Laplace approximation for stochastic line integrals in long time

粟田和正

(京都大学大学院情報学研究科)

§1 導入

M：コンパクト Riemann 多様体，$\partial M = \emptyset$
$(\{z_t\}_{t\in[0,\infty)}, \{\mathrm{P}_x\}_{x\in M})$：$M$ 上の拡散過程
生成作用素：$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Delta + b$

$X_t(\alpha) := \int_{z[0,t]} \alpha$：確率線積分
$Y_t(\alpha)$：$X_t(\alpha)$ のマルチンゲール部分
$A_t(\alpha)$：$X_t(\alpha)$ の有界変動部分

$\|\cdot\|_p$: p 次 L^2-Sobolev ノルム:

$$\|\alpha\|_p^2 := \int_M |(1-\Delta_1)^{p/2}\alpha|^2 dv$$

$$\mathcal{D}_p := \overline{\{\text{ 滑らかな一次微分形式 }\}}^{\|\cdot\|_p}$$

$$\boxed{\boxed{p > 0 : \text{充分大} \Longrightarrow X_t, Y_t, A_t \in \mathcal{D}_{-p}}}$$

考察対象：$\{Y_t\}_{t>0}$ の $t \to \infty$ での漸近挙動

Y_t の解析 $\rightsquigarrow$

- X_t 及び A_t
- 経験分布 $\displaystyle\int_0^t \delta_{z_s} ds$
- $\{z_s\}_{s\in[0,t]}$ のホモロジー的挙動 (e.g. 回転数)
- Periodic diffusion($M = \mathrm{T}^d$)

既知の結果

大数の法則 (池田 '87): $\bar{Y}_t := \dfrac{1}{t} Y_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

中心極限定理 (越智 '85): $P_x\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}} Y_t\right)^{-1} \xrightarrow[t\to\infty]{d} \nu_{S_0}$

大偏差原理 (楽. '03):

$$P\left[\bar{Y}_t \in \mathcal{A}\right] \asymp \exp\left(-t \inf_{w\in\mathcal{A}} I(w)\right) \quad (t \to \infty)$$

(I: 速度関数)

$\Longrightarrow$ Varadhan の補題より

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log \mathbf{E}_x\left[\exp\left(tF(\bar{Y}_t)\right)\right] = \sup_{w\in\mathcal{D}_{-p}}\left(F(w)-I(w)\right) =: \kappa_F$$

<u>問題</u>:

$$\mathrm{e}^{-t\kappa_F}\mathbf{E}_x\left[\exp\left(tF(\bar{Y}_t)\right)\right] \xrightarrow[t\to\infty]{} \quad ?$$

§2 速度関数の性質とその摂動

Varadhan の補題の直感的背景

大偏差原理より

$$\mathbf{P}_x\left[\bar{Y}_t \in dw\right] \asymp \exp\left(-tI(w)\right)dw$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}_x\left[\exp\left(tF(\bar{Y}_t)\right)\right]$$

$$\asymp \int \exp\Big(t\big(F(w) - I(w)\big)\Big)dw$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t}\log \mathbf{E}_x\left[\exp\left(tF(\bar{Y}_t)\right)\right] \xrightarrow[t\to\infty]{} \kappa_F$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} e^{-t\kappa_F}\mathbf{E}_x\left[\exp\left(tF(\bar{Y}_t)\right)\right] \text{ の漸近挙動} \\ \updownarrow \\ F(w) - I(w) = \kappa_F \text{ なる } w \text{ の近傍での} \\ F - I \text{ の振る舞い} \end{array} \right]$$

$$\boxed{\text{以下、} F(w) - I(w) = \kappa_F \Leftrightarrow w = w_0 \text{ を仮定}}$$

$$\boldsymbol{F(w_0) - I(w_0) = \kappa_F = \sup_w \big(F(w) - I(w)\big)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\nabla (F - I)(w_0) = 0} \\ \boldsymbol{\nabla^2 (F - I)(w_0) \leq 0} \end{cases}$$

