]
  - Lévy 過程への拡張 [Erbar]

- グラフ上の最適輸送と **RCD** 型条件
  [Gozlan et al. / Hillion / Léonard / . . .]
  (確率論的アプローチ)

拡張と応用

Markov 連鎖／飛躍型過程と Ricci 曲率

- Markov 連鎖の W_p-評価による **RCD** 型条件
  [Ollivier / Veysseire / S.-T. Yau et al. /
  Jost et al. / Kuwae / Kitabeppu / . . .]
- Markov 連鎖への Otto 解析
  - 新 W_2 型距離と **RCD** 条件 [Maas et al. / Mielke]
  - Lévy 過程への拡張 [Erbar]
- グラフ上の最適輸送と **RCD** 型条件
  [Gozlan et al. / Hillion / Léonard / . . .]
  (確率論的アプローチ)

拡張と応用

RCD ⇒ 関数不等式 $(K > 0 \ \& \ \mathfrak{m} \in \mathcal{P}(X))$

(HWI) $\mathrm{Ent}(\mu) \le W_2(\mu,\mathfrak{m})\sqrt{I(\mu)} - \frac{K}{2}W_2(\mu,\mathfrak{m})^2$

(LSI) $\mathrm{Ent}(\mu) \le \frac{1}{2K} I(\mu)$

(T_2) $W_2(\mu,\mathfrak{m})^2 \le \frac{2}{K}\mathrm{Ent}(\mu)$

(PI) $1 - \left(\int_X \sqrt{\rho}\, d\mathfrak{m}\right)^2 \le \frac{1}{4K} I(\rho\mathfrak{m})$

$$\left(I(\rho\mathfrak{m}) := \int_X \frac{|\nabla \rho|^2}{\rho} d\mathfrak{m} = |\nabla \mathrm{Ent}\,|^2(\rho\mathfrak{m}) \right)$$

拡張と応用

RCD $\Rightarrow$ 関数不等式 $(K > 0 \ \& \ \mathfrak{m} \in \mathcal{P}(X))$

(HWI) $\mathrm{Ent}(\mu) \le W_2(\mu, \mathfrak{m})\sqrt{I(\mu)} - \frac{K}{2} W_2(\mu, \mathfrak{m})^2$

(LSI) $\mathrm{Ent}(\mu) \le \frac{1}{2K} I(\mu)$

(T_2) $W_2(\mu, \mathfrak{m})^2 \le \frac{2}{K} \mathrm{Ent}(\mu)$

(PI) $1 - \left(\int_X \sqrt{\rho}\, d\mathfrak{m} \right)^2 \le \frac{1}{4K} I(\rho\mathfrak{m})$

$$\left(I(\rho\mathfrak{m}) := \int_X \frac{|\nabla \rho|^2}{\rho} d\mathfrak{m} = |\nabla \mathrm{Ent}\,|^2(\rho\mathfrak{m}) \right)$$

拡張と応用

RCD $\Rightarrow$ 関数不等式 $(K > 0 \ \& \ \mathfrak{m} \in \mathcal{P}(X))$

(HWI) $\mathrm{Ent}(\mu) \le W_2(\mu, \mathfrak{m})\sqrt{I(\mu)} - \dfrac{K}{2} W_2(\mu, \mathfrak{m})^2$

(LSI) $\mathrm{Ent}(\mu) \le \dfrac{1}{2K} I(\mu)$

(T_2) $W_2(\mu, \mathfrak{m})^2 \le \dfrac{2}{K} \mathrm{Ent}(\mu)$

(PI) $1 - \left(\int_X \sqrt{\rho} \, d\mathfrak{m} \right)^2 \le \dfrac{1}{4K} I(\rho\mathfrak{m})$

$$\left(I(\rho\mathfrak{m}) := \int_X \frac{|\nabla \rho|^2}{\rho} d\mathfrak{m} = |\nabla \mathrm{Ent}|^2(\rho\mathfrak{m}) \right)$$

拡張と応用

RCD ⇒ 関数不等式 $(K > 0 \;\&\; \mathfrak{m} \in \mathcal{P}(X))$

(HWI) $\mathrm{Ent}(\mu) \le W_2(\mu, \mathfrak{m})\sqrt{I(\mu)} - \frac{K}{2} W_2(\mu, \mathfrak{m})^2$

