楕円曲線上のWZW模型について

黒木 玄
東北大学大学院理学研究科数学専攻
武部 尚志
東京大学大学院数理科学研究科

1998年3月

0 序論

楕円曲線上の Wess-Zumino-Witten 模型 (WZW 模型)[1] およびそれに関係して現われる可積分系を研究することによって, WZW 模型の定式化のさらなる発展の方向を探りたい.

Knizhnik と Zamolodchikov [KZ] は, 種数 0 の場合における WZW 模型にける conformal blocks が有理古典 r 行列に付随する Knizhnik-Zamolodchikov 方程式 (KZ 方程式) を満たしていることを示した. さらに, Feigin, E. Frenkel, Reshetikhin [FFR] は, 種数 0 の場合における臨界レベルの WZW 模型の枠組によって, 有理古典 r 行列に付随する Gaudin 模型[2] が定式化可能であることを示した.

これらの結果から, 誰でも次の素朴な問題を思い付くであろう. Belavin-Drinfeld の楕円古典 r 行列[3] に付随する KZ 方程式[4] や Gaudin 模型[5] を WZW 模型の枠組で定式化できないであろうか? 我々はすでに, Beilinson と Schechtman の仕事 [BS] や土屋, 山田, 上野の仕事 [TUY] や土基の仕事 [Ts] などによって[6] , 任意の種数を持つ曲線上の WZW 模型の満足な定式化が得られている. それらをそのまま利用することによって, 先の問題の解答が得られないだろうか?

しかし, この後者の問題の解答は否定的である. 主束の変形も含めて, 楕円曲線上の WZW 模型を定式化するとき, 現われる線形微分方程式は, 楕円古典 r 行列に付随する KZ 方程式ではなく, Bernard [Be] によって定式化された Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard 方程式なのである[7] . それではどうすれば良いのか? WZW 模型の定式化のどこを一般化すれば良いのであろうか? この疑問に答えたのが, 筆者達の論文 [KT] である.

最初のヒントは, Cherednik の論文 [Ch] における古典 r 行列の代数幾何的定式化から得られた. Cherednik は古典 r 行列を $\mathbb{C}$ 上の Lie 環に付随するものと考えるのではなく, 曲線上の

[1] 正確には, chiral WZW 模型. ここで, chiral は WZW 模型の holomorphic part すなわち conformal bloks の空間のみを扱うことを意味している.

[2] XXX 模型のある種の漸近極限で得られる模型の一般化.

[3] 定義はこの論説の第 1.1 節もしくは [BD] を見よ.

[4] 第 1.3 節もしくは Etingof [E] を見よ.

[5] XYZ 模型のある種の漸近極限で得られる模型の一般化. 第 1.4 節を見よ.

[6] [Ku] も見よ. そこでは主束の変形も込めた WZW 模型の conformal blocks の層に入る射影平坦接続の座標不変な定式化が与えられている.

[7] より数学的に明確な定式化については, Felder と Wieczerkowski による [FW] を見よ.

平坦 Lie 環束[8] に付随するものとして構成した.

これを見て, 筆者達は WZW 模型を $\mathbb{C}$ 上の代数群に付随するものとして定式化するのではなく, 曲線上の平坦接続付きの群概型に付随するものとして定式化し直すことを考えた. そして, その特別な場合, すなわち楕円曲線上のある特別な群概型に付随する WZW 模型 (捩れ WZW 模型) から, 古典楕円 r 行列に付随する KZ 方程式や Gaudin 模型が出て来ることを示したのである.

別のヒントは, 代数群を用いた保型形式論と WZW 模型の定式化が類似していることからも得られた. 数論における代数体とコンパクト Riemann 面は, あいだに有限体上の曲線の代数函数体を狭むことによって, 多く類似した性質を持っていることが確かめられ, そのことはよく知られている. 一般に, 固定された代数体上の代数群のアデールを用いて, 保型形式論が定式化される. 実は, WZW 模型は, この保型形式論の類似を Riemann 面の場合に考えたものになっているとみなせるのである[9] .

この類似のもとでは, $\mathbb{C}$ 上の代数群よりも, 複素代数曲線上の群概型を考える方が自然であることがすぐにわかる. 複素代数群 G と曲線 X に対して, X 上の直積型の群概型 $G^{\mathrm{triv}} = G \times X$ が定まる. これは, 与えられた代数体上分裂する代数群を考えることの類似になっている. 一般に, 基礎体上分裂しない様々な代数群を考えることができる. これと同様に, WZW 模型の側でも, 曲線上の様々な群概型を考える方が自然である.

このアイデアは, 可積分系の WZW 模型を使った定式化の理論によっても支持される. なぜなら, 上で述べたように, 古典楕円 r 行列に付随する系を WZW 模型の範囲で扱うために, そのような一般化が実際に有効であることが, 筆者達によって示されているからである.

