最大直径定理に対する確率論的アプローチ

粟田 和正

(お茶の水女子大学)

2011 年 8 月 2 日 確率論ヤングサマーセミナー

(潮来ホテル)

§1. Riemann 多様体, 曲率, そして最大直径定理

(M, g): Riemann 多様体

$(\dim M \geq 2,\ \partial M = \emptyset$ を仮定)

つまり,

M: (可算コンパクト) 位相多様体

g: Riemann 計量 (接空間上の内積)

(M, g): Riemann 多様体

$(\dim M \geq 2, \partial M = \emptyset$ を仮定)

つまり,

M: (可算コンパクト) 位相多様体

g: Riemann 計量 (接空間上の内積)

g を定める $\Leftrightarrow$ M の形，大きさを定める

Riemann 計量から定まる構造

- 測地距離 d (以下，d: 完備を仮定)
- Riemann 測度 μ

Riemann 計量から定まる構造

- 測地距離 d (以下，d: 完備を仮定)
- Riemann 測度 μ
- 曲率

Riemann 計量から定まる構造

- 測地距離 d (以下，d: 完備を仮定)
- Riemann 測度 μ
- 曲率
- Laplace(-Beltrami) 作用素 Δ

Riemann 計量から定まる構造

- 測地距離 d (以下，d: 完備を仮定)
- Riemann 測度 μ
- 曲率
- Laplace(-Beltrami) 作用素 Δ

  $\Rightarrow$ Brown 運動

曲率…空間の各点での “曲がり具合” を記述

曲率…空間の各点での “曲がり具合” を記述

Ricci 曲率… “平均化された曲がり具合”

曲率…空間の各点での “曲がり具合” を記述

Ricci 曲率… “平均化された曲がり具合”

$\Leftrightarrow$ 球の体積増大度

曲率…空間の各点での "曲がり具合" を記述

Ricci 曲率…"平均化された曲がり具合"

$\Leftrightarrow$ 球の体積増大度

<u>例</u>

- 標準 Euclid 空間 $\mathbb{R}^N \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ric} \equiv 0$
- 標準単位球面 $\mathbb{S}^N(1) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ric} \equiv N-1$
- 標準円筒 $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ric} \equiv 0$

Bonnet-Myers の定理

$$\mathbf{Ric} \geq \boldsymbol{K} > \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{diam}(\boldsymbol{M}) \leq \sqrt{\frac{\boldsymbol{N}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{K}}}\boldsymbol{\pi}.$$

特に， $\boldsymbol{M}$**: compact**

Bonnet-Myers の定理

$$\mathrm{Ric} \geq K > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{diam}(M) \leq \sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi.$$

特に，M: compact

Cheng の最大直径定理

$$\mathrm{Ric} \geq K > 0, \mathrm{diam}(M) = \sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi$$

$$\Rightarrow \quad (M, g) \simeq \mathbb{S}^N\left(\sqrt{\frac{N-1}{K}}\right) \text{ (等距離同型)}$$

なぜ別証明を考えるのか？

なぜ別証明を考えるのか？

- 好奇心

なぜ別証明を考えるのか？

- 好奇心
- 確率論の可能性を追求

なぜ別証明を考えるのか？

- 好奇心
- 確率論の可能性を追求
- 拡張の際，証明法に応じた利点がある
  (あるいは，別証明は拡張の副産物)

§2. 確率解析の手法による
最大直径定理の証明

定義

$\boldsymbol{X_t}$: M 上の Brown 運動

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall f \in C_0^\infty(M)$,

$$\boldsymbol{f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(X_s)ds}$$

は martingale

定義

X_t: M 上の Brown 運動

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall f \in C_0^\infty(M)$,

$$f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(X_s)ds$$

は martingale

$$\boxed{G \subset M\text{: 開}, t > 0 \ \Rightarrow \ \mathbb{P}[X_t \in G] > 0}$$

§2.1. Bonnet-Myers の定理の証明

$p \in M$, $d_p(x) := d(p, x)$

$d_p(X_t)$: 動径過程
($M = \mathbb{R}^N$ ならば，$d_p(X_t)$: Bessel 過程)

目標

$$\mathrm{Ric} \geq K > 0$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left[d_p(X_t) > \sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi \right] = 0$$

($\Rightarrow$ Bonnet-Myers の定理)