- $\boldsymbol{F}$ は 3 回 Fréchet 微分可能と仮定
- $\boldsymbol{I}$ は？　$\rightsquigarrow$ $\boldsymbol{I}$ の定義と性質が必要

$$I(w) := \begin{cases} \frac{1}{2}\int_M |\hat{w}|^2 d\mu^w & \text{if } w \in \mathcal{H}, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$w \in \Omega \Leftrightarrow {}^{\exists}\mu^w \in \mathcal{M}_1(M) \text{ s.t. } \sqrt{\frac{d\mu^w}{dv}} \in H_1,$$

$$\langle w, du \rangle + \int_M \mathcal{L}u \, d\mu^w = 0.$$

$w \in \mathcal{H} \Leftrightarrow w \in \Omega$ かつ

$${}^{\exists}\hat{w} \in L^2_1(d\mu^w), \langle w, \alpha \rangle = \int_M (\hat{w}, \alpha) d\mu^w.$$

$\Rightarrow F - I$ の摂動の方向を制限する必要がある

$\star$ 平衡状態 w_0 はどのような点か？

$\star$ どのような摂動を考えるか？

$$\boldsymbol{\alpha_0 := \nabla F(w_0) \in \mathfrak{D}_p}$$

i.e. $\boldsymbol{\langle w, \alpha_0 \rangle = \nabla F(w_0)(w)}$

$$\boldsymbol{\Lambda(\alpha) \quad : \quad \tilde{\mathfrak{L}}^{\alpha} u := \mathfrak{L} u + (\alpha, du) + \frac{1}{2}|\alpha|^2 u}$$

の Principal eigenvalue

補題 1 $\boldsymbol{I(w_0) - \langle w_0, \alpha_0 \rangle + \Lambda(\alpha_0) = 0}$

$$
\begin{aligned}
h^{\alpha} &\quad : \quad \Lambda(\alpha)\ \text{に対応する固有関数}\ (h^{\alpha} > 0) \\
\overline{\alpha} &:= \alpha - \frac{dh^{\alpha}}{h^{\alpha}} \\
\mathfrak{L}^{\alpha} u &:= \mathfrak{L} u + (\overline{\alpha}, du) \\
m_{\alpha} &\quad : \quad \mathfrak{L}^{\alpha}\ \text{の (正規化された) 不変測度}
\end{aligned}
$$

<u>**補題 2**</u> $\quad \langle w_0, \beta \rangle = \int_M (\overline{\alpha_0}, \beta)\, dm_{\alpha_0}$

摂動

$\gamma_\varepsilon \in \mathfrak{D}_p,\ \gamma_0 = \overline{\alpha_0}$

$\mu_\varepsilon : u \mapsto \mathfrak{L}u + (\gamma_\varepsilon, du)$ の不変 (確率) 測度

$(\Rightarrow \mu_0 = m_{\alpha_0})$

$$\langle w_\varepsilon, \beta \rangle := \int_M (\gamma_\varepsilon, \beta) d\mu_\varepsilon$$

$(\Rightarrow w_\varepsilon \in \mathcal{H},\ \mu^{w_\varepsilon} = \mu_\varepsilon,\ \hat{w}_\varepsilon = \gamma_\varepsilon\ )$

$\boxed{\gamma_\varepsilon, \mu_\varepsilon \text{ は } \varepsilon \text{ に滑らかに依存すると仮定}}$

命題 1

$$F(w_\varepsilon) - I(w_\varepsilon) = F(w_0) - I(w_0)$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2}\left((\tilde{w}, G_{w_0}^F \tilde{w})_{-p} - \int_M |\gamma_0^{(1)}|^2 dm_{\alpha_0}\right)$$
$$+ o(\varepsilon^2)$$

$$\left(\Rightarrow \int_M |\gamma_0^{(1)}|^2 dm_{\alpha_0} \geq (\tilde{w}, G_{w_0}^F \tilde{w})\right)$$