1 楕円 KZ 方程式と楕円 Gaudin 模型

1.1 Belavin-Drinfeld の楕円古典 r 行列

Lie 環 $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g} = sl_N(\mathbb{C}) = \{\, A \in M_N(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} A = 0 \,\}$ と定め, $\mathfrak{g}$ の内積を $(A|B) = \operatorname{tr}(AB)$ と定める. N 次正方行列 α, β を

$$\alpha := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta := \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon^{N-1} \end{pmatrix}$$

と定める. ここで, $\varepsilon = \exp(2\pi i/N)$ である. これらは, $\alpha^N = \beta^N = 1$, $\alpha\beta = \varepsilon\beta\alpha$ を満たしている. 特に, $\mathrm{Ad}(\alpha)$, $\mathrm{Ad}(\beta)$ は互いに可換な $\mathfrak{g}$ の内部自己同型写像を与える.

$J_{a,b} := \beta^a \alpha^{-b}$ と置くと, $\mathrm{Ad}(\alpha)J_{a,b} = \varepsilon^a J_{a,b}$, $\mathrm{Ad}(\beta)J_{a,b} = \varepsilon^b J_{a,b}$ が成立する. $\{\, J_{a,b} \mid (a,b) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^N \setminus \{(0,0)\} \,\}$ は $\mathfrak{g} = sl_N(\mathbb{C})$ の基底をなし, $J^{a,b} := J_{-a,-b}/N$ は内積 $(\,.\,|\,.\,)$ に関するその双対基底をなす. 特に, $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ の Casimir 元 Ω は $\sum_{(a,b)\neq(0,0)} J_{a,b} \otimes J^{a,b}$ に等しい.

上半平面 $\mathfrak{H} := \{\, \operatorname{Im}\tau > 0 \,\}$ から任意に τ を取る. Belavin-Drinfeld の楕円古典 r 行列 $r(t)$ は, 以下の特徴付けの条件によって定義される:

1. $r(t)$ は $\mathbb{C}$ 上の $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ 値有理型函数である.

[8] 平坦接続が入ったベクトル束でファイバーごとに接続と両立する Lie 環構造が与えられたもの.
[9] 曲線上の群概型に平坦接続を与えておくことは, 代数体上の代数群への Galois 群作用の類似である.

2. 任意の $x \in GL_N(\mathbb{C})$ に対して, $(\mathrm{Ad}(x) \otimes \mathrm{Ad}(x))(r(t)) = r(t)$.
3. $r(t+1) = (\mathrm{Ad}(\alpha) \otimes \mathrm{id})(r(t))$ かつ $r(t+\tau) = (\mathrm{Ad}(\beta) \otimes \mathrm{id})(r(t))$.
4. $r(t)$ の極は全て単純で $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ に含まれ, $r(t)$ の $t = 0$ における留数は Casimir 元 Ω に等しい.

このような $r(t)$ は一意に存在し, 古典 Yang-Baxter 方程式を満たしている.

1.2 テータ函数の記号の準備

テータ函数の記号を用意しよう. Mumford [Mu] にしたがって, $\theta_{\kappa,\kappa'}$ を

$$\theta_{\kappa,\kappa'}(t;\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i (n+\kappa)^2 \tau + 2\pi i (n+\kappa)(t+\kappa')}.$$

と定義し, さらに,

$$\begin{aligned}
&\theta_{[a,b]}(t) := \theta_{[a,b]}(t;\tau) := \theta_{\frac{a}{N}-\frac{1}{2},-\frac{b}{N}+\frac{1}{2}}(t;\tau), \\
&\theta_{[a,b]} := \theta_{[a,b]}(0;\tau), \quad \theta'_{[a,b]} := \frac{\partial}{\partial t}\theta_{[a,b]}(t;\tau)\Big|_{t=0}, \\
&w_{a,b}(t) := w_{a,b}(t;\tau) := \frac{\theta'_{[0,0]}}{\theta_{[a,b]}} \frac{\theta_{[a,b]}(t;\tau)}{\theta_{[0,0]}(t;\tau)}, \\
&Z_{a,b}(t) := Z_{a,b}(t;\tau) := \frac{w_{a,b}(t)}{4\pi i}\left(\frac{\theta'_{[a,b]}(t)}{\theta_{[a,b]}(t)} - \frac{\theta'_{[a,b]}}{\theta_{[a,b]}}\right).
\end{aligned}$$

と置く. $Z_{a,b}(t)$ は $t = 0$ に見掛け上の特異点を持つが, $t = 0$ まで解析接続される. これらの函数のより詳しい性質については [KT] を見て欲しい.

このとき, 楕円古典 r 行列は次のように表わされる:

$$r(t) = \sum_{(a,b) \neq (0,0)} w_{a,b}(t) J_{a,b} \otimes J^{a,b}.$$

楕円 KZ 方程式の τ 方向の成分を書き下すために, 次の記号を用意しておく:

$$s(t) = -\sum_{(a,b) \neq (0,0)} Z_{a,b}(t) J_{a,b} \otimes J^{a,b}.$$

ここで簡単のために τ を省略したが, これらは τ にも依存していることに注意せよ.

