Bakry-Émery 型微分評価と関連する話題*1

桒田 和正*2

お茶の水女子大学人間文化創成科学研究科

1 Bakry-Émery の微分評価とは

一般に，生成作用素 $\mathcal{L}$ を持つ半群 $P_t = \mathrm{e}^{t\mathcal{L}}$ に対して，“Bakry-Émery の (L^p-) 微分評価” とは，次の形の評価を指す：

$$|\nabla P_t f|(x) \le \mathrm{e}^{-Kt} P_t(|\nabla f|^p)(x)^{1/p} \quad \text{a.e.}x, \tag{G_p}$$

$$\|\nabla P_t f\| \le \mathrm{e}^{-Kt} \|\nabla f\|_\infty \tag{G_∞}$$

ここで，$K \in \mathbb{R}$ と $p \in [1,\infty)$ は f,x に無関係な定数．勿論，“微分 ∇”(より正確には，$|\nabla f|$) の意味は，問題設定 (P_t を定義する土台となる状態空間の構造) により変わってくる．P_t が (推移確率による) 積分として与えられる場合には $p > p'$ のとき，Hölder の不等式から「$(G_{p'}) \Rightarrow (G_p)$」が容易に従うことを注意しておく．以下，この § では，(G_p)(特に (G_2) と (G_1)) に関する基本的な事実について，仮定の詳細を省略した形で述べる．正確な主張を把握するための概説論文として，ここでは [4, 5, 17] を挙げておく．

関数不等式 (G_p) は Bakry とÉmery により研究が始められた．彼らの定式化では，$\mathcal{L}$ として強局所的かつ Markov 的な生成作用素とし (多くの場合，対称性も仮定する)，微分 $|\nabla f|$ に相当するものとして，次で定める平方場作用素 (carré du champ) $\Gamma(f,f)$ の平方根を用いる：

$$\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(fg) - f\mathcal{L}g - (\mathcal{L}f)g\right).$$

Euclid 空間，あるいはより一般に Riemann 多様体上で，$\mathcal{L} = \Delta + Z$ (Z はベクトル場) の場合には，$\Gamma(f,f) = |\nabla f|^2$ となる．よって，実際に $\Gamma(f,f)^{1/2}$ は通常の微分 (のノルム) の拡張といえる．

このとき，代数的な関係式 $\partial_t P_t f = \mathcal{L} f$，$\mathcal{L}$ と Γ に関する derivation property および $\Gamma(f,f)$ の定義を結合することで，不等式 (G_p) は，解析学，特に関数不等式に関し幅広い応用を持つ．例えば，

- $(G_2) \Rightarrow$ Poincaré 不等式: $P_t(f^2) - (P_t f)^2 \le \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2Kt}}{K} P_t(\Gamma(f,f))$,

  $\Rightarrow$ 逆向き Poincaré 不等式: $\dfrac{\mathrm{e}^{2Kt}-1}{K}\Gamma(P_t f, P_t f) \le P_t(f^2) - (P_t f)^2$,
- $(G_1) \Rightarrow$ 対数 Sobolev 不等式: $P_t(f^2\log(f^2)) - P_t(f^2)\log P_t(f^2) \le \dfrac{2(1-\mathrm{e}^{-2Kt})}{K} P_t(\Gamma(f,f))$

が成り立つ．Poincaré 不等式の右辺の定数は指数関数 e^{-2Ks} を 0 から t まで積分したものの 2 倍であることを注意しておく．$K > 0$ で，$P_t f$ が $t \to \infty$ で P_t の不変測度による積分に収束するとき，Poincaré 不等式および対数 Sobolev 不等式は，通常の (全空間での)Poincaré 不等式あるいは対数 Sobolev 不等式を導く．他の応用としては，

---

*1 研究集会「確率解析とその周辺」(2011 年 11 月 11 日-11 月 13 日) 講演予稿

*2 URL: http://www.math.ocha.ac.jp/kuwada e-mail: kuwada.kazumasa@ocha.ac.jp

- Riesz 変換の L^p-有界性 ([14]，およびその参考文献を参照):

$$\|\Gamma(\sqrt{\alpha-\mathcal{L}}f,\sqrt{\alpha-\mathcal{L}}f)^{1/2}\|_p \le C_p\|f\|_p,$$

- Wang 型の (dimension-free) Harnack 不等式 ([23, 24, 26] 等): 各 $\alpha > 1$ で

$$|P_t f(x)|^\alpha \le P_t(|f|^\alpha)(y)\exp\left(\frac{K\alpha d(x,y)^2}{2(\alpha-1)(\mathrm{e}^{2Kt}-1)}\right)$$

