Laplace approximation for stochastic line integrals in long time *

栗田 和正† (京都大学大学院情報学研究科)

M を閉 Riemann 多様体とし，$(\{z_t\}_{t\geq 0}, \{\mathbb{P}_x\}_{x\in M})$ を生成作用素 $\mathscr{L} = \Delta/2 + b$ を持つ M 上の拡散過程とする．但し，Δ は Laplace-Beltrami 作用素，b は滑らかなベクトル場とする．滑らかな 1 次微分形式の空間上に，L^2-Sobolev ノルムの族 $\{\|\cdot\|_p\}_{p\in\mathbb{R}}$ を Hodge-小平 Laplacian の冪を用いて定義する．以下，$\mathscr{D}_p$ で，滑らかな微分形式の成す空間の $\|\cdot\|_p$ による完備化を表わすものとする．

滑らかな 1 次微分形式 α に対し，拡散過程 $\{z_s\}_{s\in[0,t]}$ の経路に沿った確率線積分 $\int_{z[0,t]}\alpha$ が定まる．$\int_{z[0,t]}\alpha$ のマルチンゲール部分を $Y_t(\alpha)$ と書く．$p>0$ が充分大きければ，ランダムな写像 $Y_t : \alpha\mapsto Y_t(\alpha)$ は $\mathscr{D}_{-p}$ に値を取る確率変数とみなせる．

本講演では $\mathscr{D}_{-p}$-値確率変数 $\bar{Y}_t := t^{-1}Y_t$ の $t\to\infty$ での Laplace 近似の問題を扱う．

定義 1 速度関数 $I : \mathscr{D}_{-p}\to[0,\infty]$ を次で定義する．

$$I(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_M |\hat{\omega}|^2 d\mu^\omega & \omega\in\mathscr{H} \text{ のとき,} \\ \infty & \text{そうでないとき.} \end{cases}$$

ここで，$\mathscr{H}$ を，次の 3 つの条件を満たす $\omega\in\mathscr{D}_{-p}$ 全体として定義する:

(i) M 上の確率測度 μ^ω が存在して，各 $u\in C^1(M)$ に対し，次を満たす

$$\langle\omega, du\rangle + \int_M \mathscr{L}u\, d\mu^\omega = 0.$$

(ii) $\hat{\omega}\in L^2_1(d\mu^\omega)$ が存在して，各 $\alpha\in\mathscr{D}_p$ に対して，$\langle\omega,\alpha\rangle = \displaystyle\int_M (\hat{\omega},\alpha)\, d\mu^\omega$ が成り立つ．

(iii) μ^ω は Riemann 測度 v について絶対連続かつ $\sqrt{d\mu^w/dv}\in H_1$．但し、H_1 は 1 階の L^2-Sobolev 空間とする．

$\bar{Y}_t$ は $t\to\infty$ で速度関数 I について大偏差原理を満たす [2]．よって，Varadhan の補題により，適切な可積分性の条件を満たす連続関数 $F : \mathscr{D}_{-p}\to\mathbb{R}$ について

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{E}_x\left[\exp\{tF(Y_t)\}\right] = \sup_{w\in\mathscr{D}_{-p}}\{F(w)-I(w)\} =: \kappa_F$$

をみたす．以下，F を 3 回 Fréchet 微分可能とする．

定理を述べるために，いくつか記号を用意しよう．

---

*研究集会「確率過程とその周辺」(2004 年 12 月 7 日-12 月 10 日，於名古屋) 講演予稿

†Partially supported by JSPS fellowship for young scientists. e-mail: kkuwada@acs.i.kyoto-u.ac.jp

(I) $\mathscr{K}_F := \{w \in \mathscr{D}_{-p}\ ;\ F(w) - I(w) = \kappa_F\}$ とおく．$\mathscr{K}_F$ は空でないコンパクト集合になる．$\nabla^k F(w)$ を w での k 階 Fréchet 微分とする ($k=1$ のときは k を省略する)．$w \in \mathscr{D}_{-p}$ に対し，$\alpha_w := \nabla F(w) \in \mathscr{D}_p$ とおく．

(II) $L^2(dv)$ 上の微分作用素 $u \mapsto \mathscr{L}u + (\alpha, du) + |\alpha|^2 u/2$ の主固有値に対応する固有関数を h^α と書く．h^α は M 上の正値 C^1-級関数になる．h^α を用いて，別の微分作用素 $\mathscr{L}^\alpha\ :\ u \mapsto \mathscr{L}u + (\alpha - dh^\alpha/h^\alpha, du)$ が定まる．$\mathscr{L}^\alpha$ の正規化された不変測度を m_α と書く．$w \in \mathscr{K}_F$ のとき，$m_{\alpha_w} = \mu^w$ が成り立つ．

(III) 微分方程式

$$\mathscr{L}u + \left(\alpha - \frac{dh^\alpha}{h^\alpha}, du\right) = \left(\alpha - \frac{dh^\alpha}{h^\alpha}, \beta\right) - \int_M \left(\alpha - \frac{dh^\alpha}{h^\alpha}, \beta\right) dm_\alpha$$

の解 $u^{\alpha,\beta}$ を用いて，$\Gamma_\alpha \beta := du^{\alpha,\beta}$ と定める．Γ_α は $\mathscr{D}_p$ 上の有界線型作用素になる．有界線型対称作用素 $G_w^F\ :\ \mathscr{D}_{-p} \to \mathscr{D}_{-p}$ を以下で定める:

$$(\eta, G_w^F \eta)_{-p} = \nabla^2 F(w)((1 - \Gamma_{\alpha_w}^*)\eta, (1 - \Gamma_{\alpha_w}^*)\eta).$$

(IV) $\beta^* \in \mathscr{D}_{-p}$ を $\beta \in \mathscr{D}_p$ の共役元とする．$w \in \mathscr{H}$ に対し，跡族正値対称作用素 $S_w\ :\ \mathscr{D}_{-p} \to \mathscr{D}_{-p}$ を以下で定める:

$$\langle S_w(\beta^*), \gamma \rangle = \int_M (\beta, \gamma) d\mu^w.$$

仮定 1 各 $w \in \mathscr{K}_F$ に対し定数 $\delta_w > 0$ が存在し，任意の $\eta \in \mathscr{D}_{-p}$ に対して

$$\inf \left\{ \|\eta'\|_{-p}\ ;\ \eta = \sqrt{S_w}\eta' \right\} \geq (\eta, G_w^F \eta)_{-p} + \delta_w \|\eta\|_{-p}^2$$

が成り立つ．

定理 1 [1] 仮定 1 のもとで $\mathscr{K}_F$ は有限集合であり，

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t\kappa_F} \mathbb{E}_x \left[\exp\left\{ tF(\bar{Y}_t) \right\} \right] = \sum_{w \in \mathscr{K}_F} \frac{1}{\det\left(1 - G_w^F \circ S_w\right)^{1/2}} h^{\alpha_w}(x) \int_M \frac{1}{h^{\alpha_w}} d\mu^w$$

が成り立つ．

参考文献

[1] K. Kuwada. Laplace approximation for stochastic line integrals. preprint.

[2] K. Kuwada. On large deviations for random currents induced from stochastic line integrals. preprint.