1.3 楕円 KZ 方程式

任意に $\kappa \in \mathbb{C}^\times$ を取り固定する. V_i $(i = 1, \ldots, L)$ は $\mathfrak{g} = sl_N(\mathbb{C})$ の有限次元既約表現であるとし, $V = \bigotimes_{i=1}^L V_i$ と置く. $A \in \mathfrak{g}$ の V の第 i 成分への作用を $\rho_i(A)$ と書くことにする. このとき, 楕円 KZ 方程式とは, V 値函数 $u = u(z;\tau) = u(z_1, \ldots, z_L;\tau)$ を未知函数とする次の線形微分方程式のことである:

$$\begin{aligned}
&\kappa \frac{\partial}{\partial z_i} u = \sum_{j \neq i} (\rho_j \otimes \rho_i)(r(z_j - z_i))u \quad (i = 1, \ldots, L), \\
&\kappa \frac{\partial}{\partial \tau} u = \sum_{i,j=1}^{L} (\rho_j \otimes \rho_i)(s(z_j - z_i))u.
\end{aligned}$$

この線形微分方程式は完全積分可能である.

1.4 楕円 Gaudin 模型

V_i $(i=1,\dots,L)$, V, ρ_i は前節と同じであるとし, $(\mathbb{C}^N, \rho_\square)$ は $\mathfrak{g} = sl_N(\mathbb{C})$ のベクター表現であるとする. パラメーター z_i $(i=1,\dots,L)$ を固定し,

$$\mathcal{T}(t) := \sum_{i=1}^{L} (\rho_\square \otimes \rho_i)(r(t-z_i)) = \sum_{i=1}^{L} \sum_{(a,b)\neq(0,0)} w_{a,b}(t-z_i)\rho_\square(J_{a,b}) \otimes \rho_i(J^{a,b})$$

と置く. $\mathcal{T}(t)$ は $M_N(\mathbb{C})\otimes\mathrm{End}(V)$ 値の有理型函数であるが, 以下においては, $M_N(\mathbb{C})\otimes\mathrm{End}(V)$ を $M_N(\mathrm{End}(V)) = \{\mathrm{End}(V)$ を成分に持つ N 次正方行列全体 $\}$ と自然に同一視し, $\mathcal{T}(t)$ を $M_N(\mathrm{End}(V))$ 値の有理型函数とみなす. $M_N(\mathrm{End}(V))$ 内での $\mathcal{T}(t)$ の二乗のトレースの半分を $\hat{\tau}(t)$ と表わす:

$$\hat{\tau}(t) := \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\mathcal{T}(t)^2) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{L} \sum_{(a,b)\neq(0,0)} w_{-a,-b}(t-z_i)w_{a,b}(t-z_j)\rho_i(J_{a,b})\rho_j(J^{a,b}).$$

これは, 格子模型における転送行列のある種の準古典極限であり, 異なる t に対する $\hat{\tau}(t)$ は互いに可換である.

Weierstraßの $\wp$ 函数と ζ 函数をそれぞれ $\wp(t)$, $\zeta(t)$ と書くことにする. このとき, $\hat{\tau}(t)$ を次のように表わすことができる:

$$\hat{\tau}(t) = \sum_{i=1}^{L} C_i \wp(t-z_i) + \sum_{i=1}^{L} H_i \zeta(t-z_i) + H_0.$$

ここで, $C_i = \frac{1}{2}(\rho_i\otimes\rho_i)(\Omega)$, すなわち, C_i は $V = \bigotimes_{i=1}^{L} V_i$ の i 番目の成分に作用する Casimir 作用素であり, H_i $(i = 0,1,\dots,L)$ は V に作用する互いに可換な作用素である. ただし, $\sum_{i=1}^{L} H_i = 0$ が成立しているので, 独立な作用素は丁度 L 個である. H_i たちは, 楕円 Gaudin 模型における 2 階の Gaudin Hamiltonians と呼ばれている. すなわち, $\hat{\tau}(t)$ は 2 階の Gaudin Hamiltonians の母函数である.

1.5 参考: 有理函数版について

以上において, 楕円函数版の KZ 方程式および Gaudin 模型について説明した. それらは全て楕円古典 r 行列から出発して, 定式化されるのであった. その手続きにおいて, 楕円古典 r 行列 $r(t)$ を有理古典 r 行列 $r_{\mathrm{rat}}(t) = \Omega/t$ で置き換えれば, 有理函数版の KZ 方程式と Gaudin 模型が得られる.

2 楕円曲線上の捩れ WZW 模型と Gaudin 模型

2.1 楕円曲線上の平坦 Lie 環束

上半平面 $\mathfrak{H}$ 上の点 τ を任意に取り固定し, それに対応する楕円曲線を $X = X_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ と書くことにする. $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ と X の基本群は自然に同一視される: $\pi_1(X) = \mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$. 基本群

$\pi_1(X)$ から $\mathfrak{g}$ の内部自己同型群 $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$ への準同型写像を $1 \mapsto \mathrm{Ad}(\alpha)$, $\tau \mapsto \mathrm{Ad}(\beta)$ によって定める. この準同型が定める各ファイバーが $\mathfrak{g}$ に同型な X 上のベクトル束を $\mathfrak{g}^{\mathrm{tw}}$ と書くことにする. 定義より, $\mathfrak{g}^{\mathrm{tw}}$ は自然に平坦接続 ∇ を持ち, $\mathfrak{g}^{\mathrm{tw}}$ にはファイバーごとの Lie 環の構造と内積 $(\,.\,|\,.\,)$ が自然に誘導される.

