熱分布の結合法と曲率次元条件

桒田 和正　(お茶の水女子大学)*

1. 俯瞰

多様体上で (非退化な) 確率微分方程式の解を考えると，その拡散係数から Riemann 計量が定まる．Riemann 計量からは Laplace-Beltrami 作用素が定まり，元の確率微分方程式の解の生成作用素は Laplace-Beltrami 作用素と低階項 (ドリフトベクトル場) の和で表せる．従って，多様体上の拡散過程の研究は，Riemann 計量の研究すなわち Riemann 幾何学と深いところで結びついていると言える．特に，Laplace-Beltrami 作用素そのものを生成作用素に持つ拡散過程 (Brown 運動) が中心的な対象である．また，解析的な対応物である Laplace-Beltrami 作用素とそれが生成する半群や熱核密度も含めて，それらの性質の相関について膨大な研究がある．本講演では，その一角として，Riemann 多様体における「Ricci 曲率の下限と次元の上限」という 2 つのパラメータが定める性質に関する，確率論的／解析学的対応物を考察の対象とする．

Ricci 曲率は，この講演と関連する範囲では，以下の 3 つの量の記述に現れる．1 つ目は，Laplace-Beltrami 作用素と 1 階微分との違いを積の微分を通じて記述する Bochner-Weitzenböck の公式であり，2 つ目は，距離関数の 2 階微分 (第 2 変分) の，変分方向に関する平均 (trace) である．そして 3 つ目は，最適輸送経路に沿って測度を移送した場合の，密度の変化の度合いの制御である．まず 1 つ目の式を基点として，Bakry, Émery らによる，半群による Ricci 曲率の解析的な特徴づけとその応用に関する理論が展開された．一方で，2 つ目の式は Brown 運動の結合法と組み合わせることで 2 粒子間距離の評価へと繋がり，そこから更に，Bakry,Émery らの理論への確率論的なアプローチが確立された．3 つ目の観点は Ricci 曲率の下限に関する最適輸送理論の観点からの解釈を可能にした．驚くべきことに，Ricci 曲率の制御から得られるこれら 3 つの性質は，Ricci 曲率の下限と同等になる ([65] と，その参考文献を参照).

この研究の流れは，これらの性質が Riemann 多様体を超えて意味を成すことに基づき，一般の測度つき距離空間での「Ricci 曲率の下限」に関する，近年の活発な研究へと発展してきている．その流れのひとつとして，これら 3 つの性質をより深く結合することも，測度つき距離空間上の解析の進展に寄与してきた．2 つ例を挙げよう．まず，結合法は空間の滑らかさに依存した議論に基づいており，そのままでは測度つき距離空間での適用は難しい．一方で，Wasserstein 距離で定式化された同等な評価は最適輸送理論の観点から解析可能であり，現在では測度つき距離空間に強力な解析手段を提供するまでに発展している．また，やはり Wasserstein 距離の性質を用いることで，結合法で得ていた評価と Bakry-Émery による評価は，極めて一般的な枠組で同値になることが判明している．

Ricci 曲率の下限の存在からは様々な幾何学的／解析学的性質が従うが, Bonnet-Myers の直径評価や Bishop-Gromov の体積比較不等式，あるいは Sobolev の不等式など,「次元」の情報を内包するものも少なくない．そのため，前述の結果を，次元の情報を含

本研究は科研費 (課題番号:22740083) の助成を受けたものである．
* 〒112-8610 東京都文京区大塚 2-1-1　お茶の水女子大学 大学院人間文化創成科学研究科
e-mail: kuwada.kazumasa@ocha.ac.jp
web: http://www.math.ocha.ac.jp/kuwada/

めた形へと拡張する，というのは，自然な問題意識であろう．このことが，本講演での主題となる．現状では，Riemann 多様体での「Ricci 曲率の下限と次元の上限」と同値な条件が幾つか見つかっているが，見つけられた条件の間の関係について，出発点となる条件を経由しない直接的な関係は極めて希薄であり，測度つき距離空間への拡張，という観点ではまだまだ不十分である．前述の3つの条件との対応で言うと，最初の性質のうち Bochner-Weitzenböck 公式から従うものは Bakry と Émery により以前から知られていたが，ごく最近，F.-Y. Wang [67] により半群での特徴づけが発見された．最適輸送理論に基づく特徴づけは Sturm [60] と Lott-Villani [43] による．本講演では，Wasserstein 距離の評価による特徴づけを与えることで欠落していた条件を補い，さらに，その条件と F.-Y. Wang による不等式が同値になることを見る．

以下，次節以降の内容について，その概略を述べる．まず2節では，Wasserstein 距離について説明する．まず2.1節で Wasserstein 距離を導入し，2.2節でその応用として，Markov 核の Lipschitz 評価と Markov 核の関数への作用に関する微分評価との双対性，および，その背景となる考え方について述べる．3節では，Ricci 曲率の下限のみを考えた場合の結果について紹介する．3.1節では，Ricci 曲率と関連する部分で，Riemann 多様体上の Brown 運動の結合法，特に平行移動 coupling から得られる Wasserstein 距離の評価とその拡張について述べる．3.2節では，最適輸送理論によって同様の評価を得るための別の手法について，その基礎となる考え方も含めて述べる．3.3節で，「Ricci 曲率の下限」に関する各種の特徴づけと，それらの間の関係について説明する．次元を加味した条件については3.3節の結果の拡張という観点に立ち，4節で扱う．最後に，関連する研究のうち幾何学的色彩の強いものについて，ある程度類似しながらも質的に異なる性質が現れるものを5節で紹介する．

2. 結合法と Wasserstein 距離

分布 μ と ν に対して，同じ確率空間上に定められた確率変数 Y と Y' で，それぞれ (周辺) 分布 μ と ν を持つものを μ と ν の coupling という．この定義から，「どのような coupling が存在するか」という問は「周辺分布を固定した状態で，どのような結合分布が実現しうるか」という，測度論的な問であるといえる．しかし，coupling を構成する多くの場面においては，確率変数に基づく視点がより自然かつ直感に沿うものになる (ただしこれは，確率論を専攻した者特有の事かもしれない)．coupling を用いた議論全般を結合法 (coupling method) と呼ぶ．結合法に話題を絞った参考文献として，[40, 61] を挙げておく．また，ここで扱っているような，確率解析と幾何学の相関における結合法の活用に言及のある文献として，[26, 31, 66] を挙げておく．

2.1. Wasserstein 距離

まず, 結合法と関連して本講演で用いる概念として, Wasserstein 距離を紹介する．(M, d) を (簡単のため) 完備可分距離空間，$\mathcal{P}(M)$ を M 上の Borel 確率測度の成す空間とする．また，$\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}(M)$ に対して，$\Pi(\mu_0, \mu_1)$ を，分布の意味での μ_0 と μ_1 の coupling 全体の成す空間とする．つまり，

$$\Pi(\mu_0, \mu_1) := \left\{ \pi \in \mathcal{P}(M \times M) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{各 } A \in \mathcal{B}(X) \text{ に対して，} \\ \pi(A \times M) = \mu_0(A), \pi(M \times A) = \mu_1(A) \end{array} \right\}.$$

このとき，$p \in [1,\infty]$ に対して，μ_0 と μ_1 の間の L^p-Wasserstein 距離を

$$W_p(\mu_0,\mu_1) := \inf_{\pi\in\Pi(\mu_0,\mu_1)} \|d\|_{L^p(\pi)}$$

と定める．また，$\mathcal{P}_p(M)$ を

$$\mathcal{P}_p(M) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(M) \;\middle|\; \text{ある } x \in M \text{ で } \int_M d(x,y)^p \mu(dy) < \infty \right\}$$

と定める．このとき，W_p は $\mathcal{P}_p(M)$ 上の距離になる．また，W_p は $\mathcal{P}(M)$ 上でも (無限大の値を許せば) 定義でき，W_p による収束は弱収束の位相よりやや強い位相を定める．特に距離関数 d が有界ならば，弱収束の位相と W_p による位相は一致する (これらの性質を含む Wasserstein 距離の基本的性質については，[3, 57, 63, 64] などを参照のこと)．距離空間 $(\mathcal{P}_2(M), W_2)$ のことを，M 上の Wasserstein 空間という [1]．

確率変数の coupling の定義から，(Y,Y') を μ_0 と μ_1 の coupling とすれば，$W_p(\mu,\nu) \le \|d(Y,Y')\|_{L^p}$ が直ちに分かる．従って，結合法を用いて Wasserstein 距離を評価することができる．一方で，Wasserstein 距離を考えることには幾つかの利点がある．中でも，この講演との関連で重要なことは，

(i) W_p は別の変分表示による解析手段を持つ

(ii) W_p が基礎となる空間 M の幾何学的特性を色濃く反映する

の 2 点である．まず (i) について，以下の定理が知られている：

Theorem 2.1 (Kantorovich 双対性)

$$\frac{W_p(\mu_0,\mu_1)^p}{p} = \sup\left\{ \int_M f^*\,d\mu_1 - \int_M f\,d\mu_0 \;\middle|\; f \in C_b^{\mathrm{Lip}}(M) \right\}, \tag{2.1}$$

ここで，$f^*(x) := \inf\{f(y) + p^{-1}d(x,y)^p\}$．特に，

$$W_1(\mu_0,\mu_1) = \sup\left\{ \int_M f d(\mu_0 - \mu_1) \;\middle|\; f : M \to \mathbb{R} \text{ 1-Lipschitz} \right\}$$

