A probabilistic approach to the maximal diameter theorem

桒田 和正　(お茶の水女子大学)*

(M,g) を境界を持たない完備 n 次元 Riemann 多様体とし，$K>0$ とする．よく知られているように，Riemann 多様体において「Ricci 曲率 (以下 Ric と書く) の下限が K 以上」という条件は，空間の構造に以下のような強い制約をかける．

<u>定理</u> **1 (例えば [2] 参照)** (M,g) の Ricci 曲率が K 以上，すなわち，各接ベクトル $X\in TM$ に対して

$$\mathrm{Ric}(X,X)\geq Kg(X,X)$$

とする．このとき以下が成り立つ：

(1) **[Bonnet-Myers の定理]** M の直径 (2 点間の距離の上限；$\mathrm{diam}(M)$ と書く) は

$$\mathrm{diam}(M)\leq\pi\sqrt{\frac{n-1}{K}} \tag{$\dagger$}$$

をみたす．特に M はコンパクト．

(2) **[Cheng の最大直径定理]** $(\dagger)$ で等号が成立するのは，(M,g) が定数 $K/(n-1)$ の断面曲率を持つ n 次元球面に等距離同型のとき，かつ，そのときに限る．

本講演では，(M,g) 上の拡散過程の確率解析を用いた，これらの定理の拡張 (および，特別な場合としての別証明) を紹介する．

以下，Z を M 上の滑らかなベクトル場とし，$N\in\mathbb{R}$ を $N\geq n$ なるパラメータで，$Z\not\equiv 0$ のときは $N>n$ とする．このとき，Z と N に付随する Bakry-Émery Ricci テンソル Ric_Z^N を以下で定める：

$$\mathrm{Ric}_Z^N:=\mathrm{Ric}-(\nabla Z)^\flat-\frac{1}{N-n}Z\otimes Z.$$

ただし，$(\nabla Z)^\flat$ は ∇Z の対称化とする．Bakry-Émery Ricci テンソルは通常の Ricci 曲率の自然な拡張と考えられる．実際，「Ricci 曲率の下限が K 以上，空間の次元が N 以下」という条件の解析的定式化・拡張である Bakry-Émery の曲率次元条件：

$$\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(|\nabla f|^2)-2\langle\nabla f,\nabla\mathcal{L}f\rangle\right)\geq K|\nabla f|^2+\frac{1}{N}(\mathcal{L}f)^2$$

は，(Z,N)-Bakry-Émery Ricci テンソルの下限が K 以上，すなわち

$$\mathrm{Ric}_Z^N\geq Kg \tag{$\spadesuit$}$$

と同値なことが知られている (例えば [4] 参照)．

本研究は科研費 (課題番号:22740083) の助成を受けたものである。

* 〒112-8610 東京都文京区大塚 2-1-1　お茶の水女子大学 人間文化創成科学研究科
e-mail: kuwada.kazumasa@ocha.ac.jp
web: http://www.math.ocha.ac.jp/kuwada/jp.html

定理 **2 ([3])** 仮定 $(\spadesuit)$ の下，以下が成り立つ：

(1)

$$\mathrm{diam}(M) \leq \pi \sqrt{\frac{N-1}{K}}. \tag{$\ddagger$}$$

(2) $(\ddagger)$ で等号が成立するのは，「$Z \equiv 0,\ N = n$ かつ (M, g) が定数 $K/(n-1)$ の断面曲率を持つ n 次元球面に等距離同型」のとき，かつ，そのときに限る．

定理 2 の証明は，$\mathcal{L}$-拡散過程の定点からの距離 (動径過程) の解析による．特に，以下で述べる，距離関数への $\mathcal{L}$ の作用に関する Laplacian 比較定理の拡張が鍵になる：

補題 **3** $p \in M$ を定点とし，x は $d(p, \cdot)$ の特異点ではないとする．このとき，条件 $(\spadesuit)$ の下で以下が成り立つ：

$$(\mathcal{L}d(p, \cdot))(x) \leq \sqrt{K(N-1)} \cot \left(\sqrt{\frac{K}{N-1}} d(p, x) \right). \tag{$\bigstar$}$$

ここで，$(\bigstar)$ の右辺について，$d(p, x) \to \pi \sqrt{N - 1/K}$ で

$$\sqrt{K(N-1)} \cot \left(\sqrt{\frac{K}{N-1}} d(p, x) \right) = \frac{N-1}{d(p, x) - \pi \sqrt{(N-1)/K}} + o(1)$$

となることに注意しておく．

定理 1 には，(1)(2) それぞれの主張に対して，様々な拡張が知られている．例えば，

- 弱い仮定の下でのコンパクト性のみの導出 [5]
- 一般的な枠組みでの Bakry-Émery の曲率次元条件の下での，Sobolev の不等式による解析的アプローチ [1]
- 測度距離空間上での拡張された意味での Ricci 曲率の下限への拡張 [6]

など (ここで紹介した以外のものについては，例えば [3] の参考文献を参照)．定理 2 は，Z が勾配型 (または，$\mathcal{L}$ が対称化可能) の場合に限れば既知である (ただし，証明方法は異なる)．

参考文献

[1] D. Bakry and M. Ledoux. Sobolev inequalities and Myers's diameter theorem for an abstract Markov generator. *Duke Math. J.*, 85:253–270, 1996.

[2] I. Chavel. *Riemannian geometry: a modern introduction.* Cambridge tracts in mathematics, 108. Cambridge university press, Cambridge, 1993.

[3] K. Kuwada. A probabilistic approach to the maximal diameter theorem. Preprint. available at: http://www.math.ocha.ac.jp/kuwada/papers.html.

[4] M. Ledoux. The geometry of Markov diffusion generators. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 9(2):305–366, 2000.

[5] X.-M. Li and F.-Y. Wang. On the compactness of manifolds. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 6(suppl.):29–38, 2003.

[6] S. Ohta. Products, cones, and suspensions of spaces with the measure contraction property. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 76(1):225–236, 2007.