$\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ から $\mathbb{C}^\times$ への準同型写像 $1 \mapsto \varepsilon^a$, $\tau \mapsto \varepsilon^b$ から自然に定まる X 上の平坦直線束を $L_{a,b}$ と書くと, $\mathfrak{g}^{\mathrm{tw}}$ は次のような自然な直和分解を持つことがわかる:

$$\mathfrak{g}^{\mathrm{tw}} = \bigoplus_{(a,b)\neq(0,0)} L_{a,b}J_{a,b}.$$

ここで, $\nabla J_{a,b} = 0$ である.

$\mathfrak{g}^{\mathrm{tw}}$ の重要な性質は, その正則切断の芽のなす層 (それも $\mathfrak{g}^{\mathrm{tw}}$ と書く) のコホモロジーが全て消えていることである:

$$H^0(X,\mathfrak{g}^{\mathrm{tw}}) = H^1(X,\mathfrak{g}^{\mathrm{tw}}) = 0.$$

このことは, $L_{a,b}$ $((a,b)\neq(0,0))$ のコホモロジーが全て消えていることから直ちに示される.

以下の目標は, この $\mathfrak{g}^{\mathrm{tw}}$ から出発して, 全てを再構成することである.

2.2 アフィン Lie 環

楕円曲線 X 上の互いに異なる点 $Q_1,\dots,Q_L$ を任意に取り固定する. $(X;Q_1,\dots,Q_L)$ を L 点付き楕円曲線と呼ぶ. $\mathbb{C}$ による X の自然な被覆から得られる Q_i の座標を z_i と書くことにする.

$\mathcal{O}_X$ 加群としての $\mathfrak{g}^{\mathrm{tw}}$ の点 Q_i における完備化を $\mathfrak{g}_+^{Q_i}$ と書くことにする. 上の $\mathfrak{g}^{\mathrm{tw}}$ の直線束への直和分解を通して, $\mathfrak{g}_+^{Q_i}$ は

$$\mathfrak{g}_+^{Q_i} = \bigoplus_{(a,b)\neq(0,0)} \mathbb{C}[[t-z_i]]\otimes J_{a,b} = \mathfrak{g}[[t-z_i]]$$

と同一視される. この同一視のもとで, $\mathfrak{g}^{Q_i} := \mathfrak{g}((t-z_i))$ ($\mathfrak{g}$ 係数の $t-z_i$についての形式 Laurent 級数全体のなす Lie 環) と定める. 因子 $D=\sum_{i=1}^L Q_i$ の上にのみ極を持つ $\mathfrak{g}^{\mathrm{tw}}$ の大域有理切断の全体のなす Lie 環を $\mathfrak{g}_X^D$ と書くことにし, $\mathfrak{g}^{Q_i}$, $\mathfrak{g}_+^{Q_i}$ たちの直和をそれぞれ $\mathfrak{g}^D$, $\mathfrak{g}_+^D$ と書く:

$$\mathfrak{g}_X^D := H^0(X,\mathfrak{g}^{\mathrm{tw}}(*D)),\qquad \mathfrak{g}^D = \bigoplus_{i=1}^L \mathfrak{g}^{Q_i},\qquad \mathfrak{g}_+^D = \bigoplus_{i=1}^L \mathfrak{g}_+^{Q_i}.$$

このとき, 上で述べたコホモロジー消滅は, 直和分解 $\mathfrak{g}^D = \mathfrak{g}_+^D \oplus \mathfrak{g}_X^D$ と同値である.

$\mathbb{C}$ 上の無限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}^D$ は次の 2-cocycle を持つ:

$$\mathrm{c_a}(A,B) := \sum_{i=1}^L \mathrm{Res}_{t=z_i}(\nabla A_i|B_i).$$

ここで, $A=(A_i)_{i=1}^L, B=(B_i)_{i=1}^L \in \mathfrak{g}^D$ であり, $\mathrm{Res}_{t=z}$ は $t=z$ における留数である. この 2-cocycle が定める $\mathfrak{g}^D$ の中心拡大を$\hat{\mathfrak{g}}^D$ と書くことにする:

$$\hat{\mathfrak{g}}^D := \mathfrak{g}^D \oplus \mathbb{C}\hat{k}.$$

ここで, $\hat{k}$ は中心元である. このとき, $\hat{\mathfrak{g}}_+^D := \mathfrak{g}_+^D \oplus \mathbb{C}\hat{k}$ と $\mathfrak{g}_X^D$ は自然に $\hat{\mathfrak{g}}^D$ の Lie 部分環であり, $\hat{\mathfrak{g}}^D$ はベクトル空間としてそれらの直和に分解する.