距離関数に対する伊藤の公式

$$\begin{aligned} d_p(X_t) &= d_p(X_0) + \beta_t \\ &\qquad + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta d_p(X_s)\,ds - L_t \\ &\le d_p(X_0) + \beta_t + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta d_p(X_s)\,ds, \end{aligned}$$

- β_t: 1 次元標準 Brown 運動
- $L_t \geq 0$: 距離関数の特異点からの影響

Laplacian 比較定理

$$\mathrm{Ric} \geq K > 0 \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\Delta d_p(x) \leq \varphi_{N,K}(d_p(x)),$$

Laplacian 比較定理

$$\mathrm{Ric} \geq K > 0 \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\Delta d_p(x) \leq \varphi_{N,K}(d_p(x)),$$

$$\varphi_{N,K}(x) := \frac{\sqrt{(N-1)K}}{2}\cot\left(\sqrt{\frac{K}{N-1}}x\right)$$

Laplacian 比較定理

$$\mathrm{Ric} \geq K > 0 \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\Delta d_p(x) \leq \varphi_{N,K}(d_p(x)),$$

$$\varphi_{N,K}(x) := \frac{\sqrt{(N-1)K}}{2}\cot\left(\sqrt{\frac{K}{N-1}}x\right)$$

- 曲率 $\leftrightsquigarrow$ $\mathrm{Hess}\, d_p$
- Ricci 曲率 $\leftrightsquigarrow$ $\mathrm{tr}(\mathrm{Hess}\, d_p) = \Delta d_p$

Laplacian 比較定理

$$\mathrm{Ric} \geq K > 0 \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\Delta d_p(x) \leq \varphi_{N,K}(d_p(x)),$$

$$\varphi_{N,K}(x) := \frac{\sqrt{(N-1)K}}{2}\cot\left(\sqrt{\frac{K}{N-1}}x\right)$$

- 曲率 $\leftrightsquigarrow$ $\mathrm{Hess}\, d_p$
- Ricci 曲率 $\leftrightsquigarrow$ $\mathrm{tr}(\mathrm{Hess}\, d_p) = \Delta d_p$
- "$=$" $(\forall x)$ $\Leftrightarrow$ $M \simeq \mathbb{S}^N\left(\sqrt{\frac{N-1}{K}}\right)$

$$\boxed{\begin{gathered}\rho_t\text{: } d\rho_t = d\beta_t + \varphi_{N,K}(\rho_t)dt \text{ の解} \\ \Downarrow \text{SDE 比較定理} \\ \boxed{d_p(X_0) \le \rho_0 \ \Rightarrow \ d_p(X_t) \le \rho_t \ (\forall t \ge 0)}\end{gathered}}$$

$$\star \ \varphi_{N,K}(x) \sim \frac{N-1}{2}\left(x - \sqrt{\frac{N-1}{K}\pi}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \ \rho_t \text{ は } \sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi \text{ に到達しない} \qquad \square$$

§2.2. 最大直径定理の証明

$$d(p,q) = \sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi$$ と仮定.

目標

a.e.x で $\Delta d_p(x) = \varphi_{N,K}(d_p(x))$

($\Rightarrow$ 最大直径定理)

$x \in M$: $d_p(x) + d_q(x) = \sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi$,

$X_0 = x$ を仮定

考え方

$d_p(X_t) + d_q(X_t)$ の挙動を調べる

(期待値をみる)

伊藤の公式より,

$$d_p(X_t) + d_q(X_t) \leq \sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi + \text{martingale}$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t (\Delta d_p + \Delta d_q)(X_s)ds$$

Laplacian 比較定理より,

$$(\Delta d_p + \Delta d_q)(X_s)$$
$$\leq \varphi_{N,K}(d_p(X_s)) + \varphi_{N,K}(d_q(X_s))$$

$$\boxed{(d_p + d_q)(X_t) \in \left[\sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi, 2\sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi\right]}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{d_p} + \boldsymbol{d_q})(\boldsymbol{X_t}) \in \left[\sqrt{\frac{\boldsymbol{N-1}}{\boldsymbol{K}}}\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{2}\sqrt{\frac{\boldsymbol{N-1}}{\boldsymbol{K}}}\boldsymbol{\pi}\right]}$$