となる (これを，Kantorovich-Rubinstein の公式という)．

(ii) については様々な性質があるが，ここでは，displacement interpolation と呼ばれる性質を紹介する．そのため，まず測地距離の概念を導入する．任意の 2 点 $x_0, x_1 \in M$ に対して $\gamma : [0,1] \to M$ で，$\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$, かつ $d(\gamma(s),\gamma(t)) = |t-s|d(x,y)$ $(s,t \in [0,1])$ を実現するものが存在するとき，d を測地距離という．また，このような γ を (定速) 最短測地線という．d が測地距離である距離空間 (M,d) を測地空間という．ノルム空間や完備 Riemann 多様体は測地空間の例になっている．$\Gamma = \Gamma([0,1];M)$ を M 上の定速最短測地線のなす集合とし，一様収束により位相を定める．各 $t \in [0,1]$ に対して，$e_t : \Gamma \to M$ を $e_t(\gamma) = \gamma(t)$ で定める．また，可測写像 f による測度 μ の像測度を $f^\sharp\mu$ で表す．

---

[1] 厳密には L^2-Wasserstein 空間だが，この講演では L^2 以外の Wasserstein 空間を考えない．

Theorem 2.2 (Displacement interpolation; 例えば，[42] 又は [64, Cor. 7.22] を参照) d を測地距離とし，$p \in (1,\infty)$ とする．このとき，$\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}(M)$ に対して，$\Xi \in \mathcal{P}(\Gamma)$ で，$e_t^\sharp \Xi = \mu_t$ $(t = 0,1)$ かつ

$$W_p(e_t^\sharp \Xi, e_s^\sharp \Xi) = \left\{ \int_\Gamma d(e_t(\gamma), e_s(\gamma))^p \Xi(d\gamma) \right\}^{1/p} = |s-t| W_p(\mu_0, \mu_1)$$

となるものが存在する．特に $(e_t^\# \Xi)_{t\in[0,1]}$ は W_p の定速最短測地線になり，W_p は $\mathcal{P}_p(M)$ 上の測地距離になる．この Ξ を μ_0 と μ_1 の dynamical coupling という．

結合法を用いる上では，「結合させたい確率変数の値 (ランダムに動く粒子の配置) が，うまく自然な coupling が取れないような位置にある」という状況がしばしば生じる．対象とする確率モデル毎にこの問題を回避するための技巧が必要となり [2]，そのために (非本質的にも見える) 仮定を置く場合もある．前述の性質を用いることで，結合法に頼る事なく Wasserstein 距離を直接解析することが可能になる (次節および 3.2 節を参照)．

2.2. 応用：微分評価との双対性

M をポーランド測地空間とし，$p \in (1,\infty)$ とする．$f \in C_b^{\mathrm{Lip}}(M)$ に対して，Hopf-Lax 半群 $Q_t f : M \to \mathbb{R}$ $(t \ge 0)$ を，次で定める：

$$Q_t f(x) := \begin{cases} \displaystyle\inf_{y\in M} \left[f(y) + \frac{t}{p} \left(\frac{d(x,y)}{t} \right)^p \right] & (t > 0 \text{ のとき}), \\ f(x) & (t = 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

ここで，Theorem 2.1 の f^* は $Q_1 f$ に他ならないことを注意しておく．

M が Riemann 多様体で $p = 2$ の時，$\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_2(M)$ とすると，Theorem 2.2 における μ_0 と μ_1 の dynamical coupling Π について，次の性質が形式的に成り立つ ([54] および [64, Chapter 7] 参照)：f を (2.1) の上限を実現する関数とすると，Π-a.e. $\gamma \in \Gamma([0,1] \to M)$ で $\dot\gamma(t) = \nabla Q_t f(\gamma(t))$．この意味で，$Q_t f$ は dynamical coupling とは双対の形で μ_0 と μ_1 の間の Wasserstein 距離を補間していると考えられる．

この発見的考察を背景に，最初の M の場合に戻る．$(\mu(t))_{t\in[0,1]}$ を $\mathcal{P}(M)$ 上の “よい” 曲線とすると，Kantorovich 双対性において Hopf-Lax 半群を用いた別表示

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} W_p(\mu(0), \mu(1))^p &= \sup_{f \in C_b^{\mathrm{Lip}}(M)} \left[\int_M Q_1 f \, d\mu(1) - \int_M Q_0 f \, d\mu(0) \right] \\ &= \sup_{f \in C_b^{\mathrm{Lip}}(M)} \left[\int_0^1 \partial_t \left(\int_M Q_t f \, d\mu(t) \right) dt \right] \end{aligned} \tag{2.2}$$

が成り立つ．さらに，Hopf-Lax 公式の一般化である $Q_t f$ は，この抽象的な枠組においても，然るべき意味で Hamilton-Jacobi 方程式

$$\partial_t Q_t f(x) = -\frac{1}{q} |\nabla Q_t f|(x)^q$$

をみたす ([1, 23] 等を参照)．このことを踏まえて (2.2) の t-微分を計算すれば，$\mu(t)$ の性質に応じた評価が得られる．Wasserstein 距離に関するこの解析手法は，[34] で初めて導入され，その有効性が徐々に判明しつつある (例えば，この講演に関連する内容では，[1, 2, 19, 21] を参照)．ここでは，[34] で扱った問題として次の定理を紹介しておく：

[2] 例えば，3.1 節の脚注達を参照．

Theorem 2.3 (cf. [34]) $P(x,\cdot) \in \mathcal{P}(M)$ $(x \in M)$ を変数 $x \in M$ について弱収束位相で連続な Markov 核とする．P の (有界可測) 関数 f への作用を Pf と書く．すなわち，$Pf(x) := \int_M f(y)P(x,dy)$．また，$f : M \to \mathbb{R}$ に対して，局所 Lipschitz 定数 $|\nabla f| : M \to \mathbb{R}$ を次で定める：

$$|\nabla f|(x) := \limsup_{y \to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}.$$

このとき，$p, q \in [1,\infty]$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ と $C > 0$ について，次は同値：

(i) 各 $x_0, x_1 \in M$ に対して，$W_p(P(x_0,\cdot), P(x_1,\cdot)) \le Cd(x_0,x_1)$.

(ii) 各 $f \in C_b^{\mathrm{Lip}}(M)$ に対して，$|\nabla Pf|(x) \le CP(|\nabla f|^q)(x)^{1/q}$
(ただし，$q = \infty$ のときは，右辺は $C \sup_{y \in M} |\nabla f|(y)$ とする).

この定理の証明のうち，(i)⇒(ii) は比較的易しい．前述の技法は (ii)⇒(i) の証明で用いる．その際，$\mathcal{P}(M)$ 上の曲線として $P(\gamma(t),\cdot)$ ($\gamma(t)$ は M 上の測地線) を用いる．[34] では，主に Hamilton-Jacobi 方程式を正当化するために，追加の仮定を課している．しかし，それらの技術的な仮定は実際には必要ない (ことが，現在は判明している).

3. Ricci 曲率，熱分布と Wasserstein 距離

この節では，(M,g) を完備 Riemann 多様体 (g は Riemann 計量，すなわち各接空間上の内積) とする．この講演を通じて，Riemann 多様体は境界を持たないもののみ考える．この講演で考える確率過程の coupling は全て，あえて直感的に言うと，「無限小時間での変分の coupling の積分」で与えられる (離散時間の場合で述べると，「対象とする確率過程 $S_i(n)$ $(i = 0,1)$ は確率変数列 $X_i(j)$ の和 $S_i(n) = \sum_{j=1}^n X_i(j)$ で与えられていて，変分 $S_i(n) - S_i(n-1) = X_i(n)$ $(i = 0,1)$ の coupling を各 n で与えた結果として，$S_0(n)$ と $S_1(n)$ の coupling を得る」という考え方に相当する).

3.1. Brown 運動の結合法と Ricci 曲率

以下，Ricci 曲率 Ric に関する「ある $K \in \mathbb{R}$ で，$\mathrm{Ric} \ge K$ をみたすものが存在する」という仮定の下で，Brown 運動 (Laplace-Beltrami 作用素 Δ を生成作用素に持つ拡散過程[3]) の平行移動 coupling を考える．ここから，目標である (3.1) を結合法で得るまでの議論は全て heuristic である．ただし，「(3.1) をみたす coupling が存在する」という意味では結論は厳密な意味で正しいし，証明はここでの heuristic に沿って展開される．[4, 33, 66] および，そこに挙げられた文献を参照のこと．

2 つの M 上の Brown 運動の coupling $(B_0(t), B_1(t))_{t \ge 0}$ について，各々の無限小変動 $dB_0(t)$, $dB_1(t)$ は，それぞれ接空間 $T_{B_0(t)}M$, $T_{B_1(t)}M$ の元とみなされる．平行移動 coupling とは，$dB_1(t)$ が $dB_0(t)$ の ($B_0(t)$ と $B_1(t)$ を結ぶ最短測地線に沿った，Levi-Civita 接続による) 平行移動で与えられているものとする[4]．$dB_0(t)$ を “Brown 運動を生成する白色雑音” として与えると，平行移動は接空間上の等距離写像であるから，これが 2