ただし、$\langle \tilde{w}, \beta \rangle = \int_M (\gamma_0^{(1)}, \beta) dm_{\alpha_0}$

$$
\begin{aligned}
&(\eta, G^F_{w_0}\eta)_{-p} \\
&\qquad = \nabla^2 F(w_0)((1-\Gamma^*_{\alpha_0})\eta, (1-\Gamma^*_{\alpha_0})\eta)
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
\mathfrak{L}^{\alpha_0} u = (\overline{\alpha_0}, \beta) - \int_M (\overline{\alpha_0}, \beta)\, dm_{\alpha_0}
$$

の解 $u^{\alpha_0,\beta}$ に対して、$\Gamma_{\alpha_0}\beta = du^{\alpha_0,\beta}$

$$
\begin{aligned}
&\langle w_\varepsilon - w_0, \beta\rangle \\
&\quad = \int_M (\gamma_\varepsilon - \overline{\alpha_0}, \beta)\, d\mu_\varepsilon + \int_M \mathfrak{L}^{\alpha_0} u^{\alpha_0,\beta} d\mu_\varepsilon \\
&\quad = \int_M (\gamma_\varepsilon - \overline{\alpha_0}, \beta)\, d\mu_\varepsilon \\
&\qquad\qquad - \int_M \left(\gamma_\varepsilon - \overline{\alpha_0}, du^{\alpha_0,\beta}\right) d\mu_\varepsilon \\
&\quad = \int_M (\gamma_\varepsilon - \gamma_0, (1 - \Gamma_{\alpha_0})\beta)\, d\mu_\varepsilon
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ w_0^{(1)} = (1 - \Gamma_{\alpha_0}^*)\tilde{w}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \star\ {}^{\forall}\alpha \in \mathcal{D}_p,\ {}^{\exists}(\gamma_\varepsilon, \mu_\varepsilon)_\varepsilon \text{ s.t. } \gamma_0^{(1)} = \alpha \\ \star\ \gamma_0^{(1)} \in L_1^2(dm_{\alpha_0}) \text{ の場合まで拡張} \end{array}}$$

$$L_{w_0}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_M |\breve{\omega}|^2 dm_{\alpha_0} & \text{if } \omega \in \mathcal{H}'_{w_0}, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\omega \in \mathcal{H}'_{w_0}$$

$$\Leftrightarrow {}^{\exists}\breve{\omega} \in L_1^2(dm_{\alpha_0}),\ \langle \omega, \beta \rangle = \int_M (\breve{\omega}, \beta) dm_{\alpha_0}$$

$$\Rightarrow {}^{\forall} w \in \mathfrak{D}_{-p},\ L_{w_0}(w) \geq \frac{1}{2}(w, G^F_{w_0} w)$$

$(\nabla^2(F - I) \leq 0$ に対応)

仮定 1　${}^{\exists}\delta > 0$ s.t.

$$L_{w_0}(w) \geq \frac{1}{2}(w, G^F_{w_0} w) + \delta \|w\|^2_{-p}$$

$(\nabla^2(F - I) < 0$ に対応)

§3 平衡点近傍での挙動

$$J(t) := e^{-t\kappa_F} \mathbf{E}_x \left[\exp\left(tF(\bar{Y}_t)\right) \right]$$

$$\mathcal{A} := \left\{ \|\bar{Y}_t - w_0\|_{-p} \le \varepsilon \right\}$$

$$\Rightarrow J(t) \asymp \mathbf{E}_x \left[1_{\mathcal{A}} \exp\left(t(F(\bar{Y}_t) - \kappa_F)\right) \right]$$

大偏差原理より

$$\begin{aligned} &\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbf{E}_x \left[\exp\left(tF(\bar{Y}_t)\right) ; \mathcal{A}^c \right] \\ &\quad \le \sup \{ F(w) - I(w) ; \|w - w_0\|_{-p} > \varepsilon \} \\ &\quad < \kappa_F \end{aligned}$$