$$\Rightarrow \varphi_{\boldsymbol{N},\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{d_p}(\boldsymbol{X_s})) + \varphi_{\boldsymbol{N},\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{d_q}(\boldsymbol{X_s})) \leq \boldsymbol{0}$$

$$\boxed{(d_p + d_q)(X_t) \in \left[\sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi, 2\sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi\right]}$$

$$\Rightarrow \varphi_{N,K}(d_p(X_s)) + \varphi_{N,K}(d_q(X_s)) \leq 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[d_p(X_t) + d_q(X_t)] = \sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi$$

$$\boxed{(d_p + d_q)(X_t) \in \left[\sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi, 2\sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi\right]}$$

$$\Rightarrow \varphi_{N,K}(d_p(X_s)) + \varphi_{N,K}(d_q(X_s)) \leq 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[d_p(X_t) + d_q(X_t)] = \sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[(\Delta d_p + \Delta d_q)(X_s)]$$

$$= \mathbb{E}[\varphi_{N,K}(d_p(X_s)) + \varphi_{N,K}(d_q(X_s))]$$

$$(\text{a.e.} s \in [0, t])$$

$$\Rightarrow \Delta d_p(x) = \varphi_{N,K}(x) \ (\text{a.e.} x \in M) \qquad \square$$

§3. Bakry-Émery tensor に基づく拡張

Bakry-Émery tensor:

$$\mathbf{Ric}_Z^m := \mathbf{Ric} - \frac{1}{2}(\nabla Z)^{\mathsf{sym}} - \frac{1}{4(m-N)} Z \otimes Z$$

(Z: ベクトル場, $m \in [N, \infty]$)

<u>対応関係</u>

$$\frac{1}{2}\Delta \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{Ric} = \mathbf{Ric}_0^N$$

$$\frac{1}{2}\Delta + Z \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{Ric}_Z^m$$

$$(\infty \geq m > N)$$

定理[K.]

$K \in (0,\infty)$, $m < \infty$ とする.

(i) $\mathrm{Ric}_Z^m \geq K \Rightarrow \mathrm{diam}(M) \leq \sqrt{\dfrac{m-1}{K}}\pi$

(ii) $\mathrm{Ric}_Z^m \geq K$ & $\mathrm{diam}(M) = \sqrt{\dfrac{m-1}{K}}\pi$

$\Rightarrow Z \equiv 0,\ m = N,$

$$(M,g) \simeq \mathbb{S}^N\left(\sqrt{\frac{N-1}{K}}\right)$$

証明の概略

(i) Laplacian 比較定理を, $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\Delta} + Z$ と Ric_Z^m の間の関係として拡張

(ii) 拡張された比較定理で等号成立

$$\Downarrow$$

もとの Laplacian 比較定理で等号成立

既知の結果との対比

- Z が勾配型 (∇f の形) の場合:
  重みつき測度 $\mathrm{e}^{2f}\mu$ による幾何学的定式化, 拡張が既知.
- Z が勾配型でない場合:
  Bonnet-Myers の定理, 最大直径定理共に初.

§4. 関連する結果

(i) より弱い曲率条件 $\Rightarrow$ M: compact
[X.-M. Li '95, X.-M. Li & F.-Y. Wang '03]

- 確率解析的手法

(ii) Sobolev の不等式による $\underline{\text{Bonnet-Myers}}$ の証明
[Bakry & Ledoux '96]

- 解析的手法
- Markov generator の言葉で抽象的に定式化
(Γ_2-条件，内在的距離 etc.)
- generator が対称化測度を持つ事を仮定

(iii) 最大直径定理 の Bakry-Émery tensor 版 [Q. Ruan '09]

- 重みつき測度による幾何的手法
- Z が勾配型 (∇f の形) の場合

(iv) 測度距離空間への Bonnet-Myers の拡張 [Sturm '06, 太田 '07, Ollivier '09 etc.]

- 幾何的手法
- 最適輸送理論の言葉で曲率条件を定式化

(v) 測度距離空間での 最大直径定理
(注：球面以外でも最大直径が実現される)

- [太田 '07]
  - 最適輸送理論による曲率条件
  - 結論が位相同型
- [H.-C. Zhang & X.-P. Zhu '09]
  - Alexandrov 空間
  - Ricci 曲率の新しい定義を導入
  - 結論が等距離同型