[3] 確率論の立場では $\Delta/2$ を生成作用素とする方が自然だが，ここではそうしない

[4] 2 粒子が一方が他方の最小跡に属するときには，別の議論が必要になる．しかしそこは，2.1 節の最後に触れた技巧面に相当するので，ここでは立ち入らない．

つの Brown 運動の coupling を与えると考えられる．平行移動 coupling $(B_0(t), B_1(t))$ と Ricci 曲率との相関は，2 粒子の間の距離 $\rho(t) = d(B_0(t), B_1(t))$ の変分を考えると明らかになる．伊藤の公式を $\rho(t)$ に対して適用する [5] と，coupling を平行移動で与えた帰結として，martingale 部分が 0 になる．このことは，Euclid 空間で線分の端点を動かした時の線分の長さの変分を見るとき，片側の端点の変分を他方の平行移動とすれば，第 1 変分 (1 回微分) が 0 になることの自然な拡張といえる；1 回微分の段階では，空間の曲がり具合 (曲率) の影響は表れてこない．そして，$\rho(t)$ の有界変動部分は距離関数の 2 回微分 (の trace) で記述される．この量は曲率の情報を内包し，その結果として Ricci 曲率 (の下限) が，この項の評価に使用できる [6]．その結果，Ricci 曲率に関する我々の仮定の下で，評価式

$$d\rho(t) \leq -K\rho(t)dt$$

を得る．これは $\rho(t)$ に関する deterministic な微分不等式となっているので，標準的な議論で，次を得る：

$$\rho(t) \leq e^{-Kt}\rho(0). \tag{3.1}$$

さらに初期分布に関する若干の議論をすれば，次が得られる:

Proposition 3.1 ([4, 33, 66] 等) $\mu_i(t) \in \mathcal{P}(M) (i = 0, 1)$ は，次の (weak sense での) 熱方程式の解とする：

$$\partial_t \mu(t) = \Delta\mu(t). \tag{3.2}$$

このとき，$e^{Kt}W_\infty(\mu_0(t), \mu_1(t))$ は t について単調非増加．特に，

$$W_\infty(\mu_0(t), \mu_1(t)) \leq e^{-Kt}W_\infty(\mu_0(0), \mu_1(0)). \tag{3.3}$$

ここまでの議論について，3 つの要点を確認しておこう．

(a) Ricci 曲率が現れる理由は，距離関数を用いていることにある．従って，別の $M \times M$ 上の関数を考える際でも，対応する別の量の制御を適切に課せば，その関数と coupling との合成に対する良い評価が得られる可能性がある．

(b) $\rho(t)$ の martingale 部分が消えることは，平行移動が等距離写像であること，および，2 つの Brown 運動の速度が等しいことが関係している．

(c) $\rho(t)$ の martingale 部分が消えなければ，(3.1) のような L^∞-評価は期待できない．

実際に，これらの要点は平行移動 coupling に基づく議論の拡張に関連している．例えば，Riemann 計量 g が時間に依存する場合 (この場合，基礎となる測度や距離，生成作用素全てが時間に依存する) には，この，d を時間依存距離に置き換え，$\mathrm{Ric} \geq K$ の条件を計量の時間依存性を加味した条件で置き換えた形で (3.1) および (3.3) に相当する評価が得られる ([4, 32, 45] 参照)．ここでは (a) に相当する部分が別の関数に変わったのみで，(b) の考察と同じ理由により martingale 部分は消える．それに対して，時間依存計量の特別な場合として後ろ向き Ricci 流を考え，通常の距離を Perel'man の $\mathcal{L}$-距

[5] ここでの議論も，本来は 2 粒子が最小跡の外側にいるとき (d が微分可能なとき) のみ有効．

[6] 距離関数の 2 回微分に現れるのは曲率テンソルであり，Ricci 曲率ではない．trace を取ることで，Ricci 曲率が自然に対応する．coupling の構成法として Brown 運動をランダムウォークで近似する手段を取ると，この違いが技巧上の困難のひとつとなる．

離に置き換えた場合についても類似の結果が成り立つ ([35, 62] 参照)．この場合には，異なる時間スケールを持つ 2 つの Brown 運動の (時空間) 平行移動 coupling を考える．時空間平行移動は等距離写像になるのだが，2 粒子の動く速さが異なるので，(b) で述べた事情により，主張は (3.1) の形と異なってくる．具体的には，$\rho(t)$ に相当する量が supermartingale になる，という主張になる．なお，同様のことは 4.2 節でも議論される．

また，考える coupling 自体を変え，平行移動の代わりに最短測地線の速度方向に対する折り返しを用いて構成した coupling でも，ある種の Wasserstein 距離の単調性が得られる [36]．なお，歴史的には，この種の coupling に関する研究の方が平行移動 coupling に先行している ([12, 30, 41] 等参照)．この場合には，$\rho(t)$ に相当する量の martingale part を敢えて消さないようにしているため，coupling の振る舞いが質的に異なる．その一方で，この coupling を用いることで，前述の平行移動 coupling では無視されている，次元に関する情報を捕らえることができる．例えば，(3.3) からは得られないような，Laplacian のスペクトルギャップの精密な評価が従う ([11, 26, 66, 71] 参照)．

3.2. Wasserstein 空間上の勾配流としての熱分布

この節では，Wasserstein 距離の性質を用いて，W_2 に関して，(3.3) に相当する熱分布の Lipschitz 評価

$$W_2(\mu_0(t), \mu_1(t)) \le e^{-Kt} W_2(\mu_0(0), \mu_1(0)) \tag{3.4}$$

を導く方法を紹介する．熱方程式 (3.2) の解 (熱分布) $(\mu(t))_{t\ge 0}$ を Wasserstein 空間上の曲線とみなしたとき[7]，

「$(\mu(t))_{t\ge 0}$ は (形式的に) 相対エントロピーの勾配流とみなせる」

という観点が，ここでの議論の鍵になる．まず，この観点を [53, 54] に沿って (heuristic な議論により) 説明する．

$\mathcal{P}_2(M)$ の元のうち，Riemann 体積測度 vol_g に絶対連続なもの全体の成す部分集合を $\mathcal{P}_2^{ac}(M)$ と書く．ここで，$\mathcal{P}_2^{ac}(M)$ が形式的に (無限次元の)Riemann 多様体とみなせることを見る．まず，天下り的ではあるが，$\mu \in \mathcal{P}_2^{ac}(M)$ における “接空間”$T_\mu \mathcal{P}_2^{ac}(M)$ とその上の “Riemann 計量”σ_μ を以下のように定める：

$$\begin{aligned} T_\mu \mathcal{P}_2^{ac}(M) &:= \overline{\left\{ \nabla\varphi : M \text{ 上の } C^\infty\text{-勾配ベクトル場} \;\middle|\; \int_M |\nabla\varphi|^2 \, d\mu < \infty \right\}}^{L^2(\mu)}, \\ \sigma_\mu(V, V') &:= \int_M \langle V, V' \rangle \, d\mu. \end{aligned}$$

$T_\mu \mathcal{P}_2^{ac}(M)$ がいかなる意味で接空間であるのかを見るため，$\mathcal{P}_2^{ac}(M)$ 上の曲線と，その接ベクトルについて考えよう．$\mathcal{P}_2^{ac}(M)$ の元を流体の密度分布とみなした時，$\mathcal{P}_2^{ac}(M)$ 上の曲線 $(\mu(t))_t$ は (総質量を保存する) 流体の運動と考えられる．従って，$\mu(t)$ の (vol_g に関する) 分布密度を ρ_t と書くと，ρ_t は，質量保存則あるいは連続方程式と呼ばれる次の関係式を (weak sense で) みたす (時間にも依存した) 勾配ベクトル場 $\nabla\varphi_t$ が存在する：

$$\partial_t \rho_t + \nabla \cdot (\rho_t \nabla\varphi_t) = 0. \tag{3.5}$$

$\nabla\varphi_t$ は密度 ρ_t の無限小時間での変化の仕方を記述するものと考えられる．この観点に基づき，$\nabla\varphi_t$ を $T_{\mu_t}\mathcal{P}_2^{ac}(M)$ の元とみなす．そうすると，この接空間および Riemann 計

[7] 厳密には「確率的完備」を含む何らかの条件が必要ではあるが，ここでは詳細に立ち入らない．

量から定まるRiemann距離がWasserstein距離と一致することが分かる．実際，$\mu_0 \in \mu_1 \in \mathcal{P}_2^{ac}(M)$ の間のWasserstein距離 $W_2(\mu_0, \mu_1)$ の2乗は，この計量 σ に関する曲線のエネルギー汎関数の最小値としての変分表示 (Benamou-Brenierの公式[8]) を持ち，μ_0 と μ_1 をつなぐ $\mathcal{P}_2(M)$ 内の測地線 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ はエネルギー汎関数の最小値を実現することが分かる．

さて，相対エントロピー $\mathrm{Ent} : \mathcal{P}_2(M) \to \bar{\mathbb{R}}$ を，次で定義する[9]：

$$\mathrm{Ent}(\mu) := \begin{cases} \displaystyle\int_M \rho \log \rho \, d\,\mathrm{vol}_g & (d\mu = \rho\, d\,\mathrm{vol}_g \text{ のとき}), \\ \infty & (\text{そうでないとき}). \end{cases} \tag{3.6}$$