$\varepsilon \approx 0 \Rightarrow F(\bar{Y}_t)$ を w_0 で Taylor 展開

$$
\begin{aligned}
F(\bar{Y}_t) - \kappa_F &= F(\bar{Y}_t) - F(w_0) + I(w_0) \\
&= F(\bar{Y}_t) - F(w_0) + \langle w_0, \alpha_0 \rangle - \Lambda(\alpha_0) \\
&= \bar{Y}_t(\alpha_0) + \frac{1}{2}\nabla^2 F(w_0)(\bar{Y}_t - w_0, \bar{Y}_t - w_0) \\
&\quad - \Lambda(\alpha_0) + (\text{剰余項})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow J(t) \asymp e^{-t\Lambda(\alpha_0)} \mathbf{E}_x \Big[1_{\mathcal{A}} \cdot e^{Y_t(\alpha_0)} \\
\times \exp\left(\frac{t}{2}\nabla^2 F(w_0)(\bar{Y}_t - w_0, \bar{Y}_t - w_0) \right) \Big]
\end{aligned}
$$

h-変換

$$T_t^{\alpha} := \exp\left(t\mathcal{L}^{\alpha}\right)$$

$$T_t^{\alpha} f(x) = \mathrm{e}^{-t\Lambda(\alpha)} \mathbf{E}_x \left[\mathrm{e}^{Y_t(\alpha)} \frac{h^{\alpha}(z_t)}{h^{\alpha}(x)} f(z_t) \right]$$

$$= \mathbf{E}_x^{\alpha} \left[f(z_t) \right]$$

$$\Downarrow$$

$$J(t) \asymp \mathbf{E}_x^{\alpha_0} \Bigg[1_{\mathcal{A}} \cdot \frac{h^{\alpha_0}(x)}{h^{\alpha_0}(z_t)}$$

$$\times \exp\left(\frac{t}{2} \nabla^2 F(w_0)(\bar{Y}_t - w_0, \bar{Y}_t - w_0) \right) \Bigg]$$

$$\mathbf{Y}_t^{\alpha_0}(\beta) := \mathbf{Y}_t(\beta) + \int_0^t (\overline{\alpha_0}, \beta)(z_s)ds$$

$Y_t^{\alpha_0}$ は $P_x^{\alpha_0}$ のもとでマルチンゲール

$$\boxed{\underline{\text{補題 3}} \quad \bar{Y}_t - w_0 = (1 - \Gamma^*_{\alpha_0})\bar{\mathbf{Y}}_t^{\alpha_0} + (\text{剰余項})}$$

$$\Downarrow$$

$$J(t) \asymp$$

$$\mathbf{E}_x^{\alpha_0}\left[1_{\mathcal{A}} \cdot \frac{h^{\alpha_0}(x)}{h^{\alpha_0}(z_t)} \exp\left(\frac{t}{2}(\bar{\mathbf{Y}}_t^{\alpha_0}, G^F_{w_0}\bar{\mathbf{Y}}_t^{\alpha_0})_{-p}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} := \{\|\bar{\mathbf{Y}}_t - w_0\|_{-p} \leq \varepsilon\} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_1 \bigsqcup \boldsymbol{\mathcal{A}}_2$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_1 := \left\{\left\|\bar{\mathbf{Y}}_t^{\alpha_0}\right\|_{-p} \leq t^{-1/2}R\right\}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_2 := \left\{t^{-1/2}R \leq \|\bar{\mathbf{Y}}_t^{\alpha_0}\|_{-p} < \varepsilon\right\}$$

$$\color{red}{J_i(t)} =$$

$$\mathbf{E}_x^{\alpha_0}\left[\frac{h^{\alpha_0}(x)}{h^{\alpha_0}(z_t)}\exp\left(\frac{t}{2}(\bar{\mathbf{Y}}_t^{\alpha_0}, G_{w_0}^F \bar{\mathbf{Y}}_t^{\alpha_0})_{-p}\right); \color{red}{\boldsymbol{\mathcal{A}}_i}\right]$$

$J_1(t)$ の評価

中心極限定理: $\mathrm{P}_x\left(\frac{1}{\sqrt{t}}Y_t^{\alpha_0}\right)^{-1} \xrightarrow[t\to\infty]{d} \nu_{S_{w_0}}$