(LSI) $\mathrm{Ent}(\mu) \le \frac{1}{2K} I(\mu)$

(T_2) $W_2(\mu, \mathfrak{m})^2 \le \frac{2}{K} \mathrm{Ent}(\mu)$

(PI) $1 - \left(\int_X \sqrt{\rho}\, d\mathfrak{m} \right)^2 \le \frac{1}{4K} I(\rho \mathfrak{m})$

$$\left(I(\rho\mathfrak{m}) := \int_X \frac{|\nabla \rho|^2}{\rho} d\mathfrak{m} = |\nabla \mathrm{Ent}|^2 (\rho\mathfrak{m}) \right)$$

拡張と応用

(T_2) に関する最近の結果: $\boldsymbol{W_2(\mu, \mathfrak{m})^2 \le \dfrac{2}{K}\,\mathrm{Ent}(\mu)}$

- Dim.-free Gaussian concentration による特徴づけ
- (T_2) $\Leftrightarrow$ "restricted" (**LSI**)
  ($\Rightarrow$ (T_2) の，Holley-Stroock 型の安定性)
- $\mathrm{Ent} \rightsquigarrow I$ の不等式 ($\mathbf{W_2I}$)

$\vdots$

[Guillin / Gozlan / Gozlan & Léonard / . . .]

★ 確率論的手法に基づく議論 (e.g. LDP) が有用

拡張と応用

($\mathsf{T_2}$) に関する最近の結果: $\boldsymbol{W_2(\mu, \mathfrak{m})^2 \le \frac{2}{K}\,\mathrm{Ent}(\mu)}$

- Dim.-free Gaussian concentration による特徴づけ
- ($\mathsf{T_2}$) $\Leftrightarrow$ "restricted" (**LSI**)
  ($\Rightarrow$ ($\mathsf{T_2}$) の，Holley-Stroock 型の安定性)
- $\mathrm{Ent} \rightsquigarrow I$ の不等式 ($\mathsf{W_2 I}$)

$\vdots$

[Guillin / Gozlan / Gozlan & Léonard / . . .]

★ 確率論的手法に基づく議論 (e.g. LDP) が有用

拡張と応用

<u>(T_2) に関する最近の結果:</u> $\boldsymbol{W_2(\mu, \mathfrak{m})^2 \le \dfrac{2}{K}\,\mathrm{Ent}(\mu)}$

- Dim.-free Gaussian concentration による特徴づけ
- $(\mathsf{T}_2) \Leftrightarrow$ "restricted" (LSI)
  ($\Rightarrow$ (T_2) の，Holley-Stroock 型の安定性)
- $\mathbf{Ent} \rightsquigarrow \boldsymbol{I}$ の不等式 $(\mathsf{W_2 I})$

⋮

[Guillin / Gozlan / Gozlan & Léonard / . . .]

★ 確率論的手法に基づく議論 (e.g. LDP) が有用

その他の話題

- Martingale transport (e.g. [Beiglböck et al.])
- Multi-marginal problem (e.g. [Pass et al.])
- 粒子系 $\rightarrow (\mathcal{P}(X), W_2)$ 上の勾配曲線, & LDP

[Peletier et al.], e.g. [Adams, Dirr, Peletier & Zimmer]

[X.-D. Li et al.]: Dyson BMs $\rightarrow$ McKean-Vlasov eq.

その他の話題

- Martingale transport (e.g. [Beiglböck et al.])
- Multi-marginal problem (e.g. [Pass et al.])
- 粒子系 $\to$ $(\mathcal{P}(X), W_2)$ 上の勾配曲線, & LDP [Peletier et al.], e.g. [Adams, Dirr, Peletier & Zimmer] [X.-D. Li et al.]: Dyson BMs $\to$ McKean-Vlasov eq.