2.3 Conformal coinvariants と conformal blocks

$\hat{\mathfrak{g}}^{Q_i} := \mathfrak{g}^{Q_i} \oplus \mathbb{C}\hat{k}$ は $\hat{\mathfrak{g}}^D$ の Lie 部分環であり, 通常のアフィン Lie 環と (完備化を除いて) 同型である. ベクトル空間 M に $\hat{k}$ が定数倍 k で作用するとき, M はレベル k であると言う. $k \in \mathbb{C}$ を任意に固定するとき, 同一のレベル k を持つ $\hat{\mathfrak{g}}^{Q_i}$ 加群 M_i $(i = 1, \ldots, L)$ に対して, $M := \bigotimes_{i=1}^{L} M_i$ は自然にレベル k の $\hat{\mathfrak{g}}^D$ 加群とみなせる.

以上の記号のもとで, M に対する conformal coinvariants 全体のなすベクトル空間 $\mathrm{CC}(M)$ と conformal blocks 体のなすベクトル空間 $\mathrm{CB}(M)$ が次のように定義される:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{CC}(M) := M/\mathfrak{g}_X^D M, \\
&\mathrm{CB}(M) := (M/\mathfrak{g}_X^D M)^* = \{\, \Phi \in M^* \mid \Phi(v) = 0 \text{ for } v \in \mathfrak{g}_X^D M \,\}
\end{aligned}$$

これらの空間は, $\mathfrak{g}^{\mathrm{tw}}$ に付随した捩れ WZW 模型の最も基本的な研究対象であり, ある意味で, 代数体上の代数群のアデールの表現論によって定式化された保型形式論における保型形式の空間の Riemann 面に対する類似物であると言うことも可能である.

2.4 Weyl 加群とその conformal coinvariants と conformal blocks

第 1.3 節や第 1.4 節と同様に, V_i は $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現であるとし, $V = \bigotimes_{i=1}^{L} V_i$ と置き, $A \in \mathfrak{g}$ の V の第 i 成分への作用を $\rho_i(A)$ と書くことにする. 任意に $k \in \mathbb{C}$ を取る. V から誘導された $\hat{\mathfrak{g}}^D$ のレベル k の Weyl 加群が以下のように定義される. V に $\hat{\mathfrak{g}}_+^D = \bigoplus_{i=1}^{L} \mathfrak{g}[[t - z_i]] \oplus \mathbb{C}\hat{k}$ を次のように作用させる:

$$\big((A_i(t - z_i))_{i=1}^{L}; a\hat{k}\big)v := \left(\sum_{i=1}^{L} \rho_i(A_i(0)) + ak\right) v.$$

ここで, $A_i(t - z_i) \in \mathfrak{g}[[t - z_i]]$, $a \in \mathbb{C}$, $v \in V$ である. これによって, V は $\hat{\mathfrak{g}}_+^D$ 加群である. この加群が誘導する $\hat{\mathfrak{g}}^D$ 加群を Weyl 加群と呼び, $M_k(V)$ と表わす:

$$M_k(V) := U(\hat{\mathfrak{g}}^D) \otimes_{U(\hat{\mathfrak{g}}_+^D)} V.$$

以下, $v \in V$ を $1 \otimes v$ を対応させることによって, V が $M_k(V)$ に埋め込まれていると考える.

Weyl 加群に対する conformal coinvariants の空間と conformal blocks の空間は簡単に計算できる. V の $M_k(V)$ への埋め込みは次の同型を誘導するのである:

$$\mathrm{CC}(M_k(V)) \xleftarrow{\sim} V = \bigotimes_{i=1}^{L} V_i, \qquad \mathrm{CB}(M_k(V)) \xrightarrow{\sim} V^* = \bigotimes_{i=1}^{L} V_i^*.$$

この結果は直和分解 $\hat{\mathfrak{g}}_+^D := \hat{\mathfrak{g}}_+^D \oplus \mathfrak{g}_X^D$ に注意すれば, 容易に示される.

$\mathrm{CC}(M_k(V))$ と $\mathrm{CB}(M_k(V))$ はレベル k と X 上の L 個の点 Q_i と $\mathfrak{g}$ の L 個の表現 V_i で決まるので, それらをそれぞれ $\mathrm{CC}_k(\{Q_i\}, \{V_i\})$, $\mathrm{CB}_k(\{Q_i\}, \{V_i\})$ と書くことにする.

X 上の Q_i たちとは異なる点 P に対して, $\mathfrak{g}$ の 1 次元自明表現 $\mathbb{C}_P = \mathbb{C}u_P$ を対応させておく. $\mathbb{C}_P$ の誘導する $\hat{\mathfrak{g}}^P$ の Weyl 加群 (上と同様に定義する) を $M_k(\mathbb{C}_P)$ と書き, $\hat{\mathfrak{g}}^P$ のレベル k の真空表現と呼ぶことにする. このとき, $\hat{\mathfrak{g}}^{P+D}$ の Weyl 加群 $M_k(\mathbb{C}_P \otimes V)$ は $M_k(\mathbb{C}_P) \otimes M_k(V)$ と自然に同一視される.