などがある．また，(G_p) は $t=0$ では等式となることを利用して (G_2) を $t=0$ で (形式的に) 微分すると，いわゆる Γ_2-条件

$$\Gamma_2(f,f) \ge K\Gamma(f,f), \tag{$\Gamma_2(K)$}$$
$$\Gamma_2(f,g) := \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\Gamma(f,g) - \Gamma(\mathcal{L}f,g) - \Gamma(f,\mathcal{L}g)\right)$$

を得る．これを逆に t について積分することで，(G_2) と $(\Gamma_2(K))$ は同値になることが分かる．一方，Γ_2-条件から (G_1) を示したことが Bakry-Émery の重要な仕事と言える (前述の注より，多くの場合「$(G_1) \Rightarrow (G_2)$」は容易だが逆は明らかではない)．ただし，この部分の議論では，これ以前に述べた結果を得る時よりもずっと強い仮定 (各種操作で不変な core の存在) が必要になる．

Riemann 多様体上で $\mathcal{L} = \Delta - \nabla V\cdot\nabla$ のとき，いわゆる Bochner-Weitzenböck の公式を用いると

$$\Gamma_2(f,f) = \mathrm{Ric}(\nabla f,\nabla f) + \mathrm{Hess}\,V(\nabla f,\nabla f) + \|\,\mathrm{Hess}\,f\|_{\mathrm{HS}}^2$$

を得る (Ric は，Ricci 曲率．$\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ は，Hilbert-Schmidt ノルム)．特に Euclid 空間では Ric の項は消える．この式で，各点 x 毎に，f の x での 2 回微分が消えるような関数を考える ($\Rightarrow \|\,\mathrm{Hess}\,f\|_{\mathrm{HS}}(x)=0$) ことで，$(\Gamma_2(K))$ と $\mathrm{Ric}+\mathrm{Hess}\,V \ge K$ が同値になることが分かる．このように，Γ_2-条件を経由して，Bakry-Émery の微分評価は幾何学的な性質 (Ricci 曲率が下に有界) とも対応している．

また，半群 P_t が確率微分方程式の解として与えられる場合などに，確率論的な手法 (確率過程の結合法) を通じて，条件 $\mathrm{Ric}+\mathrm{Hess}\,V \ge K$ から Γ_2-条件を経由せずにBakry-Émery の微分評価を導けることがある．この観点を押し進めることで，次節に扱う Wasserstein 距離の Lipschitz 評価と Bakry-Émery の微分評価との対応へと至る．

2 Wasserstein 距離の Lipschitz 評価と Bakry-Émery 型微分評価

(X,d) を完備可分測地距離空間とする．ここで「測地」とは，各 $x,y\in X$ に対して，$\gamma:[0,1]\to X$ で $d(\gamma(s),\gamma(t)) = |s-t|d(x,y)$ を各 $s,t\in[0,1]$ でみたすもの (弧長パラメータづけされた測地線) が存在することを意味する．このような空間では，“微分” として，局所 Lipschitz 定数

$$|\nabla_d f|(x) := \lim_{r\downarrow 0}\left(\sup_{y;0<d(x,y)\le r}\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}\right)$$

が取れる．また，前節の半群 P_t に対応するものとして，Markov 核 $P_x \in \mathcal{P}(X)$ $(x\in X)$ を考える．ここで，少し一般の状況を想定して，X 上の別の測地距離 $\tilde{d}$ を用意する (前節の状況では，$\tilde{d} = \mathrm{e}^{-Kt}d$ に相当する)．この状況で，Bakry-Émery 型の L^p-微分評価を次のように定式化する：

$$|\nabla_{\tilde{d}}Pf|(x) \le P(|\nabla_d f|^p)(x)^{1/p} \quad x\in X \tag{G'_p}$$
$$\|\nabla_{\tilde{d}}Pf\|_\infty \le \|\nabla_d f\|_\infty. \tag{G'_∞}$$

また，前節の最後に述べた確率過程の結合法に対応する概念として，$p \in [1,\infty]$ および $\mu,\nu \in \mathcal{P}(X)$ に対して，L^p-Wasserstein 距離 $W_{d,p}(\mu,\nu)$ を以下で導入する：

$$W_{d,p}(\mu,\nu) := \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \|d\|_{L^p(\pi)},$$