その他の話題

- Martingale transport (e.g. [Beiglböck et al.])
- Multi-marginal problem (e.g. [Pass et al.])
- 粒子系 $\to$ $(\mathcal{P}(X), W_2)$ 上の勾配曲線, & LDP

[Peletier et al.], e.g. [Adams, Dirr, Peletier & Zimmer]

[X.-D. Li et al.]: Dyson BMs $\to$ McKean-Vlasov eq.

3. 今後の展望

(1) 測度距離空間上の確率解析

★ **RCD** 条件をみたす空間

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{P_t} \leftrightarrow$ “canonical” 準正則 Dirichlet 形式

Q. 特異空間での確率微分幾何は？

- “比較定理” 型の主張は同じ形で成立 (と期待)
- 空間の特異性を反映する結果は？

Q. 分布 (Wasserstein 距離) の評価 $\Rightarrow$ 見本路の解析？

(1) 測度距離空間上の確率解析

★ **RCD** 条件をみたす空間

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{P_t}$ $\leftrightarrow$ "canonical" 準正則 Dirichlet 形式

Q. 特異空間での確率微分幾何は？

- "比較定理" 型の主張は同じ形で成立 (と期待)
- 空間の特異性を反映する結果は？

Q. 分布 (Wasserstein 距離) の評価 $\Rightarrow$ 見本路の解析？

(1) 測度距離空間上の確率解析

★ **RCD** 条件をみたす空間

$\Rightarrow$ $P_t \leftrightarrow$ "canonical" 準正則 Dirichlet 形式

Q. 特異空間での確率微分幾何は？

- "比較定理" 型の主張は同じ形で成立 (と期待)
- 空間の特異性を反映する結果は？

Q. 分布 (Wasserstein 距離) の評価 $\Rightarrow$ 見本路の解析？

(1) 測度距離空間上の確率解析

★ **RCD** 条件をみたす空間

$\Rightarrow \boldsymbol{P}_t \leftrightarrow$ "canonical" 準正則 Dirichlet 形式

Q. 特異空間での確率微分幾何は？

- "比較定理" 型の主張は同じ形で成立 (と期待)
- 空間の特異性を反映する結果は？

Q. 分布 (Wasserstein 距離) の評価 $\Rightarrow$ 見本路の解析？

(2) Ricci 曲率が下に非有界な場合

Q. 空間の特性に応じた，**RCD** 条件達の拡張

- 劣 Riemann 多様体 (or 準楕円型生成作用素) での Bakry-Émery 理論 [Baudoin, Garofalo et al. / . . .]
  $\rightsquigarrow$ 最適輸送理論との関係は？
- フラクタル上の最適輸送？
  ([Kajino]: $\mathbf{Ent}$ の **RCD** 条件不成立)
- 無限次元空間では？
  (e.g. [S. Fang et al.] ／ Wasserstein diffusion)

(2) Ricci 曲率が下に非有界な場合

Q. 空間の特性に応じた，**RCD** 条件達の拡張

- 劣 Riemann 多様体 (or 準楕円型生成作用素) での Bakry-Émery 理論 [Baudoin, Garofalo et al. / ...]
  $\rightsquigarrow$ 最適輸送理論との関係は？
- フラクタル上の最適輸送？
  ([Kajino]: $\mathbf{Ent}$ の **RCD** 条件不成立)
- 無限次元空間では？
  (e.g. [S. Fang et al.] ／ Wasserstein diffusion)

(2) Ricci 曲率が下に非有界な場合

Q. 空間の特性に応じた，**RCD** 条件達の拡張

- 劣 Riemann 多様体 (or 準楕円型生成作用素) での Bakry-Émery 理論 [Baudoin, Garofalo et al. / ...]
  $\rightsquigarrow$ 最適輸送理論との関係は？
- フラクタル上の最適輸送？
  ([Kajino]: $\mathbf{Ent}$ の **RCD** 条件不成立)
- 無限次元空間では？
  (e.g. [S. Fang et al.] ／ Wasserstein diffusion)