Entの勾配流について考えるため，まず，先ほど導入したRiemann構造に基づくEntの ($\mathcal{P}_2^{ac}(M)$ 上の関数としての) 勾配ベクトル $\nabla\,\mathrm{Ent}$ を決定する．$(\mu_t)_t$ を，各 t で $\nabla\varphi_t$ を接ベクトルに持つ連続方程式 (3.5) をみたす $\mathcal{P}_2^{ac}(M)$ 上の曲線とする．また，μ_t の vol_g に関する密度を ρ_t とする．先に導入した $\mathcal{P}_2^{ac}(M)$ 上のRiemann計量 σ により，

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Ent}(\mu_t) = \sigma_{\mu_t}(\nabla\,\mathrm{Ent}, \nabla\varphi_t)$$

とならねばならない．すると，左辺を計算することで，$(\nabla\,\mathrm{Ent})(\mu_t) = \dfrac{\nabla\rho_t}{\rho_t}$ を得る．よって $\nabla\,\mathrm{Ent}$ が得られたので，次にEntの勾配流について考える．μ_t をEntの勾配流とすると，μ_t の速度ベクトルは $-(\nabla\,\mathrm{Ent})(\mu_t)$ に一致する．よって，連続方程式の $\nabla\varphi_t$ にこれを代入することで μ_t の分布密度 ρ_t が

$$\partial_t\rho_t + \nabla\cdot\left(\rho_t\left(-\frac{\nabla\rho_t}{\rho_t}\right)\right) = 0$$

をみたすことが分かる．これは「ρ_t が熱方程式をみたす」ということに他ならない．よって，熱方程式の解の一意性から，$\mu(t)$ はEntの勾配流と一致する．

$\mathbb{R}^m$ あるいはRiemann多様体上において，$\gamma_i(t)$ $(i = 0, 1)$ がポテンシャル関数 Φ の勾配流，すなわち $\partial_t\gamma_i(t) = -\nabla\Phi(\gamma_i(t))$ とする．Φ が C^2-級であれば，

$$\mathrm{Hess}\,\Phi \geq K \quad \Leftrightarrow \quad d(\gamma_0(t), \gamma_1(t)) \leq e^{-Kt} d(\gamma_0(0), \gamma_1(0))$$

となる．前述のように，熱分布はEntの勾配流と ($\mathcal{P}_2(M)$ 上の形式的なRiemann構造の下で) みなせることが分かったので，“$\mathrm{Hess}\,\mathrm{Ent} \geq K$” に相当する条件の下で (3.4) が従うことが期待できる．これを厳密に遂行するためには，以下の3つの点を押さえねばならない．

(a) Entの微分は形式的なRiemann構造に合わせて取ったものであるから，2階微分である $\mathrm{Hess}\,\mathrm{Ent}$ の定義を (厳密に) 与えることは自明ではない．

(b) 前述の $\mathcal{P}_2(M)$ 上のRiemann構造はあくまでも形式的なものであって，無限次元空間である $(\mathcal{P}_2(M), W_2)$ 上での解析には様々な技術的困難がある．$\mathrm{Hess}\,\mathrm{Ent} \geq K$ の定義を与えたとして，そこから (3.4) を導出できるような，勾配流の適切な定義が必要になる．

---

[8] この公式は，適切な仮定の下では厳密に成り立つ．[3, 63, 64] および，その参考文献を参照．

[9] vol_g が無限測度のときは，無条件では定義できない．ある $c > 0, x \in M$ で $e^{cd(x,\cdot)^2}$ が vol_g について可積分であれば，問題なく定義できる．

(c) 直前の項目で行うように勾配流の定義を取り替えた場合には，それが，本来知りたかった熱分布と同じものであるかどうかは，「先験的に明らか」ではない．

現在の M の仮定の下では (a)-(c) の問題は全て解決でき，この節で言及した考え方のかなりの部分が厳密に遂行できる [16]．ここで，次節で見るように，(a) における「$\mathrm{Hess}\,\mathrm{Ent} \geq K$」という条件 (の適切な定式化) は，実は $\mathrm{Ric} \geq K$ と同値になる．よって，この節で扱った内容は，「条件 $\mathrm{Ric} \geq K$ からの (3.4) の導出」と位置づけられる．これは，前節の結合法による (3.3) の導出に対応するものといえる．

一方，この節の議論を通じ $\mathrm{Ric} \geq K$ から得られる評価 (3.4) は，(3.3) より真に弱い．その意味では，本節の手法は「労多くして益少なし」に見えるかもしれない．しかし，この手法の重要性は，空間の可微分性の構造を用いずとも議論が走る形に整備が可能な点にある．実際，前述の (a)-(c) の問題を解決する仮定で，距離空間上の勾配流に関する既存の理論が $(\mathcal{P}_2(M), W_2)$ を含む形へと拡張・整備されてきた．その結果，理論の多くの部分は，基礎となる空間 M が測度つき距離空間の場合でも適用可能な形へと拡張された．しかも，Alexandrov 空間などの通常の意味での微分構造を持たない特異空間を例として含む．この部分に関する専門書として [3] を，参考書として [64] を，また，これらの本の出版後の重要な進展，特に測度つき距離空間上の解析について，[1, 2, 20, 21] を挙げておく．

最後に，前述の (a)-(c) の問題について，どのような考え方が用いられたのか，そして，その考え方がその後の発展にどう繋がっているのかを簡単に述べておこう．

(a) について，いま必要なのは $\mathrm{Hess}\,\mathrm{Ent}$ そのものではなく「$\mathrm{Hess}\,\mathrm{Ent} \geq K$」に相当する条件である．この条件であれば，凸関数の概念を通じて，微分を用いずに距離関数 W_2 のみで以下のように定義できる：

Definition 3.2 Ent が $(\mathcal{P}_2(M), W_2)$ 上で K-凸であるとは，各 $\mu(0), \mu(1) \in \mathcal{P}_2(M)$ に対して，W_2-測地線 $(\mu(t))_{t\in[0,1]}$ と $t \in [0,1]$ が存在して，以下が成り立つこととする [10]：

$$\mathrm{Ent}(\mu(t)) \leq (1-t)\,\mathrm{Ent}(\mu(0)) + t\,\mathrm{Ent}(\mu(1)) - \frac{K}{2} t(1-t) W_2(\mu(0), \mu(1))^2.$$

(b) については，少なくとも 2 つの定式化 (Energy dissipation identity(EDI) と Evolution variational inequality(EVI)) がある．いずれも M が測度つき距離空間であれば意味を持つ定義となっている．距離空間である $(\mathcal{P}_2(M), W_2)$ では，接ベクトル (微分) の概念を考えることは難しい．従って，「ベクトルが等しい」という概念をどう定義するのか，が，勾配流を定式化する上での鍵となる．例えば EDI であれば，「微分の絶対値」に相当する概念として局所 Lipschitz 定数が利用できる事に着目する．まず，「微分の絶対値」だけを用いて「ベクトルが等しい」に相当する概念を記述し，それを定義として用いる，という考え方をする．それらの定義はポテンシャル関数が Ent である場合に限らず，広く適用可能である．

EVI と EDI は，解の存在と一意性について異なる特性を持つ．EVI からは (3.4) が従い，そこから解の一意性が直ちに従う．EDI の解の一意性は，一般には不明．しかし，ポテンシャル関数として Ent を考えている際には，Definition 3.2 の条件の下で広い

[10] 「端点 $\mu(0)$ と $\mu(1)$ を結ぶ任意の測地線に対して以下の不等式が成り立つ」という，やや強い定義をすることもある．

範疇で一意性が成り立つ [1, 20]．ただし，EDI から (3.4) が従うとは限らない[11]．一方で，解の存在については，EDI にのみ存在定理が (緩い仮定の下で) 知られている．なお，Definition 3.2 の条件の下，Ent に関して EDI をみたす曲線が EVI をみたすかどうか (ひいては，(3.4) をみたすかどうか) は，その曲線が定める分布の，初期条件に対する線型性と深い関係がある [2]．この意味で，この問は (c) とも関連している．

(c) については，[27] による先駆的な結果ののち，その路線に従って，完備 Riemann 多様体の場合は最終的に [16] によって示された．ここまでの議論は，Ent の勾配流が，その密度関数の対数微分 (の，(-1) 倍) を速度ベクトルとする連続方程式をみたすことをチェックすることで，熱方程式の解の一意性に帰着させる，という同定方法を採っている．そのため，充分な可微分性を持たない Alexandrov 空間などの特異空間では，同様の議論の展開は困難と予想されていた．

Alexandrov 空間の場合は，講演者らによりこの問題が解決された [21] (ただし，(3.4) の導出は EVI とは別の議論による；[22, 48] 参照)．解決に当たり，Dirichlet 形式から定まる熱分布が Ent の勾配流の条件をみたす，という，従来とは逆向きの議論を展開した．この方法は，Dirichlet エネルギー汎関数を Cheeger 型のエネルギー汎関数で置き換えた形で，一般の測度つき距離空間へと拡張されている [1]．これらの議論において，2.2 節で解説した，Hopf-Lax 半群に基づく Wasserstein 距離の解析が重要な役割を果たしていることを注意しておく．なお，これらの結果は，いずれの場合も Definition 3.2 に相当する仮定の下で議論されている．この仮定が成り立たない場合には Ent の勾配流の扱いが困難になることもあり，空間が滑らかな場合でも結果は知られてない[12]．

その他にも，Wiener 空間の場合 [18]／Finsler 多様体の場合 [51]／Heisenberg 群の場合 [28]／有限 Markov 連鎖の場合 [44]／Lévy 過程の場合 [15] など，Riemann 多様体あるいは Brown 運動とは質的に異なる状況でも (c) に相当する問題は考察・解決されている (5 節も参照のこと)．

3.3. 「Ricci 曲率が下に有界」の別の定式化

3.1 節および 3.2 節で条件 $\mathrm{Ric} \geq K$ から得た評価 (3.3) あるいは (3.4) は，実は $\mathrm{Ric} \geq K$ と同値になる．この主張は，最終的に [65] において整理された形で示された．実際には，より詳しく以下が成り立つ．

Theorem 3.3 ([65]) M を完備 Riemann 多様体とし，更に確率的完備 (有限時刻では Brown 運動が無限遠に到達しない，あるいは，熱分布が時間変化で総熱量を保存する) を仮定する．また，$K \in \mathbb{R}$ とする．このとき，次は同値：

(i) $\mathrm{Ric} \geq K$.