($\nu_{S_{w_0}}$ ：共分散作用素 S_{w_0} を持つ Gauss 測度)

$$\Downarrow$$

$$\lim_{t\to\infty} J_1(t) = h^{\alpha_0}(x)\int_M \frac{1}{h^{\alpha_0}}dm_{\alpha_0}$$

$$\times \int_{\|w\|_{-p}\leq R} \exp\left(\frac{1}{2}(w, G_{w_0}^F w)\right) d\nu_{S_{w_0}}$$

$$\downarrow R \to \infty$$

$$\frac{1}{\det(1 - G^F_{w_0} \circ S_{w_0})^{1/2}} h^{\alpha_0}(x) \int_M \frac{1}{h^{\alpha_0}} dm_{\alpha_0}$$

$$\left(\begin{array}{l} \quad d\nu_{S_{w_0}} = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{1}{2}(w, S^{-1}_{w_0} w)_{-p} \right) dw \\ \left. \begin{array}{c} 2L_{w_0}(w) = (w, S^{-1}_{w_0} w)_{-p} \\ \text{仮定 1} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \exp\left(\frac{1}{2}(w, G^F_{w_0} w)_{-p} \right) \text{: } \nu_{S_{w_0}}\text{-可積分} \end{array} \right.$$

$J_2(t)$ の評価

Moderate deviation:

$g(t) = o(\sqrt{t}),\ \lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$ のとき

$$\mathbf{P}_x^{\alpha_0}\left[\frac{1}{g(t)\sqrt{t}} Y_t^{\alpha_0} \in \mathcal{A}\right]$$

$$\asymp \exp\left(-g(t)^2 \inf_{w\in\mathcal{A}} L_{w_0}(w)\right)$$

$$\mathcal{A}_2\text{上、}\quad t^{-1/2}R \lesssim \|\bar{Y}_t^{\alpha_0}\|_{-p} \lesssim \varepsilon$$

$$\Rightarrow R \lesssim \varepsilon t^{1/2} \text{ かつ } 1 \lesssim \left\| \frac{1}{R\sqrt{t}} Y_t^{\alpha_0} \right\|_{-p}$$

$$J_2(t) \leq C\mathbf{E}_x^{\alpha_0}\left[1_{\mathcal{A}_2}\exp\left(\frac{t}{2}(\bar{Y}_t^{\alpha_0}, G_{w_0}^F \bar{Y}_t^{\alpha_0})_{-p}\right)\right]$$

$$\underset{t\to\infty}{\approx} C\int_{\|w\|_{-p}\geq 1} dw$$

$$\exp\left(R\Big(\frac{1}{2}(w, G_{w_0}^F w)_{-p} - L_{w_0}(w)\Big)\right)$$

仮定 1: $L_{w_0}(w) \geq \frac{1}{2}(w, G^F_{w_0} w) + \delta \|w\|^2_{-p}$

$$\Rightarrow \limsup_{t\to\infty} J_2(t) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t\kappa_F} \mathbf{E}_x \left[\exp\left(tF(\bar{Y}_t)\right)\right] = \frac{h^{\alpha_0}(x)}{\det(1 - G^F_{w_0} \circ S_{w_0})^{1/2}} \int_M \frac{1}{h^{\alpha_0}} dm_{\alpha_0}}$$

$$\mathcal{K}_F := \{w \in \mathcal{D}_{-p} \,;\, F(w) - I(w) = \kappa_F\}$$

$\mathcal{K}_F$ は空でないコンパクト集合

<u>定理 1</u> 仮定 1 のもと $\#\mathcal{K}_F < \infty$ かつ

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t\kappa_F} \mathbf{E}_x\left[\exp\left(tF(\bar{Y}_t)\right)\right]$$

$$= \sum_{w\in\mathcal{K}_F} \frac{h^{\alpha_w}(x)}{\det(1 - G_w^F \circ S_w)^{1/2}} \int_M \frac{1}{h^{\alpha_w}} dm_{\alpha_w}$$

ただし、$\alpha_w = \nabla F(w)$

(仮定 1 $\Leftrightarrow \nabla^2(F - I) < 0 \Rightarrow \#\mathcal{K}_F < \infty$)