上の結果より, 以上の状況のもとで, $v \in M_k(V)$ に $u_P \otimes v$ を対応させることによって得られる埋め込み写像 $M_k(V) \hookrightarrow M_k(\mathbb{C}_P) \otimes M_k(V) = M_k(\mathbb{C}_P \otimes V)$ が次の同型を誘導することがわかる:

$$\mathrm{CC}_k(\{P, Q_i\}, \{\mathbb{C}_P, V_i\}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{CC}_k(\{Q_i\}, \{V_i\}),$$
$$\mathrm{CB}_k(\{P, Q_i\}, \{\mathbb{C}_P, V_i\}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CB}_k(\{Q_i\}, \{V_i\}).$$

すなわち, 点 P に真空表現を差し込んでも, conformal coinvariants の空間と conformal blocks の空間は変化しないのである.

2.5 菅原作用素

点 P におけるアフィン Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}^P = \mathfrak{g}((t-w)) \oplus \mathbb{C}\hat{k}$ を考える. ここで, w は点 P の座標である. 以下, 記号の簡単のため $\xi = t - w$ と置き, $A \in \mathfrak{g}$, $m \in \mathbb{Z}$ に対して $A[m] := A\xi^m \in \mathfrak{g}((\xi))$ と書く. $A, B \in \mathfrak{g}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して, $A[m]$ と $B[n]$ の正規積を次のように定義する:

$$\,{}^{\circ}_{\circ} A[m]B[n] {}^{\circ}_{\circ}\, = \begin{cases} A[m]B[n], & \text{if } m < n, \\ \frac{1}{2}(A[m]B[n] + B[n]A[m]), & \text{if } m = n, \\ B[n]A[m], & \text{if } m > n. \end{cases}$$

菅原作用素 $S[m]$ を次のように定義する:

$$S[m] = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \,{}^{\circ}_{\circ} J_{a,b}[m-n]\, J^{a,b}[n] {}^{\circ}_{\circ}.$$

これは, 例えば, $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現 V_Q に対する Weyl 加群 $M_k(V_Q)$ 上の作用素として well-defined である.

以下, $\kappa := k + N$ と置き. $k = -N$ すなわち $\kappa = 0$ のとき, レベルは臨界であると言う.

上の作用素達は, 以下の関係式を満たしている:

$$[S[m], A[n]] = -\kappa n A[m+n] \quad \text{for } A \in \mathfrak{g},$$
$$[S[m], S[n]] = \kappa \left((m-n)S[m+n] + \frac{k \dim \mathfrak{g}}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}\ \mathrm{id} \right).$$

特に, 臨界レベルにおいて, 菅原作用素はアフィン Lie 環およびそれら自身と可換である. また, 非臨界レベルにおいて, $T[m] := \kappa^{-1} S[m]$ と置くと, $T[m]$ は中心電荷 $c_k = k \dim \mathfrak{g}/\kappa$ の Virasoro 代数の関係式を満たしていることもわかる (菅原構成).

2.6 臨界レベルの WZW 模型と Gaudin 模型

第 1.4 節で定義した転送行列の準古典極限 $\hat{\tau}(t)$ は $V = \bigotimes_{i=1}^{L} V_i$ 上の作用素に値を持つ有理型函数であった.

前節までの記号のもとで, $v \in V$ に対して $S[-2]u_P \otimes v$ の $\mathrm{CC}_k(\{P, Q_i\}, \{\mathbb{C}_P, V_i\})$ における像を対応させる写像に第 2.4 節で得られた同型写像 $\mathrm{CC}_k(\{P, Q_i\}, \{\mathbb{C}_P, V_i\}) \cong \mathrm{CC}_k(\{Q_i\}, \{V_i\}) \cong V$ を合成して得られる V 上の作用素を一時的に $\hat{\tau}_{\mathrm{WZW}}(w)$ と書くことにする.

定理 2.1 ([KT] Lemma 2.2) $\hat{\tau}(t) = \hat{\tau}_{\mathrm{WZW}}(w)$.

すなわち, 第 1.4 節で定義した転送行列の準古典極限$\hat{\tau}(w)$ は捩れ WZW 模型における conformal coinvariants の空間上の作用素と見たとき, 点 w に真空表現のベクトル $S[-2]u_P$ を差し込む操作と同一視できるのである.

臨界レベル ($k = -N$, すなわち $\kappa = 0$) の場合を考えることによって, 異なる w に対する$\hat{\tau}(w)$ が互いに可換であることを証明することもできるし ([KT] Corollary 2.3), Gaudin Hamiltonians の同時対角化の問題を Weyl 加群の商加群に対する conformal coinvariants の空間もしくは conformal blocks の空間を計算する問題として再定式化することもできる ([KT] Theorem 2.4).

3 楕円曲線上の捩れ WZW 模型と KZ 方程式

3.1 点付き楕円曲線の族上の再定式化

楕円 KZ 方程式を得るためには, 第 2 節の定式化の全てを, 点付き楕円曲線の族上で再定式化しなければいけない. $\mathfrak{H}$ は上半平面であった. 族の基礎空間 S を次のように定義する:

$$S := \{\, (\tau; z) = (\tau; z_1, \dots, z_L) \in \mathfrak{H} \times \mathbb{C}^L \mid z_i - z_j \notin \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} \ \text{ if } \ i \neq j \,\},$$

各 $s = (\tau; z) = (\tau; z_1, \dots, z_L) \in S$ におけるファイバーが L 点付き楕円曲線 $(X_\tau; q_1(s), \dots, q_L(s))$ であるような, 点付き楕円曲線の族 $\pi : \mathfrak{X} \to S$ が自然に定まる. ここで, $X_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ でかつ $q_i(s)$ は z_i の X_τ における像である. 各 q_i は π の切断である. その像を Q_i と書き, $\mathfrak{X}$ 上の因子 D を $D := \bigcup_{i=1}^{L} Q_i$ と定める.