(ii) 相対エントロピー Ent が $(\mathcal{P}_2(M), W_2)$ 上で K-凸 (Definition 3.2 参照)．

(iii) $\mu_i(t)$ $(i = 0, 1)$ を (3.2) の解とする．このとき，(ある／すべての)$p \in [1, \infty]$ で[13]

---

[11] 5 節の Finsler 多様体の項を参照．

[12] 最低限，総熱量が保存されなければこの枠組みに乗らない．しかし，完備 Riemann 多様体の場合であっても，「ある $c > 0$ と $x \in M$ で $\mathrm{Ric} \geq -cd(x, \cdot)^2$」程度の評価があれば総熱量は保存される [24]．これは勿論 $\mathrm{Ric} \geq K$ の条件よりはずっと弱い．

[13] 「ある p で成り立つ」であっても「全ての p で成り立つ」であってもよい，という意味．従って，「ある p で成り立てば全ての p で成り立つ」ことも従う．

次の評価が成り立つ：各$t \geq 0$で

$$W_p(\mu_0(t), \mu_1(t)) \leq e^{-Kt} W_p(\mu_0(0), \mu_1(0)). \tag{W_p}$$

(iv) P_tを(関数に作用する)熱半群とする．このとき，(ある／すべての) $q \in [1, \infty]$で[14]Bakry-Émeryの微分評価と呼ばれる次の評価が成り立つ：各$f \in C_b^{\mathrm{Lip}}(M)$, $t \geq 0$と$x \in M$で，

$$|\nabla P_t f(x)| \leq e^{-Kt} P_t(|\nabla f|^q)(x)^{1/q}. \tag{G_q}$$

(v) 各$f \in C^\infty(M)$と$x \in M$で，Γ_2-条件と呼ばれる次の不等式が成り立つ：

$$\frac{1}{2}\left(\Delta(|\nabla f|^2)(x) - 2\langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle(x)\right) \geq K |\nabla f|(x)^2 \tag{Γ_2}$$

Ricci曲率の概念自体は，その定義に空間の可微分性を要するが，「Ricci曲率が下に有界」という性質に置き換えた場合に現れる他の同値条件は，その定式化に必ずしも空間の可微分構造を必要としない[15]．従って，他の定式化はより広い空間族で適用できることが期待でき，それは実際に近年の研究の進展により実証されつつある．この観点から見て(ii)-(v)の別の定式化が十分に有用であるためには，(i)の下で知られていた様々な性質が，((i)との同値性を経由せず)直接導けることが望ましい．実際，それはかなりの程度まで調べられている．さらにそれ以上に，これらの個別の条件からしか知られていない応用(他の条件を出発点とする場合には，この同値性を経由する以外の証明が知られていない，という意味)もある．そのため，(i)以外の条件の同値性をより広い枠組みで追求することにも，大きな意味がある．この観点では，Theorem 3.3の主張は，証明の過程自体も研究推進上重要になる．

Theorem3.3の条件(i)-(v)に対し，証明の流れを以下にまとめておく．

- (i)と(v)はBochner-Weitzenböckの公式

$$\frac{1}{2}\left(\Delta(|\nabla f|^2) - 2\langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle\right) = \|\operatorname{Hess} f\|^2 + \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) \tag{3.7}$$

  を介して同値になる([5, 38]等を参照)．また，(i)は(ii)または(G_∞)からも従う．これらは[65]で初めて示された．条件(iii)から直接(i)を示す方法は知られていないが，下で見るように(iii)は(iv)と非常に広い範疇で同値なので，(iv)を経由することはあまり問題にならない．

- (ii)は，ここで挙げた条件のうち，(i)から導出する方法しか知られていない(ただし，3.2節での「熱分布はEntの勾配流である」という解釈に基づく形式的な議論で，(W_2)から(ii)を導くことはできる)．

- $q, q' \in [1, \infty]$, $q < q'$であれば，(G_q)は$(G_{q'})$を導く．また，類似の議論により，$p, p' \in [1, \infty]$, $p > p'$であれば，(W_p)は$(W_{p'})$を導く．しかし，逆向きの導出は，条件(i)または(v)を介したものしか知られていない．一方，$p^{-1} + q^{-1} = 1$をみたすp, qについて，(W_p)と(G_q)は同値であることがTheorem 2.3から従う．

[14] 前の脚注に同じ．

[15] (iv)および(v)は，半群とその生成作用素の言葉のみで関数解析的に記述できる．

- Proposition 3.1 より (i) は (W_∞) を導く．また 3.2 節の議論から (ii) は (W_2) を導く．
- (G_2) は (v) と同値 ((v) は (G_2) の (t に関する) 微分形とまた)．解釈できる，空間の滑らかさに相当する条件の下で，(v) は (G_1) を導く (例えば [5, 38] を参照)．
- (v) を導く方法は，現状では上述のもの ((i) との同値性／(G_2) との同値性) のみ．

これらの関係を図式にすると次のようになる：

$$\begin{tikzcd}
 & \text{(iii)} & \text{(iv)} & \\
\text{(i)} \arrow[r, Rightarrow, dashed] \arrow[d, Leftrightarrow, dashed] & (W_\infty) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (G_1) \arrow[d, Rightarrow] & \\
\text{(ii)} \arrow[r, Rightarrow] & (W_2) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (G_2) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{(v)} \arrow[ul, Rightarrow, dashed] \arrow[d, Leftrightarrow, dashed] \\
 & (W_1) \arrow[r, Leftrightarrow] & (G_\infty) \arrow[r, Rightarrow, dashed] & \text{(i)}
\end{tikzcd}$$

破線の矢印は，空間の滑らかさに依存した議論を用いる部分である．

これらの条件のうち (iv) および (ii) の応用および特性について，M が Riemann 多様体の場合に限らず，少し説明を加えておく．まず，(G_1) あるいは (G_2) からは，対数 Sobolev 不等式や Poincaré 不等式などの種々の関数不等式が導出できる (例えば [5, 38] を参照)．また，逆 Poincaré 不等式など，半群作用による関数の滑らかさの改良度合いに関する不等式が従う．これらの議論は，Markov 半群の定義された空間としての抽象的な枠組で (少なくとも形式的には) 有効である．なお，(G_1) のみからしか知られていない応用もあるが，上の図式から分かるように，空間の滑らかさを利用せずに ((W_∞) 以外の条件から)(G_1) を得る方法は知られていない．

条件 (ii) は空間の距離と測度にしか依存しない[16]．従って，一般の測度つき距離空間で意味を持つ．3.2 節で見たように，(ii) から (W_2) を得る議論もまた測度つき距離空間で有効であったから，上の図式の中段は，広くこの範疇で成り立つ[17]．その結果として，(ii) から熱半群や熱核密度，固有関数に対する Lipschitz 連続性評価が得られる [2, 21]．特に Alexandrov 空間では (ii) が成り立つので [55]，この議論が適用できる．なお，ここでの議論を用いない場合，測度つき距離空間で有効な熱核の連続性評価は，従来は Harnack 不等式による Hölder 評価が最良であったことを注意しておく (例えば [37, 58] 参照) ただし Alexandrov 空間では，(ii) より強い仮定を置くことで，同様の結果を含む様々な評価が別の方法で得られている ([56, 68, 69, 70] 参照)．なお，測度つき距離空間の枠組での条件 (ii) の応用は [43, 59] で詳しく調べられている．ここでは，この条件は空間の直積や Gromov-Hausdorff 収束などの空間に対する幾何学的な操作で良い振る舞いをすることを挙げるに止める．

[16] 相対エントロピーの定義は，基礎測度に依存している．
[17] ただし，条件 (ii) 以外は，熱分布を定めなければ意味を持たない事に注意．

最後に，Theorem 3.3 で得た結果は全て重みつき Riemann 多様体へと拡張できることに注意しておく．(M,g) を Riemann 多様体とし，vol_g を Riemann 体積測度としたとき，重みつき Riemann 多様体とは，測度として Riemann 体積測度の代わりに $e^{-\psi}\,\mathrm{vol}_g$ を考えたものとする．このとき，(i) では Ricci 曲率の代わりに Bakry-Émery Ricci テンソル $\mathrm{Ric}_\psi = \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\,\psi$ を考える．(ii) では，相対エントロピー汎関数を，基礎測度を $e^{-\psi}\,\mathrm{vol}_g$ に置き換えたもので考える．そして，(iii), (iv)，(v) では，Laplacian の役割を $\mathcal{L} = \Delta - \nabla\psi \cdot \nabla$ に置き換えればよい (こう取れば，$e^{-\psi}\,\mathrm{vol}_g$ は $\mathcal{L}$ の対称化測度になる)．