(2) Ricci 曲率が下に非有界な場合

Q. 空間の特性に応じた，**RCD** 条件達の拡張

- 劣 Riemann 多様体 (or 準楕円型生成作用素) での Bakry-Émery 理論 [Baudoin, Garofalo et al. / . . .]
  $\rightsquigarrow$ 最適輸送理論との関係は？
- フラクタル上の最適輸送？
  ([Kajino]: $\mathbf{Ent}$ の **RCD** 条件不成立)
- 無限次元空間では？
  (e.g. [S. Fang et al.] ／ Wasserstein diffusion)
- Q. $\boxed{z^{1/n} \text{ の Riemann 面達}}$, $\boxed{\log z \text{ の Riemann 面}}$ を，最適輸送 or 熱分布の挙動で区別できるか？
  また，$\boxed{\text{Walsh Brown 運動}}$ との対比では？

(3) 境界条件

Q. 境界条件下での，最適輸送と熱分布

- Neumann 条件下での，**RCD** 型条件の確率解析 (境界の形状に依存) [F.-Y. Wang]
  - $\rightsquigarrow$ 最適輸送理論で定式化できるか？
  - $\rightsquigarrow$ 測度距離空間への拡張？
- Dirichlet 境界条件 or 非保存的条件と 最適輸送／**RCD** 条件 ([Figalli & Gigli '10]: $\equiv 1$ の境界条件)

(3) 境界条件

Q. 境界条件下での，最適輸送と熱分布

- Neumann 条件下での，**RCD** 型条件の確率解析
  (境界の形状に依存) [F.-Y. Wang]
  $\rightsquigarrow$ 最適輸送理論で定式化できるか？
  $\rightsquigarrow$ 測度距離空間への拡張？

- Dirichlet 境界条件 or 非保存的条件と
  最適輸送／**RCD** 条件
  ([Figalli & Gigli '10]: $\equiv 1$ の境界条件)

(4) Process/Dirichlet 形式の変換

Q. 変換下での Otto 解析／**RCD** 条件の挙動は？
([Sturm]: Γ_2-条件 (vi) の解析)

- 従属操作 ／ (特異な) 時間変更
  $\rightsquigarrow$ 飛躍型過程と最適輸送
  - [K.'13]: 従属操作で W_2-評価 (iv) は "安定"
- h-変換 ／ Girsanov 変換
- Rough isometry

(4) Process/Dirichlet 形式の変換

Q. 変換下での Otto 解析／**RCD** 条件の挙動は？
([Sturm]: Γ_2-条件 (vi) の解析)

- 従属操作 ／ (特異な) 時間変更
  - $\rightsquigarrow$ 飛躍型過程と最適輸送
  - [K.'13]: 従属操作で W_2-評価 (iv) は "安定"
- h-変換 ／ Girsanov 変換
- Rough isometry

(4) Process/Dirichlet 形式の変換

Q. 変換下での Otto 解析／**RCD** 条件の挙動は？

([Sturm]: Γ_2-条件 (vi) の解析)

- 従属操作 ／ (特異な) 時間変更
  - $\rightsquigarrow$ 飛躍型過程と最適輸送
  - [K.'13]: 従属操作で W_2-評価 (iv) は "安定"
- h-変換 ／ Girsanov 変換
- Rough isometry

(4) Process/Dirichlet 形式の変換

Q. 変換下での Otto 解析／**RCD** 条件の挙動は？

([Sturm]: Γ_2-条件 (vi) の解析)

- 従属操作 ／ (特異な) 時間変更

  $\rightsquigarrow$ 飛躍型過程と最適輸送

  - [K.'13]: 従属操作で $\boldsymbol{W_2}$-評価 (iv) は "安定"

- h-変換 ／ Girsanov 変換
- Rough isometry

(4) Process/Dirichlet 形式の変換

Q. 変換下での Otto 解析／**RCD** 条件の挙動は？

([Sturm]: Γ_2-条件 (vi) の解析)

- 従属操作 ／ (特異な) 時間変更

  $\rightsquigarrow$ 飛躍型過程と最適輸送

  - [K.'13]: 従属操作で $\boldsymbol{W_2}$-評価 (iv) は "安定"

- $\boldsymbol{h}$-変換 ／ Girsanov 変換

- Rough isometry

(4) Process/Dirichlet 形式の変換

Q. 変換下での Otto 解析／**RCD** 条件の挙動は？

([Sturm]: Γ_2-条件 (vi) の解析)

