最適輸送理論と確率解析

桒田 和正 [*]

(東京工業大学大学院理工学研究科)

最適輸送理論とは，ある確率測度を別の確率測度へと輸送する最適な方法を調べるものであり，最小作用原理を確率測度の成す空間へと拡張した問題と見ることができる．特に，輸送費用関数として状態空間上の距離の冪を用いると，自然に確率測度の空間上の距離が定まる (Wasserstein 距離)．この距離は，ある意味で確率測度の空間上へと距離を lift したものであり，状態空間の幾何学的構造を色濃く反映する．

確率測度の空間それ自体も，確率論・確率解析における基本的な研究対象であると言える (ここでは,「確率解析」という言葉は，想定しうる中で最も広い意味で用いている)．一方で，最適輸送理論と確率解析との相関はここに止まらない．とりわけ大きな転回点となったのは，Otto の仕事である．彼により，Wasserstein 距離に付随する形式的幾何構造に基づき，

「確率分布の時間発展として記述できる，(非線形) 発展方程式の解は
確率測度の空間上の適当なポテンシャル関数の勾配曲線とみなし得る」

という観点が導入された．その結果，様々な発見的考察 (と，その厳密化) が生み出された．例えば，確率解析と深いつながりを持つ熱方程式および (対称) 拡散方程式の解は，Boltzmann-Shannon エントロピー汎関数の勾配曲線とみなせる．

最適輸送理論は，解析学を中心とした広い分野へとその適用範囲を拡げてきている．特に確率解析との関係においては,

- エントロピー汎関数の勾配曲線が熱分布と一致することの，厳密な定式化と証明
- 「状態空間の Ricci 曲率が下に有界」という性質と熱分布の振る舞いとの関係
- 発展方程式の平衡状態への収束の早さを記述する関数不等式の研究

などの話題において，近年大きな進展があった．ここで「熱分布」とは，空間の構造から自然に定まる拡散方程式の (確率測度として実現された) 解を指す．例えば Wiener 空間では，Ornstein-Uhlenbeck 過程がこれに相当する．また，Ricci 曲率自体は Riemann 幾何の概念であるが,「Ricci 曲率が下に有界」という性質は，最適輸送理論を用いて，一般の測度距離空間へと拡張されている (Sturm / Lott & Villani)．この文脈では，この拡張された性質を指す．また，熱分布を用いた Ricci 曲率の下限の特徴付けとして，Bakry, Émery らによる一連の仕事を念頭に置いている．最後の関数不等式については，典型的には，対数 Sobolev 不等式や Talagrand の不等式，スペクトルギャップ不等式 (大域 Poincaré 不等式) 等を想定している．

この講演では，これらの話題について現状での到達点を俯瞰すると共に，この方面での今後の研究課題について，主観に基づき議論する．

[*]URL: http://www.math.titech.ac.jp/~kuwada/index.html e-mail: kuwada@math.titech.ac.jp