4. 曲率次元条件

1 節でも言及したように，精密かつ有用な幾何学的応用や関数不等式を得るためには，Ricci 曲率の下限だけでなく空間の次元を加味せねばならない場面が少なくない [18]．この節では，3.3 節の結果を次元の上限を加味した形へ拡張する．ただし，ここで「次元」と呼ぶ量は，測度つき距離空間の枠組みで考えた場合には，単純に空間の (位相的な) 次元を表すものではなく [19]，測度の取り方との関係で定まる性質となっている．例えば，Euclid 空間 $\mathbb{R}^m$ を通常の Euclid 距離で距離空間とみなし，Lebesgue 測度の代わりに Gauss 測度を取った場合を考える．この空間では，様々な意味で無限次元的な性質が現れてくる．例えば，関数不等式の観点では，通常の Sobolev 不等式が不成立になり，一方で対数 Sobolev 不等式は成り立つ [25]. その意味で，Riemann 多様体上で「次元」を考慮した議論を展開する際には，重みつき体積測度を考えるのが自然といえる．

3.3 節の最後に見たように，重みつき測度を導入することは，拡散過程あるいは作用素半群の観点では，生成作用素に勾配ベクトル場による 1 階微分の項を付け加えることに対応する．また，Ricci 曲率も重み関数に応じて適切な形に変形する必要がある．

4.1. 準備

ここでは，次元を加味した条件を記述するための諸概念を定義する．まず，Ricci 曲率テンソルの，重みつき測度に対する一般化を導入する．

Definition 4.1 M を n 次元 Riemann 多様体とする．$N \in [n,\infty]$ に対して，Bakry-Émery N-Ricci テンソルを

$$\mathrm{Ric}_\psi^N := \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\,\psi + \frac{1}{N-n}\nabla\psi \otimes \nabla\psi$$

で定める．$N=\infty$ のとき，3.3 節の最後で導入した Bakry-Émery Ricci テンソルに一致する．また，$N=n$ は，$\nabla\psi = 0$ のときのみ許容するとする．

次に，Definition 3.2 の条件を次元の上限を加味した形へ拡張したものを Sturm [60] に従って導入する．

Definition 4.2 (M,d) をポーランド距離空間，ν を M 上の σ-有限な Borel 測度として，測度つき距離空間 (M,d,ν) を考える．また，$K \in \mathbb{R}$, $N \geq 1$ とする [20]．

---
[18] 勿論，無限次元空間上の解析では逆に，次元に依存しない概念であることが重要になる．
[19] ただし，無関係でもない．例えば次の脚注を参照．
[20] 以下の曲率次元条件が成り立てば，N は空間の Hausdorff 次元以上でなければならないことが分かる．

(i) Rényiエントロピー汎関数$S_N : \mathcal{P}_2(M) \to \bar{\mathbb{R}}$を，以下で定める：

$$S_N(\mu) := \begin{cases} -\displaystyle\int_M \rho^{-1/N}\,d\nu & (d\mu = \rho\,d\nu\text{のとき}), \\ \infty & (\text{そうでないとき}). \end{cases} \tag{4.1}$$

(ii) $(t,\theta) \in [0,1] \times [0,\infty)$に対して，定数$\tau_{K,N}^{(t)}(\theta)$を以下で定める：

$$\tau_{K,N}^{(t)}(\theta) := \begin{cases} t^{1/N}\left(\dfrac{\sin(t\theta\sqrt{K/(N-1)})}{\sin(\theta\sqrt{K/(N-1)})}\right)^{1-1/N} & (K\theta^2 < (N-1)\pi^2\text{のとき}), \\ \infty & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

ただし，$K=0$のときは極限値として，$K<0$のときは$\sinh x$を用いた自然な拡張を取るものとする．また，$\tau_{K,N}^{(t)}$の定義の場合分けは$K>0$の場合のみ意味を持ち，Bonnet-Myersの定理による直径の上限と対応している．この量は，測度を測地線に沿って輸送した場合の，密度の歪み方を表す関数になっている．

(iii) (M,d,ν)が曲率次元条件$\mathsf{CD}(K,N)$をみたす，とは，任意の$\mu_i = \rho_i\nu \in \mathcal{P}_2(M)$ $(i=0,1)$に対して，$W_2(\mu_0,\mu_1)$を実現する$\pi \in \Pi(\mu_0,\mu_1)$とμ_0,μ_1をつなぐ測地線$(\mu(t))_{t\in[0,1]}$が存在して，各$N' \geq N$, $t \in [0,1]$に対して，次の不等式をみたすこととする：

$$\begin{aligned} S_{N'}(\mu(t)) \leq -\int_{M\times M} \Big[&\tau_{K.N'}^{(1-t)}(d(x_0,x_1))\rho_0^{-1/N'}(x_0) \\ &+ \tau_{K.N'}^{(t)}(d(x_0,x_1))\rho_1^{-1/N'}(x_1)\Big]\pi(dx_0dx_1). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Definition 4.2 (iii)とほぼ同等の概念が，[60]と同時期にLottとVillani [43]によって導入されている．その概念では，Rényiエントロピーを考える代わりに，特定の性質を持つ汎関数の族(Rényiエントロピーを含む)を対象として，同様の不等式が成り立つことを要請している．

(4.2)は，適切な変形の後に$N' \to \infty$とすることで，Definition 3.2の条件を導く．その意味で$\mathsf{CD}(K,N)$は，Definition 3.2の条件の自然な拡張になっている．また，$K=0$の時は，より単純な，Rényiエントロピー$S_{N'}$ $(N' \geq N)$の凸性を表す式となる．

4.2. 「Ricci曲率が下に有界」かつ「次元が上に有界」の別の定式化

まず，Theorem 3.3に対応する結果として，「Ricci曲率が下に有界かつ次元が上に有界」と同値な条件を，結果の新旧を問わず一纏めにして以下に述べる：

Theorem 4.3 Mをn次元完備Riemann多様体で，更に確率的完備とする．$\psi \in C^2(M)$とし，$\nu = e^{-\psi}\,\mathrm{vol}_g$とする．生成作用素$\mathcal{L}$を$\mathcal{L} := \Delta - \nabla\psi\cdot\nabla$で定め，$P_t^\psi = e^{t\mathcal{L}}$とする．また，$K \in \mathbb{R}$，$N \in [n,\infty]$とする．このとき，次は同値：

(i) $\mathrm{Ric}_\psi^N \geq K$.

(ii) 曲率次元条件$\mathsf{CD}(K,N)$が成り立つ．

(iii) $\mu_i(t)$ $(i=0,1)$ を，拡散方程式 $\partial_t\mu(t)=\mathcal{L}\mu(t)$ の (weak sense の) 解とする．このとき，$s>t\ge 0$ について次が成り立つ：

$$W_2(\mu_0(t),\mu_1(s))^2 \le \frac{e^{-2Kt}-e^{-2Ks}}{2K(s-t)} W_2(\mu_0(0),\mu_1(0))^2 + \frac{N}{2}(s-t)\log\left(\frac{1-e^{-2Ks}}{1-e^{2Kt}}\right).$$

(iv) 各 $f\in C_b^{\mathrm{Lip}}(M)$，$t\ge 0$ と $x\in M$ に対して，

$$|\nabla P_t^\psi f|(x)^2 \le e^{-2Kt}P_t^\psi(|\nabla f|^2)(x) - \frac{1-e^{-2Kt}}{NK}(\mathcal{L}P_t^\psi f)(x)^2.$$

(v) 各 $f\in C^\infty(M)$ と $x\in M$ で，曲率次元不等式と呼ばれる，次の不等式が成り立つ：

$$\frac{1}{2}\big(\mathcal{L}(|\nabla f|^2)(x) - 2\langle\nabla f,\nabla\mathcal{L}f\rangle(x)\big) \ge K|\nabla f|(x)^2 + \frac{1}{N}(\mathcal{L}f)(x)^2. \tag{4.3}$$

各条件とも，$N\to\infty$ とすることで，Theorem 3.3 の対応する条件を導く．ただし，(iii) ではそのまま極限を取れないため，まず $s\downarrow t$ としてから $N\to\infty$ とする．

3.3 節と同様に，条件の間の証明の流れについて言及する．条件 (i) および (v) の導入およびこれらの同値性は Bakry と Émery による (例えば [5, 38] 参照)．$\nabla\psi=0$ の場合は，Bochner-Weitzenböck の公式 (3.7) から (v) が従う ($\nabla\psi\neq 0$ の場合も同様)．3.3 節で Γ_2-条件を導く際には (3.7) の $\|\operatorname{Hess} f\|^2$ の項を無視するのだが，そこをもう少し詳しく評価すると (4.3) になる．(i) と (ii) の同値性は，Sturm [60] による (cf. [43])．また，条件 (iv) の導入，および，この条件と (v) との同値性は F.-Y. Wang [67] による．この部分の議論は，次元の上限を設定していない場合の議論に準じており，易しい．条件 (iii) の導入，および，(iv) との同値性は講演者による．ここでの議論は Theorem 3.3 の (iii) と (iv) の同値性を導く際に用いた議論 ([34] の結果に基づく) を拡張することで得られる．また，3.1 節の議論を拡張し，$\mathcal{L}$ に付随する拡散過程の結合法を用いることで，(i) から (iii) を得ることもできる．最後の 2 つの結果については，より詳しく，次が得られる：