- 従属操作 ／ (特異な) 時間変更
  $\rightsquigarrow$ 飛躍型過程と最適輸送
  - [K.'13]: 従属操作で W_2-評価 (iv) は "安定"
- h-変換 ／ Girsanov 変換
- Rough isometry

(5) ベクトル値の関数／測度の解析

Q. 多様体上, ベクトル値測度の最適輸送理論は？
また, テンソル値熱方程式との関係は？
ベクトル値関数の関数不等式？ [KKT] との関連？

Q. ベクトル値関数の解析を介する結果を
(別手法で) 特異空間上に拡張できるか？

(5) ベクトル値の関数／測度の解析

Q. 多様体上，ベクトル値測度の最適輸送理論は？
また，テンソル値熱方程式との関係は？
ベクトル値関数の関数不等式？ [KKT] との関連？

Q. ベクトル値関数の解析を介する結果を
(別手法で) 特異空間上に拡張できるか？

(6) 偏微分方程式族の “Universality”

- **RCD**(K,N) $(N<\infty)$ は,
  Porous medium eq. の解でも characterize 可能

  [Ambrosio, Savaré & Mondino]

- (**LSI**) $\Leftrightarrow$ 熱分布の Ent の指数減衰
  $\Leftrightarrow$ 熱半群の超縮約性

(6) 偏微分方程式族の “Universality”

- **RCD**(K, N) $(N < \infty)$ は,
  Porous medium eq. の解でも characterize 可能

  [Ambrosio, Savaré & Mondino]

- (**LSI**) $\Leftrightarrow$ 熱分布の $\mathbf{Ent}$ の指数減衰
  $\Leftrightarrow$ 熱半群の超縮約性

(6) 偏微分方程式族の **"Universality"**

- **RCD**(K, N) $(N < \infty)$ は,
  Porous medium eq. の解でも characterize 可能

  [Ambrosio, Savaré & Mondino]

- (**LSI**) $\Leftrightarrow$ 熱分布の $\mathbf{Ent}$ の指数減衰
  $\Leftrightarrow$ 熱半群の超縮約性
  $\Leftrightarrow$ Hamilton-Jacobi 半群の超縮約性

  [Bobkov, Gentil & Ledoux '01]

(6) 偏微分方程式族の “Universality”

- **RCD**(K, N) $(N < \infty)$ は,
  Porous medium eq. の解でも characterize 可能
  [Ambrosio, Savaré & Mondino]
- (**LSI**) $\Leftrightarrow$ 熱分布の $\mathbf{Ent}$ の指数減衰
  $\Leftrightarrow$ 熱半群の超縮約性
  $\Leftrightarrow$ Hamilton-Jacobi 半群の超縮約性
  [Bobkov, Gentil & Ledoux '01]

Q. 熱方程式での特性 $\Leftrightarrow$ 他の PDE での特性

は, どこまで, どのように成り立つか？
また, その説明 (特に確率論的な解釈) は？

(7) 平均RCD条件

★ **RCD**(K, N), $K > 0$

$\Rightarrow$ (W_2 での) 熱分布の定常分布への指数的収束

(7) 平均RCD条件

★ RCD(K,N), $K>0$

$\Rightarrow$ (W_2 での) 熱分布の定常分布への指数的収束

Q. 同様の結論を導く，より弱い(幾何的な)条件は？

(7) 平均 RCD 条件

★ **RCD**(K, N), $K > 0$

$\Rightarrow$ (W_2 での) 熱分布の定常分布への指数的収束

Q. 同様の結論を導く，より弱い (幾何的な) 条件は？

- 空間の直径の情報を加味？ (e.g. [Bakry & Qian])
- 曲率の空間平均？
  - [Veysseire '10]: Spec. gap 評価
  - 微分幾何的に意味あり [G.-F. Wei et al. / ...]

  $\rightsquigarrow$ 空間非一様 **RCD** 条件 (各点評価)？

(7) 平均 RCD 条件

★ **RCD**(K, N), $K > 0$

$\Rightarrow$ (W_2 での) 熱分布の定常分布への指数的収束

Q. 同様の結論を導く，より弱い (幾何的な) 条件は？

- 空間の直径の情報を加味？ (e.g. [Bakry & Qian])
- 曲率の空間平均？
  - [Veysseire '10]: Spec. gap 評価
  - 微分幾何的に意味あり [G.-F. Wei et al. / . . .]