この設定においても, 第 2 節とほとんど全く同様のやり方で $\widetilde{\mathfrak{X}}$ 上の平坦 Lie 環束 $\mathfrak{g}^{\mathrm{tw}}$ や S 上のアフィン Lie 環の層 $\hat{\mathfrak{g}}_S^D$ やその部分環 $\mathfrak{g}_{S,+}^D$, $\hat{\mathfrak{g}}_{S,+}^D$, $\mathfrak{g}_{\mathfrak{X}}^D$ が定義される. $\hat{\mathfrak{g}}_S^D$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して, conformal coinvariants の層 $\mathcal{CC}(\mathcal{M})$ と conformal blocks の層 $\mathcal{CB}(\mathcal{M})$ が全く同様に定義される:

$$\mathcal{CC}(\mathcal{M}) := \mathcal{M}/\mathfrak{g}_{\mathfrak{X}}^D\mathcal{M}, \quad \mathcal{CB}(\mathcal{M}) := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{CC}(\mathcal{M}), \mathcal{O}_S).$$

V_i を $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現とし, それに対応する通常のアフィン Lie 環のレベル k の Weyl 加群を M_i と書き, $V := \bigotimes_{i=1}^{L}$, $M := \bigotimes_{i=1}^{L}$ と置き, $\mathcal{M} := M \otimes \mathcal{O}_S$ と置く. 層 $\mathcal{M}$ には $\hat{\mathfrak{g}}_S^D$ を自然に作用させることができるので, $\mathcal{M}$ を$\hat{\mathfrak{g}}_S^D$ の Weyl 加群と呼ぶことにする. 以下においては簡単のため $\hat{\mathfrak{g}}_S^D$ 加群として, この $\mathcal{M}$ のみを扱うことにする.

$\hat{\mathfrak{g}}_S^D$ の Weyl 加群 $\mathcal{M}$ に対して, 次の自然な同型が存在する ([KT] Proposition 3.4):

$$\mathcal{CC}(\mathcal{M}) \xleftarrow{\sim} V \otimes \mathcal{O}_S, \quad \mathcal{CB}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} V^* \otimes \mathcal{O}_S.$$

3.2 Virasoro 代数の層と可積分接続の構成

S の接層すなわち正則ベクトル場の芽のなす層を $\mathcal{T}_S$ と書き, S 上の Virasoro 代数の層 $\mathcal{V}ir_S^D$ を次のように定める:

$$\mathcal{V}ir_S^D := \mathcal{T}_S \oplus \bigoplus_{i=1}^{L} \mathcal{O}_S((\xi_i))\partial_{\xi_i} \oplus \mathcal{O}_S\hat{c},$$

ただし, $\mathbb{C}$ 上の Lie 環の構造は [KT] の第 4.1 節にある自然なやり方で入れることにする. ここで, $\hat{c}$ は Virasoro 代数の中心元である. レベルが非臨界 ($\kappa = k + N \neq 0$) のとき, 菅原構成によって $\mathcal{V}ir_S^D$ を $\hat{\mathfrak{g}}_S^D$ 加群 $\mathcal{M}$ に自然作用させることができる ([KT] 第 4.2 節).

$\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ は楕円曲線の族の全体空間 $\mathfrak{X}$ の接層であり, $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}/S}$ は族 $\pi : \mathfrak{X} \to S$ の相対接層 (relative tangent sheaf) すなわちファイバーに沿った $\mathfrak{X}$ 上のベクトル場の芽の層であるとする. $\pi : \mathfrak{X} \to S$ は smooth なので, 次の完全列を得る:

$$0 \to \mathcal{T}_{\mathfrak{X}/S}(*D) \to \mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(*D) \to (\pi^*\mathcal{T}_S)(*D) \to 0.$$

自然な Lie 環構造を持つ $\pi^{-1}\mathcal{T}_S \subset (\pi^*\mathcal{T}_S)(*D)$ の $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(*D)$ における逆像を $\mathcal{T}_{\mathfrak{X},\pi}(*D)$ と書き, $\mathcal{V}ir_{\mathfrak{X}}^D := \pi_*\mathcal{T}_{\mathfrak{X},\pi}(*D)$, $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}^D := \pi_*\mathcal{T}_{\mathfrak{X}/S}(*D)$ と置くことによって, 次の Lie 環拡大が得られる:

$$0 \to \mathcal{T}_{\mathfrak{X}}^D \to \mathcal{V}ir_{\mathfrak{X}}^D \to \mathcal{T}_S \to 0.$$