Theorem 4.4 前の Theorem 4.3 と同様の仮定を置く．また，$p\in[2,\infty)$ とする．

(1) $\mathrm{Ric}_\psi^N\ge K$ を仮定する．このとき，拡散方程式 $\partial_t\mu(t)=\mathcal{L}\mu(t)$ の (weak sense の) 解 $\mu_i(t)$ $(i=0,1)$ および $s>t\ge 0$ について次が成り立つ：

$$W_p(\mu_0(t),\mu_1(s))^2 \le \frac{e^{-2Kt}-e^{-2Ks}}{2K(s-t)} W_p(\mu_0(0),\mu_1(0))^2 + \frac{N+p-2}{2}(s-t)\log\left(\frac{1-e^{-2Ks}}{1-e^{2Kt}}\right). \tag{$\hat{W}_p$}$$

(2) $q\in(1,2]$，$p^{-1}+q^{-1}=1$ とする．このとき，($\hat{W}_p$) は次と同値：各 $f\in C_b^{\mathrm{Lip}}(M)$，$t\ge 0$ と $x\in M$ に対して，

$$|\nabla P_t^\psi f|(x)^2 \le e^{-2Kt}P_t^\psi(|\nabla f|^q)(x)^{2/q} - \frac{1-e^{-2Kt}}{(N+(2-q)/(q-1))K}(\mathcal{L}P_t^\psi f)(x)^2. \tag{$\hat{G}_q$}$$

よって，Theorem 4.4 を加味して条件間の関係を図式にすると次のようになる：

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{i}) \arrow[r, Rightarrow, dashed] \arrow[d, Leftrightarrow, dashed] \arrow[dr, Rightarrow, dashed] & (\hat{W}_p) \arrow[r, Leftrightarrow] & (\hat{G}_q) & \\
(\mathrm{ii}) & (\hat{W}_2) \arrow[r, Leftrightarrow] & (\hat{G}_2) \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathrm{v}) \arrow[d, Leftrightarrow, dashed] \\
& & & (\mathrm{i})
\end{tikzcd}$$

破線の矢印では，空間の滑らかさに依存した議論を用いる．3.3 節の図式と比べると，欠けた矢印がいくつもある．それらの成立の是非は今後の課題であり，講演で幾分か考察を加える予定である．この場合にも (iv) や (v) は豊富な応用を持つため，測度つき距離空間上の幾何解析の観点からは，「(ii)$\Rightarrow$($\hat{W}_2$)」の成立の是非が最も興味深い．

この節を締めるにあたり，Theorem 4.4 の証明について，簡単に触れておこう．

(i) の証明は，3.1 節で紹介した結合法の拡張による．ただし，対象とする熱分布あるいは Brown 運動の終端時刻が異なるため，異なる時間スケールで粒子を動かす必要がある．その結果として，3.1 節の考察 (b) で見たように，“2 粒子間距離の martingale 部分” が消えずに残る．実際，($\hat{W}_p$) が $p = \infty$ のときは ($s = t$ の場合を除き) 無意味な主張となることは，この性質と関係があると考えられる (3.1 節の考察 (c) を参照)．また，現時点では結合法のみで直接 ($\hat{W}_p$) を示せてはおらず，Wasserstein 距離が測地距離であるという性質を利用している．

(ii) の証明は，2.2 節で紹介した Theorem 2.3 の議論の拡張による．やはり ($\hat{W}_p$)$\Rightarrow$($\hat{G}_q$) の議論は (比較的) 易しい．逆の証明では，熱半群を Markov 核の作用 (熱核 $p_t(x, y)$ による積分作用素) とみなしたときに，変数 x と同時に t も動かして $\mathcal{P}(M)$ 上の曲線とみなすことが鍵になる (Theorem 2.3 および Theorem 3.3 の証明では，x のみを動かす)．その結果，時間のずれに対応する項に，次元の上限 N が現れる (($\hat{G}_q$) では，$\mathcal{L}P_t^{\psi} f$ を $\partial_t P_t^{\psi} f$ と解釈する)．

5. 関連する結果

ここで述べたような，Ricci 曲率の下限あるいは曲率次元条件およびそれらと同値な条件については，Riemann 多様体以外の状況でも盛んに研究されている．例えば，3.2 節や 3.3 節で述べた Alexandrov 空間上の解析も，その一例に当たる．ここでは，

(a) 劣 Riemann 多様体 (特に，Lie 群) と，その上の 2 階準楕円型微分作用素に付随する拡散過程 (および，それに付随する確率分布と半群)

(b) Finsler 多様体と，その上の (非線形) 熱方程式の解

(c) 飛躍型 Markov 過程

の各々について，近年の研究動向を述べておく．いずれの場合も，Riemann 多様体の場合とは異なる様相を示している．

まず, (a) について, この場合の最も基本的な例である Heisenberg 群上では Theorem 3.3 (ii) および Theorem 4.3 (ii) は成立しない [29]．また，Theorem 3.3 (iv) については，類似しているが質的に異なる結果 [21] が成り立つ [6, 13, 14, 39, 46] (特に [13] により，「Heisenberg 群上では (iv) そのものはいかなる $K \in \mathbb{R}$ でも不成立」まで示されている)．(iii) については，Theorem 2.3 がこの場合にも適用可能なため，前述の結果から (iii) と類似の結果が従う (空間は滑らかだが，結合法による証明は知られていない [22])．Theorem 4.3 (v) については，近年 Baudoin, Bonnefont, Garofalo らによって劣 Riemann 多様体上への拡張が研究され，熱核評価などの関数不等式について顕著な応用が得られている [7, 8, 9, 10]．その一方で，彼らの条件からは，Theorem 3.3 (iv) に相当する前述の評価は得られていない [23]．

(b) の場合には，ここで挙げた条件のうち，Theorem 3.3 (i) にあたる条件をうまく与えることで Theorem 3.3 (ii) と同値な条件を見出すことができる [47]．Finsler 多様体には標準的な測度がないため，「Ricci 曲率の (同値な) 定式化 (Theorem (ii))」を Finsler 計量のみから考えるには些かの不都合がある (3.3 節の最後の段落を参照のこと)．適当に測度を与えることで，単なる Riemann 多様体からの類推ではなく，重みつき Riemann 多様体の類推として見ることが要になる．しかし，この枠組では (W_2) は (典型的には) 不成立になる [50]．この場合，熱分布は初期分布に関して非線形であり，3.2 節で (W_2) の導出について述べたことと符合する．その一方，適切に概念を拡張すると，Γ_2-条件および (G_2) に相当する結果は曲率条件から従う [49]．

(c) については，対象は限定的であり，結果もまだ発展途上ではある．Markov 連鎖の結合法には膨大な研究があるが，ここでは曲率条件と関わる部分に焦点を絞る．まず，連続状態を許容する，離散時間の Markov 連鎖に対して「(W_1) に相当する性質をみたすことが『Ricci 曲率が下に有界』の定義」とし，その (幾何学的) 帰結が研究された [52]．のち，有限状態かつ連続時間の Markov 連鎖に対して，3.2 節の手法に関する研究が [17, 44] により展開された．問題は，離散集合上の距離が測地的でないため，Wasserstein 距離の性質が悪くなることにある．その問題を克服するため，彼らは Benamou-Brenier 公式に基づく新しい (Wasserstein 型の) 距離を確率測度の空間上に導入した．そして，その応用として，Theorem 3.3 の (ii)$\Rightarrow$$(W_2)$ に相当する結果を得ている．また，この考え方は [15] で Lévy 過程へと拡張されている．

参考文献

[1] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré, *Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below*, Preprint. Available at: arXiv:1106.2090.

[2] ______, *Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below*, Preprint. Available at: arXiv:1109.0222.

[3] ______, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, second ed., Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[4] M. Arnaudon, K.A. Coulibaly, and A. Thalmaier, *Horizontal diffusion in C^1-path space*, to appear in Séminaire de Probabilités, Lecture Notes in Mathematics (2009); arXiv:0904.2762.

[21] 不等式の形が，Riemann 多様体の場合と異なり，「微分形の不等式の積分」という形になっていない．

[22] 直前の脚注より，「微小変分の評価の積分」という議論で結論を得ることは期待できない

[23] 2 つ前の脚注により，Riemann 多様体の場合と同様の議論は機能しない．

[5] D. Bakry, *On Sobolev and logarithmic Sobolev inequalities for Markov semigroups*, New trends in stochastic analysis (Charingworth, 1994), World Sci. Publ. River Edge, NJ, 1997, pp. 43–75.

[6] D. Bakry, F. Baudoin, M. Bonnefont, and D. Chafaï, *On gradient bounds for the heat kernel on the Heisenberg group*, J. Funct. Anal. **255** (2008), no. 8, 1905–1938.

[7] F. Baudoin and M. Bonnefont, *Log-Sobolev inequalities for subelliptic operators satisfying a generalized curvature dimension inequality*, J. Funct. Anal. **262** (2012), no. 6, 2646–2676.

[8] F. Baudoin, M. Bonnefont, and N. Garofalo, *A sub-Riemannian curvature-dimension inequality, volume doubling property and the Poincaré inequality*, preprint. arXiv:1007.1600.

[9] F. Baudoin and Garofalo, *Curvature-dimension inequalities and Ricci lower bounds for sub-Riemannain manifolds with transverse symmetries*, preprint. arXiv:1101.3590.

[10] F. Baudoin and B. Kim, *Sobolev, Poincaré and isoperimetric inequalities for subelliptice diffusion operatoers satisfying a generalized curvature dimension inequality*, preprint. arXiv:1203.3789.