§4 関連する結果

X_t および A_t の漸近挙動

$$e(\alpha) := \int_M \left((\hat{b}, \alpha) - \frac{1}{2} d^* \alpha \right) dm_0$$

$$\bar{X}_t = \frac{1}{t} X_t - e, \quad \bar{A}_t := \frac{1}{t} A_t - e$$

$$\boxed{\star \lim_{t \to \infty} \bar{X}_t = \lim_{t \to \infty} \bar{A}_t = 0 \quad \text{a.s.}}$$

$$\mathfrak{L} u^{\alpha} = (\hat{b}, \alpha) - \frac{1}{2} d^* \alpha - e(\alpha)$$

$$Q\alpha := du^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{X}_t(\alpha) = \bar{Y}_t((1-Q)\alpha) + \frac{1}{t}(u^\alpha(z_t) - u^\alpha(z_0))$$

$$\bar{A}_t(\alpha) = \bar{Y}_t((-Q)\alpha) + \frac{1}{t}(u^\alpha(z_t) - u^\alpha(z_0))$$

大偏差原理:

確率変数 速度関数

$$\bar{X}_t \quad \longleftrightarrow \quad I^{(1-Q^*)}(w) = \inf_{(1-Q^*)\eta=w} I(\eta)$$

$F_1 := F \circ (1 - Q^*)$

<u>**定理 2**</u> $\nabla^2(F_1 - I) < 0$ の仮定のもと、

$\# \mathcal{K}_{F_1} < \infty$ かつ

$$\lim_{t \to \infty} e^{-t\kappa_{F_1}} \mathbf{E}_x \left[\exp\left(tF(\bar{X}_t) \right) \right]$$

$$= \sum_{w \in \mathcal{K}_{F_1}} \frac{h^{\alpha_w}(x) \mathrm{e}^{-u^{\tilde{\alpha}_w}(x)}}{\det(1 - G_w^{F_1} \circ S_w)^{1/2}} \int_M \frac{\mathrm{e}^{u^{\tilde{\alpha}_w}}}{h^{\alpha_w}} dm_{\alpha_w}$$

$(\alpha_w = \nabla F_1(w),\ \tilde{\alpha}_w = \nabla F((1 - Q^*)w))$

$\bar{A}_t$ についても類似の結果が成立

経験分布

$$A_t(\alpha) = \int_0^t \left((\hat{b}, \alpha) - \frac{1}{2} d^* \alpha \right)(z_s) ds$$

$$\Rightarrow A_t(du) = \int_0^t \mathfrak{L} u(z_s) ds$$

$$\iota : \mathfrak{D}_{-p} \longrightarrow H_{-p+1}$$

$$\langle \iota(w), u \rangle_{H_{-p+1}} = \langle w, du \rangle$$

$\mathcal{G} = \mathfrak{L}^{-1}$: Green 作用素

$$\Rightarrow \mathcal{G}^* \circ \iota(\bar{A}_t) = \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{z_s} ds =: \bar{l}_t$$

$$\hat{F} : H_{-p+1} \to \mathrm{R}$$

$F := \hat{F} \circ \mathcal{G}^* \circ \iota$ として、$\bar{A}_t$ での結果を適用

$$\Downarrow$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t\hat{\kappa}_{\hat{F}}} \mathbf{E}_x \left[\mathrm{e}^{t\hat{F}(\bar{l}_t)} \right]$$

$$= \sum_{\mu \in \hat{\mathcal{K}}_{\hat{F}}} \frac{\hat{h}_\mu(x)}{\det\left(1 - \nabla^2 \hat{F} \circ \hat{S}_\mu\right)^{1/2}} \int_M \frac{1}{\hat{h}_\mu} d\mu$$

(cf. Bolthausen-Deuschel-Tamura '95)

$\bar{Y}_t$ での結果との比較

$(1 - \Gamma^*_{\alpha_0})$ に対応する項の不在

$\uparrow$

† Y_t(および X_t、A_t) は、定義が測度 P_x に依存

$\Rightarrow \mathrm{P}_x \longrightarrow \mathrm{P}_x^{\alpha_0}$ の変換で補正が必要

† l_t は、定義が測度 P_x に依存しない

$\Rightarrow$ 補正項が不要