ここで，$\Pi(\mu,\nu)$ は μ と μ のカップリングの全体，すなわち，

$$\Pi(\mu,\nu) := \left\{ \pi \in \mathcal{P}(X \times X) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{各可測集合 } A \subset X \text{ で} \\ \pi(A \times X) = \mu(A), \pi(X \times A) = \nu(A) \end{array} \right\}.$$

このとき，Markov 核 $(P_x)_{x \in X}$ に対する L^p-Wasserstein 距離の Lipschitz 評価を以下のように定式化する：

$$W_{d,p}(P^*\mu, P^*\nu) \le W_{\tilde{d},p}(\mu,\nu). \tag{W_p}$$

この定式化の下で，以下の双対性が成立する：

<u>定理</u>(cf. [16])

各 $p,q \in [1,\infty]$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ に対し，(G'_p) と (W_q) は同値.

$(G'_p) \Rightarrow (W_q)$ の証明には，Wasserstein 距離の双対表示 (Kantorovich 双対性) を用いる．その際に，Hopf-Lax 半群 (Moreau-吉田近似／ Hamilton-Jacobi 半群) と呼ばれる，次の概念が自然に表われる．$q \in (1,\infty)$, $f : X \to \mathbb{R}$, $t > 0$ に対して，$Q_t f : X \to \mathbb{R}$ を以下で定める:

$$Q_t f(x) := \inf_{y \in X} \left(f(y) + \frac{t}{q} \left(\frac{d(x,y)}{t} \right)^q \right).$$

X 上の有界かつ Lipschitz 連続な関数の全体を $C_b^{\mathrm{Lip}}(X)$ と書く．定理の証明に用いる $Q_t f$ の性質として，$f \in C_b^{\mathrm{Lip}}(X)$ に対し以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} |Q_t f(x) - Q_t f(y)| &\le \|\nabla f\|_\infty d(x,y), \\ |Q_s f(x) - Q_t f(x)| &\le \frac{1}{p}\|\nabla f\|_\infty^p \cdot |t-s|, \\ \partial_t Q_t f + \frac{1}{p}|\nabla Q_t f|(x)^p &\le 0 \end{aligned}$$

(はじめの 2 式は [7] を，最後の式は [1] を，それぞれ参照)．これらの性質と「積の微分公式の拡張」[3, Lemma 4.3.4] を用いて，結論が得られる．

Bakry-Émery 型微分評価 (G'_p) に比べ，Wasserstein 距離の Lipschitz 性 (W_p) は微分を含まない点で，各種の操作に対してより安定と考えられる．実際に，

- (Markov 核が半群 P_t で与えられる場合の) 従属操作に対する安定性
- 2 つの空間で (W_2) をみたせば，その直積空間上に自然に定まる Markov 核でも (W_2) が成立

などが直ちに分かる ((G'_p) でも同様の性質は既知かもしれないが)．

3 関連する話題と課題

(1) (G_p) と (G'_p) で現れる <u>“微分” は</u>，前者は半群の生成作用素を通じて定まり，後者は空間の距離構造に因る．これらは <u>どのような場合に一致</u> するのだろうか？ Bakry やÉmery の研究成果と (W_p) を結合するためには，この疑問は避けて通れない．この問への解答として，文献

[1, 15, 21] を挙げておく．特に [15] は Dirichlet 形式を出発点として，この問題を詳しく論じている．ただし，(局所)Poincaré 不等式や volume doubling 条件などを仮定するため，無限次元空間は範疇に入っていない．[1] は，問題の定式化が若干異なる．その点を補完する意味で，合わせて [2] も参照されたい．そこでは，「Ricci 曲率が下に有界」の概念の一般化を通じて，滑らかではない空間での Bakry-Émery の微分評価についても調べられている．

(2) $p > p'$ のとき，$\underline{(G_p) \Rightarrow (G_{p'})}$ はどのような条件の下で成り立つのだろうか？ 対数 Sobolev 不等式への応用など，実際に (G_1) と (G_p) $(p > 1)$ で役割の異なる場合があり，この問は無視できない．Bakry と Émery の議論に従えば，(G_2) から Γ_2-条件を経て (G_1) が得られる (例えば [5, 17]) が，この方法は “良い core の存在” を必要とするため，通常の意味で “滑らかな関数” の定義できないような空間 (殆どの無限次元空間や測度距離空間) では，その適用可能性は非自明 (長年の間未解決) である．なお，Riemann 多様体上の熱半群については，どんな $p \in [1, \infty]$ でも (G_p) から (G_1) が従う [22]．その一方で，**SDE** の解に問題を制限しても，(G_2) は成立するが (G_1) が不成立の場合がある [25]．