[11] M.-F. Chen and F.-Y. Wang, *Application of coupling method to the first eigenvalue on manifold*, Sci. China Ser. A **37** (1994), no. 1, 1–14.

[12] M. Cranston, *Gradient estimates on manifolds using coupling*, J. Funct. Anal. **99** (1991), no. 1, 110–124.

[13] B. Driver and T. Melcher, *Hypoelliptic heat kernel inequalities on the Heisenberg group*, J. Funct. Anal. **221** (2005), no. 5, 340–365.

[14] N. Eldredge, *Gradient estimates for the subelliptic heat kernel on H-type groups*, preprint; arXiv:0904.1781.

[15] M. Erbar, *Gradient flow of the entropy for jump processes*, Preprint Available at: arXiv:1204.2190.

[16] ______, *The heat equation on manifolds as a gradient flow in the Wasserstein space*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **46** (2010), no. 1, 1–23.

[17] M. Erbar and J. Maas, *Ricci curvature of finite Markov chains via convexity of the entropy*, Preprint. Available at: arXiv:1111.2687.

[18] S. Fang, J. Shao, and K.-T. Sturm, *Wasserstein space over the wiener space*, Probab. Theory Related Fields **146** (2010), no. 3–4, 535–565.

[19] N. Gigli, *On the differential structure of metric measure spaces and applications*, Preprint. Available at: arXiv:1205.6622.

[20] ______, *On the heat flow on metric measure spaces: existence, uniqueness and stability*, Calc. Var. Partial Differential Equations **39** (2010), no. 1–2, 101–120.

[21] N. Gigli, K. Kuwada, and S. Ohta, *Heat flow on Alexandrov spaces*, to appear in Comm. Pure. Appl. Math.

[22] N. Gigli and S. Ohta, *First variation formula in Wasserstein spaces over compact Alexandrov spaces*, To appear in Canad. Math. Bull.

[23] N. Gozlan, C. Loberto, and P.-M. Samson, *Hamilton-jacobi equations on metric spaces and transport entropy inequalities*, Preprint. Available at: arXiv:1203.2783.

[24] A. Grigo'yan, *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999), no. 2, 135–249.

[25] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. **97** (1975), no. 4, 1061–1083.

[26] E. P. Hsu, *Stochastic analysis on manifolds*, Graduate studies in mathematics, 38, American mathematical society, Providence, RI, 2002.

[27] R. Jordan, D. Kinderlehrer, and F. Otto, *The variational formulation of the Fokker-Planck equation*, SIAM J. Math. Anal. **29** (1998), no. 1, 1–17.

[28] N. Juillet, *Diffusion by optimal transport on Heisenberg groups*, Preprint.

[29] ______, *Geometric inequalities and generalized Ricci bound on the Heisenberg group*, Int. Math. Res. Not. **2009** (2009), no. 13, 2347–2373.

[30] W. Kendall, *Nonnegative Ricci curvature and the Brownian coupling property*, Stochastics **19** (1986), 111–129.

[31] W.S. Kendall, *From stochastic parallel transport to harmonic maps*, New directions in Dirichlet forms, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI; International Press, Cambridge, MA, 1998, pp. 49–115.

[32] K. Kuwada, *Convergence of time-inhomogeneous geodesic random walks and its application to coupling methods*, to appear in Ann. Probab.

[33] ______, *Couplings of the Brownian motion via discrete apporoximation under lower Ricci curvature bounds*, Probabilistic Approach to Geometry (Tokyo), Adv. Stud. Pure Math. 57, Math. Soc. Japan, 2010, pp. 273–292.

[34] ______, *Duality on gradient estimates and Wasserstein controls*, J. Funct. Anal. **258** (2010), no. 11, 3758–3774.

[35] K. Kuwada and R. Philipowski, *Coupling of Brownian motion and Perelman's $\mathcal{L}$-functional*, J. Funct. Anal. **260** (2011), no. 9, 2742–2766.

[36] K. Kuwada and K.-Th. Sturm, *Monotonicity of time-dependent transportation costs and coupling by reflection*, Preprint. Available at: `http://www.math.ocha.ac.jp/kuwada/`.

[37] K. Kuwae, Y. Machigashira, and T. Shioya, *Sobolev spaces, Laplacian and heat kernel on Alexandrov spaces*, Math. Z. **238** (2001), no. 2, 269–316.

[38] M. Ledoux, *The geometry of Markov diffusion generators*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **9** (2000), no. 2, 305–366.

[39] H.-Q. Li, *Estimation optimale du gradient du semi-groupe de la chaleur sur le groupe de heisenberg*, J. Funct. Anal. **236** (2006), no. 2, 369–394.

[40] T. Lindvall, *Lectures on the coupling method*, John Wiley & Sons, Chichester and New York, 1992.

[41] T. Lindvall and L.C.G. Rogers, *Coupling of multidimensional diffusions by reflection*, Ann. Probab. **14** (1986), no. 3, 860–872.

[42] S. Lisini, *Characterization of absolutely continuous curves in Wasserstein spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations **28** (2007), no. 1, 85–120.

[43] J. Lott and C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Ann. Math. **169** (2009), no. 3, 903–991.

[44] J. Maas, *Gradient flow of the entropy for finite Markov chains*, J. Funct. Anal. **261** (2011), no. 8, 2250–2292.

[45] R.J. McCann and P. Topping, *Ricci flow, entropy and optimal transportation*, Amer. J. Math. **132** (2010), 711–730.

[46] T. Melcher, *Hypoelliptic heat kernel inequalities on Lie groups*, Stochastic Process. Appl. **118** (2008), no. 3, 368–388.

[47] S. Ohta, *Finsler interpolation inequalities*, Calc. Var. Partial Differential Equations **36** (2009), 211–249.

[48] ______, *Gradient flows on Wasserstein spaces over compact Alexandrov spaces*, Amer. J. Math **131** (2009), no. 2, 475–516.

[49] S. Ohta and K.-Th. Sturm, *Bochner-Weitzenböck formula and Li-Yau estimates on Finsler manifolds*, Preprint (2011). Available at arXiv:1105.0983.

[50] ———, *Non-contraction of heat flow on Minkowski spaces*, Preprint (2010). Available at arXiv:1009.2312.

[51] ———, *Heat flow on Finsler manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **62** (2009), 1386–1433.

[52] Y. Ollivier, *Ricci curvature of Markov chains on metric spaces*, J. Funct. Anal. **256** (2009), no. 3, 810–864.

[53] F. Otto, *The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation*, Comm. Partial Differential Equations **26** (2001), no. 1–2, 101–174.

[54] F. Otto and C. Villani, *Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality*, J. Funct. Anal. **173** (2000), no. 2, 361–400.

[55] A. Petrunin, *Alexandrov meets Lott-Villani-Sturm*, Preprint (2009). Available at arXiv:1003.5948.

[56] Z. Qian, H.-C. Zhang, and X.-P. Zhu, *Sharp spectral gap and Li-Yau's estimate on Alexandrov spaces*, Preprint. Available at: arXiv:1102.4159.

[57] S. Rachev and L. Rüschendorf, *Mass transportation problems. Vol. I: Theory, Vol. II: Applications*, Probability and its applications, Springer-Verlag, New York, 1998.

[58] K.-Th. Sturm, *Analysis on local Dirichlet spaces.III. The parabolic Harnack inequality*, J. Math. Pures. Appl.(9) **75** (1996), no. 3, 273–297.

[59] ———, *On the geometry of metric measure spaces. I*, Acta. Math. **196** (2006), no. 1, 65–131.

[60] ———, *On the geometry of metric measure spaces. II*, Acta. Math. **196** (2006), no. 1, 133–177.

[61] H. Thorisson, *Coupling, stationarity, and regeneration*, Probability and its applications, Springer-Verlag, New York, 2000.

[62] P. Topping, *$\mathcal{L}$-optimal transportation for Ricci flow*, J. Reine Angew. Math. **636** (2009), 93–122.

[63] C. Villani, *Topics in optimal transportations*, Graduate studies in mathematics, 58, American mathematical society, Providence, RI, 2003.

[64] ———, *Optimal transport, old and new*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 338, Springer-Verlag, 2008.

[65] M.-K. von Renesse and K.-Th. Sturm, *Transport inequalities, gradient estimates, entropy and Ricci curvature*, Comm. Pure. Appl. Math. **58** (2005), no. 7, 923–940.

[66] F.-Y. Wang, *Functional inequalities, Markov semigroups, and spectral theory*, Mathematics Monograph Series 4, Science Press, Beijing, China, 2005.

[67] ———, *Equivalent semigroup properties for curvature-dimension condition*, Bull. Sci. Math. **135** (2011), no. 6–7, 803–815.

[68] H.-C. Zhang and X.-P. Zhu, *Yau's gradient estimate on Alexandrov spaces*, Preprint. Available at: arXiv:1012.4233.

[69] ———, *On a new definition of Ricci curvature on Alexandrov spaces*, Acta. Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. **30** (2010), no. 6, 1949–1974.

[70] ———, *Ricci curvature on Alexandrov spaces and rigidity theorems*, Comm. Anal. Geom. **18** (2010), no. 3, 503–553.

[71] J. Q. Zhong and H. C. Yang, *Estimates of the first eigenvalue of a compact riemannian manifold*, Scientia, Sinica **27** (1984), no. 12, 1251–1265.