さらに, D に沿った Laurent 展開によって, $\mathcal{V}ir_{\mathfrak{X}}^D$ を $\mathcal{V}ir_{\mathfrak{X}}^D$ に埋め込むことができる. その埋め込み写像は Lie 環準同型である. よって, Lie 環の層 $\mathcal{V}ir_{\mathfrak{X}}^D$ は $\mathcal{V}ir_S^D$ の作用を通して, $\hat{\mathfrak{g}}_S^D$ 加群 $\mathcal{M}$ に作用する. 実は成立していることが示せるのである ([KT] Lemma 4.14):

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}^D\mathcal{M} \subset \mathfrak{g}_{\mathfrak{X}}^D\mathcal{M}.$$

これより, $\mathcal{V}ir_{\mathfrak{X}}^D$ の $\mathcal{M}$ への作用が, $\mathcal{T}_S$ の $\mathcal{CC}(\mathcal{M})$ への作用を誘導することがわかる. その作用は $\mathcal{CC}(\mathcal{M})$ 上の可積分接続である. 以上によって, conformal coinvariants の層 $\mathcal{CC}(\mathcal{M})$ 上の可積分接続が構成された. 双対的に conformal blocks の層 $\mathcal{CB}(\mathcal{M})$ 上の可積分接続が定義される.

3.3 可積分接続と楕円 KZ 方程式

$\hat{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{X}}^D$ の Weyl 加群 $\mathcal{M}$ に対して, 自然な同型 $\mathcal{CC}(\mathcal{M}) \cong V \otimes \mathcal{O}_S$ が成立しているのであった. それでは, この同型を用いて, 前節で構成した $\mathcal{CC}(\mathcal{M})$ 上の可積分接続を具体的に書き下すとき, それはどのような形をしているのであろうか? その解答は次の通り.

定理 3.1 ([KT] Theorem 5.9) *自然な同型によって, $\mathcal{CC}(\mathcal{M})$ と $V \otimes \mathcal{O}_S$ を同一視するとき, 前節で構成した $\mathcal{CC}(\mathcal{M})$ 上の可積分接続に関する平坦切断のなす微分方程式は, 第 1.3 節で説明した楕円 KZ 方程式に一致する.*

なお, この研究とは別のやり方で Etingof [E] は楕円 KZ 方程式と WZW 模型の定式化の関係を得ている. Etingof は種数 0 の場合におけるある種の chiral vertex operator のある種の捻りを入れたトレースが楕円 KZ 方程式を満たしていることを示した. この結果は, 我々の立場では, 種数 0 の捩れ WZW 模型の conformal block のある種の捻りトレースによって, 種数 1 の捩れ WZW 模型の conformal block が得られるという, conformal blocks の factorization property の特別な場合であると理解できる.

他にも, 数論における Langlands program の Riemann 面での類似との関係など, これからの研究において重要な事柄の説明ができなかったことが残念だが, 以上でこの論説を終えることにする.

参考文献

[BD] Belavin, A. A. and Drinfeld, V. G.: Solutions of the classical Yang-Baxter equations for simple Lie algebras, Funct. Anal. Appl. **16**, 159–180 (1982)

[Be] Bernard, D.: On the Wess-Zumino-Witten models on the torus, Nucl. Phys. **B303**, 77–93 (1988)

[BS] Beilinson, A. A., Schechtman V. V.: Determinant bundles and Virasoro algebras, Commun. Math. Phys. **118**, 651–701 (1988)

[Ch] Cherednik, I. V.: Definition of τ functions for generalized affine Lie algebras, Funkts. Anal. i ego Prilozh. **17-3**, 93–95 (1983) (in Russian); Funct. Anal. Appl. **17**, 243–245 (1983) (English transl.)

[E] Etingof, P. I.: Representations of affine Lie algebras, elliptic r-matrix systems, and special functions, Commun. Math. Phys. **159**, 471–502 (1994)

[FFR] Feigin, B., Frenkel, E., Reshetikhin, N.: Gaudin model, Bethe Ansatz and critical level, Commun. Math. Phys. **166**, 27–62 (1994)

[FW] Felder, G., Wieczerkowski, C.: Conformal blocks on elliptic curves and the Knizhnik–Zamolodchikov–Bernard equations, Commun. Math. Phys. **176**, 133–162 (1996)

[KT] Kuroki, G. and Takebe, T.: Twisted Wess-Zumino-Witten models on elliptic curves, Commun. Math. Phys. **190**, 1–56 (1997) [q-alg/9612033]

[Ku] 黒木 玄: 共形場理論の定式化について[10] , 数理研講究録 **929**『群の表現論と等質空間上の解析学』, 103–134 (1995).

[KZ] Knizhnik, V. G., Zamolodchikov, A. B.: Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions, Nucl. Phys. **B247**, 83–103 (1984)

[Mu] Mumford, D., Tata Lectures on Theta I. Basel-Boston: Birkhäuser, 1982.

[Ts] Tsuchimoto, Y.: On the coordinate-free description of the conformal blocks, J. Math. Kyoto Univ. **33-1**, 29–49 (1993)

[TUY] Tsuchiya, A., Ueno, K., Yamada, Y.: Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries, In: Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics, Adv. Stud. Pure Math. **19**, 459–566 (1989)

[10] http://www.math.tohoku.ac.jp/ kuroki/TeX/cft.tar.gz に TEX ファイルが置いてある.