(3) 生成作用素が準楕円型の場合で，§1 で述べたものとは異なる形の Bakry-Émery 型評価

$$|\nabla P_t f|(x) \le C_p \mathrm{e}^{-Kt} P_t(|\nabla f|^p)(x)^{1/p} \qquad (\tilde{G}_p)$$

が成り立つ例が知られている [6, 8, 11, 12, 18, 19]．これらの結果はモデル固有の対称性に因るところが大きく，<u>$(\tilde{G}_p)$ の，汎用性のある十分条件</u> は知られていない．ここで $C_p > 1$ であり，その結果として，この微分評価は ($p = 2$ の場合でも) Γ_2-条件とは直接対応しない．別の言葉で言えば，この不等式は，時間について **infinitesimal** な評価の積分として得られる形ではない．従って，項目 (2) の問は，良い core があるにも関わらず非自明である．実際，これらの結果を含む範疇で，準楕円型生成作用素に対応する Γ_2 条件 (あるいは曲率次元条件) の一般化が Baudoin,Garofalo らによって展開されている [9, 10] が，Bakry-Émery 型の微分評価は議論されていない．一方，§2 の同値性は有効に機能する．これを有効に使えればいいのかもしれないが，この方面でもっとも簡単なモデルである Heisenberg 群上の拡散過程の場合ですら，§2 の同値性以外の方法での (W_p) の証明は知られていない．

(4) §2 の定式化において，Markov 核 $P_x \in \mathcal{P}(X)$ を考える際，点 x の動く範囲は X とは別の空間であっても，全ての議論は完全に機能する．より具体的には，別の距離空間 $(\tilde{X}, \tilde{d})$ をとり，$P_x \in \mathcal{P}(X)$ $(x \in \tilde{X})$ という状況が考えられる．この <u>拡張の結果，何らかの新しい応用</u> が可能だろうか？ 別の空間を扱う状況として，例えば以下が想定できる:

- 写像による Markov 核の押し出し (調和写像関連の問題を考えるときは自然な設定)
- $\tilde{X}$ を初期値の集合 (状態空間) とし，X を，$\tilde{X}$ 上の経路空間とする．このとき，経路空間上の (分布の意味での) 確率過程と Markov 核が対応する．こうすると，対応する性質 (W_p) は，確率過程の見本路の分布のカップリングに関する問題になる．Markov 核を半群と対応させる，§2 で言及した視点では，「各時刻 t での確率過程の分布」のカップリングしか考えていなかった形になるので，確率論的な観点から，ここで提示した枠組みで何かが分かるかどうかには興味がある．

(5) (G'_p) と (W_q) の同値性を示す際には，Bakry-Émery の元々の議論と異なり，半群 (に対応する Dirichlet 形式，あるいは Γ) の強局所性 (と，そこから従う derivation property) を利用しない．実際，従属操作を通じて，<u>非局所的な場合</u> にも (G_p) に相当する評価が導出できる．この評価には何か応用の可能性はあるだろうか？ また，従属操作に限らず非局所的な場合に

(G_p) に相当する不等式を導く方法はあるだろうか？ そもそも，どのような不等式が「適切な」定式化なのであろうか？

(6) 空間と Markov 核の列 に対して，各々が (G_p) を (何らかの意味で一様に) みたしている場合，(G_p) は極限でも成り立つ だろうか？ このような問題の典型的な応用例として，無限次元空間上の確率過程の有限次元近似が考えられる．前述の定理を用いて (W_q) に書き換えれば，そちらの方が極限移行とは相性がよいと考えられる (前述のように，こちらの概念は微分を含まないため).

(7) 無限次元空間 上で，これらの理論は何処まで有効だろうか？ §1, §2 とも，特に次元には制約はない．しかし，例えば §1 の，Bakry-Émery による「$(\Gamma_2(K)) \Rightarrow (G_1)$」の議論を適用できる状況は，極めて限定的である．また，§2 では，主として扱う距離が退化した擬距離になる (Wiener 空間での Cameron-Martin ノルムから決まるものなど) ため，取り扱いには注意が必要になる．勿論 Markov 核についても，典型的には quasi-everywhere でしか定義できないなどの変化が生ずる．一方，Hopf-Lax 半群については，[1] の §3 で，無限次元空間も視野に入れた，かなり一般的な枠組で議論されている．無限次元空間上の Wasserstein 距離や Hopf-Lax 半群の技術的な困難については，[13, 20] も参照した方がよいと思われる．§2 の議論がうまく機能するとしても，(1) の問題は，一般的な解答は (私の知る限り) 無限次元では知られていないので，この点も考えないといけない．

参考文献

[1] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below. preprint. arXiv:1106.2090.