$\leftrightsquigarrow$ 空間非一様 **RCD** 条件 (各点評価)？

(7) 平均 RCD 条件

★ RCD(K, N), $K > 0$
$\Rightarrow$ (W_2 での) 熱分布の定常分布への指数的収束

Q. 同様の結論を導く，より弱い (幾何的な) 条件は？

- 空間の直径の情報を加味？ (e.g. [Bakry & Qian])
- 曲率の空間平均？
  - [Veysseire '10]: Spec. gap 評価
  - 微分幾何的に意味あり [G.-F. Wei et al. / . . .]

$\leftrightsquigarrow$ 空間非一様 **RCD** 条件 (各点評価)？

(7) 平均 RCD 条件

★ RCD(K,N), $K>0$

$\Rightarrow$ (W_2 での) 熱分布の定常分布への指数的収束

Q. 同様の結論を導く，より弱い (幾何的な) 条件は？

- 空間の直径の情報を加味？ (e.g. [Bakry & Qian])
- 曲率の空間平均？
  - [Veysseire '10]: Spec. gap 評価
  - 微分幾何的に意味あり [G.-F. Wei et al. / . . .]

$\leftrightsquigarrow$ 空間非一様 **RCD** 条件 (各点評価)？

(7) 平均 RCD 条件

★ **RCD**(K, N), $K > 0$
$\Rightarrow$ (W_2 での) 熱分布の定常分布への指数的収束

Q. 同様の結論を導く，より弱い (幾何的な) 条件は？

- 空間の直径の情報を加味？ (e.g. [Bakry & Qian])
- 曲率の空間平均？
  - [Veysseire '10]: Spec. gap 評価
  - 微分幾何的に意味あり [G.-F. Wei et al. / . . .]

$\leftsquigarrow$ 空間非一様 **RCD** 条件 (各点評価)？

(8) その他 (自身の直近の課題)

Q. **RCD** 条件の修正版は？

- 非対称拡散過程 (e.g. (非退化)SDE の解)
  (非対称 Bakry-Émery 理論？ (cf. [K. '13]))
- 時間依存計量
  (e.g. 後進 Ricci 流と，$\mathcal{L}$-型距離)
  [Topping / Lott / K. et al. / . . .]

Q. 測度距離空間上での鏡映カップリングの実装
([K. & Sturm '13]: 最適輸送による定式化)

(8) その他 (自身の直近の課題)

Q. **RCD** 条件の修正版は？

- 非対称拡散過程 (e.g. (非退化)SDE の解)
  (非対称 Bakry-Émery 理論？　(cf. [K. '13]))
- 時間依存計量
  (e.g. 後進 Ricci 流と，$\mathcal{L}$-型距離)
  [Topping / Lott / K. et al. / ...]

Q. 測度距離空間上での鏡映カップリングの実装
([K. & Sturm '13]: 最適輸送による定式化)

(8) その他 (自身の直近の課題)

Q. **RCD** 条件の修正版は？

- 非対称拡散過程 (e.g. (非退化)SDE の解)
  (非対称 Bakry-Émery 理論？ (cf. [K. '13]))
- 時間依存計量
  (e.g. 後進 Ricci 流と，$\mathcal{L}$-型距離)
  [Topping / Lott / K. et al. / ...]

Q. 測度距離空間上での鏡映カップリングの実装
([K. & Sturm '13]: 最適輸送による定式化)

(8) その他 (自身の直近の課題)

Q. **RCD** 条件の修正版は？

- 非対称拡散過程 (e.g. (非退化)SDE の解)
  (非対称 Bakry-Émery 理論？ (cf. [K. '13]))
- 時間依存計量
  (e.g. 後進 Ricci 流と，$\mathcal{L}$-型距離)
  [Topping / Lott / K. et al. / ...]

Q. 測度距離空間上での鏡映カップリングの実装
([K. & Sturm '13]: 最適輸送による定式化)