[2] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below. preprint. arXiv:1109.0222.

[3] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures.* Birkhäuser Verlag, Basel, second edition, 2008.

[4] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, and G. Scheffer. *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques.* Panoramas et synthèses, 10. Société Mathématique de France, Paris, 2000.

[5] D. Bakry. On Sobolev and logarithmic Sobolev inequalities for Markov semigroups. In *New trends in stochasitic analysis*, pages 43–75, Charingworth, 1994, 1997. World Sci. Publ. River Edge, NJ.

[6] D. Bakry, F. Baudoin, M. Bonnefont, and D. Chafaï. On gradient bounds for the heat kernel on the Heisenberg group. *J. Funct. Anal.*, 255(8):1905–1938, 2008.

[7] Z.M. Balogh, A. Engoulatov, L. Hunziker, and O.E. Maasalo. Functional inequalities and Hamilton-Jacobi equations in geodesic spaces. preprint; arXiv:0906.0476.

[8] F. Baudoin and M. Bonnefont. The subelliptic heat kernel on $\mathbf{SU}(2)$: Representations, asymptotics and gradient bounds. to appear in Math. Z.;arXiv:0802.3320.

[9] F. Baudoin, M. Bonnefont, and N. Garofalo. A sub-Riemannian curvature-dimension inequality, volume doubling property and the Poincaré inequality. preprint. arXiv:1007.1600.

[10] F. Baudoin and Garofalo. Curvature-dimension inequalities and Ricci lower bounds for sub-Riemannain manifolds with transverse symmetries. preprint. arXiv:1101.3590.

[11] B. Driver and T. Melcher. Hypoelliptic heat kernel inequalities on the Heisenberg group. *J. Funct. Anal.*, 221(5):340–365, 2005.

[12] N. Eldredge. Gradient estimates for the subelliptic heat kernel on H-type groups. preprint; arXiv:0904.1781.

[13] D. Feyel and A.S. Üstünel. Monge-Kantorovich measure transportation and Monge-Ampère equation on wiener space. *Probab. Theory Related Fields*, 128(3):347–385, 2004.

[14] H. Kawabi and T. Miyokawa. The Littlewood-Paley-Stein inequality for diffusion processes on general metric spaces. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 14(1):1–30, 2007.

[15] P. Koskela and Y. Zhou. Geometry and analysis of Dirichlet forms. preprint. Available at `http://www.bicmr.org/uploadfile/2011/0905/20110905093550372.pdf`.

[16] K. Kuwada. Duality on gradient estimates and Wasserstein controls. *J. Funct. Anal.*, 258(11):3758–3774, 2010.

[17] M. Ledoux. The geometry of Markov diffusion generators. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 9(2):305–366, 2000.

[18] H.-Q. Li. Estimation optimale du gradient du semi-groupe de la chaleur sur le groupe de heisenberg. *J. Funct. Anal.*, 236(2):369–394, 2006.

[19] T. Melcher. Hypoelliptic heat kernel inequalities on Lie groups. *Stochastic Process. Appl.*, 118(3):368–388, 2008.

[20] J. Shao. Hamilton-jacobi semigroups in infinite dimensional spaces. *Bull. Sci. Math.*, 130:720–738, 2006.

[21] K.-Th. Sturm. Is a diffusion process determined by its intrinsic metric? *Chaos, Solitons Fractals*, 8(11):1855–1860, 1997.

[22] M.-K. von Renesse and K.-Th. Sturm. Transport inequalities, gradient estimates, entropy and Ricci curvature. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 58(7):923–940, 2005.

[23] F.-Y. Wang. On estimation of the logarithmic Sobolev constant and gradient estimates of heat semigroups. *Probab. Theory Related Fields*, 108(1):87–101, 1997.

[24] F.-Y. Wang. Equivalence of dimension-free Harnack inequality and curvature condition. *Integ. equ. oper. theory*, 48:547–552, 2004.

[25] F.-Y. Wang. A character of the gradient estimate for diffusion semigroups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(3):827–834, 2005.

[26] F.-Y. Wang. *Functional inequalities, Markov semigroups, and spectral theory.* Mathematics Monograph Series 4. Science Press, Beijing, China, 2005.