$n \times n$ の L-operator の q 差分版 (1)

黒木 玄

2004 年 9 月 30 日午後 9 時 42 分頃　(2004 年 9 月 15 日作成)

目 次

1　はじめに

しばらく前に「長谷川の Weyl 群作用に関する未発表の仕事の A_{n-1} 型の場合において $n \times n$ の L-operator の形はどうなっているか」という質問をした．その問題について一応「それらしき結果」が得られたのでノートにして回覧することにする．

まず, 問題意識をはっきりさせるために微分量子系に関する類似の結果について説明しよう．q 差分量子系に関する結果はその後に説明する．

2　微分量子系に関する結果

もしも n が 3 以上の奇数ならば,

$$L(z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & f_1 & 1 & & & \\ & \varepsilon_2 & f_2 & \ddots & & \\ & & \varepsilon_3 & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots & f_{n-2} & 1 \\ z & & & & \varepsilon_{n-1} & f_{n-1} \\ zf_n & z & & & & \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

の形の $n \times n$ の L-operator を持つモデルと

$$V_i(w) = \begin{bmatrix} v_i & 1 \\ v_i^2 - \varepsilon_i + w & v_i \end{bmatrix} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

の形の 2×2 の local L-operators を持つモデルが同値になるということが知られている. その同値性は量子化された後でも成立している.

量子版での f_i と v_i の交換関係と互いの変数変換は以下の通り:

$$\begin{aligned}
&[f_i, f_j] = \begin{cases} \mp\hbar & (j \equiv i \pm 1 \mod n), \\ 0 & (j \not\equiv i \pm 1 \mod n), \end{cases} \\
&[v_i, v_j] = (-1)^{j-i}\hbar \qquad (i < j < i + n), \\
&f_i = v_i + v_{i+1}, \\
&v_i = \frac{1}{2}(f_i - f_{i+1} + f_{i+2} - \cdots + f_{i+n-1}).
\end{aligned}$$

ただし f_i および v_i の添字 i を n 周期的に整数全体に拡張しておく. f_i と v_i のあいだの上の変数変換は n が奇数の場合しかうまく行かないことに注意せよ. ε_i は基礎になる代数 (実際には斜体) の中心元であるとする.

置換群 $S_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$ は ε_i には添字の置換として作用し, f_i, v_i たちには以下のように作用する:

$$s_i(f_j) = \begin{cases} f_{i\pm 1} \pm \dfrac{\alpha_i}{f_i} & (j \equiv i \pm 1 \mod n), \\ f_j & (j \not\equiv i \pm 1 \mod n), \end{cases}$$

$$s_i(v_j) = \begin{cases} v_i - \dfrac{\alpha_i}{v_i + v_{i+1}} & (j \equiv i \mod n), \\ v_{i+1} + \dfrac{\alpha_i}{v_i + v_{i+1}} & (j \equiv i + 1 \mod n), \\ v_j & (j \not\equiv i, i+1 \mod n). \end{cases}$$

ここで $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ とおいた. 置換群の f_i への作用と v_i への作用は上の変数変換で互いに移り合う.

この置換群作用は $L(z)$ および $V_i(w)$ それぞれの言葉で表現される. $L(z)$ の言葉で置換群の作用は次のように書ける:

$$s_i(L(z)) = G_i L(z) G_i^{-1}, \qquad G_i = 1 + \frac{\alpha_i}{f_i} E_{i+1,i}.$$

ここで E_{ij} は行列単位であり, 単位行列をも 1 と書いた. $V_i(w)$ の言葉で置換群の作用は次の条件で特徴付けられる:

$$\begin{aligned}
&s_i(V_j(w)) = V_j(w) \qquad (j \not\equiv i, i+1 \mod n), \\
&s_i(V_i(w)) s_i(V_{i+1}(w)) = V_i(w) V_{i+1}(w), \qquad s_i(\varepsilon_i) = \varepsilon_{i+1}, \quad s_i(\varepsilon_{i+1}) = \varepsilon_i.
\end{aligned}$$

この性質のおかげでモノドロミー行列 $V_1(w) \cdots V_n(w)$ が置換群作用の保存量になることがわかる.

前者の $L(z)$ の言葉による置換群作用の表現は置換群作用の **Lax 表示**である. 後者の $V_i(w)$ の言葉で置換群の作用を表現するのが Veselov のやり方である. 後者の表現を **Veselov 表示**と呼ぶことにしよう.

以上の構成の要点をまとめよう:

- 同一のモデルに $n \times n$ の L-operator と 2×2 の local L-operators を用いた二つの表現が存在する.
- $n \times n$ の L-operator の言葉で置換群の作用は Lax 表示される.
- 2×2 の local L-operators の言葉で置換群の作用は Veselov 表示される.

量子ではない古典の場合において, 置換群作用の Lax 表示の理論は unipotent crystal の理論によって一般の Weyl 群の場合に拡張される. この意味でも量子の場合の置換群作用について $n \times n$ の L-operator を用いた Lax 表示を見付けておくことは重要である. unipotent crystal の理論は Lie 代数ではなく代数群に関する理論なので, Lie 代数に付随する微分量子系ではなく, 量子群に付随する q 差分量子系について考えることが重要になる[1].

3　q 差分量子系に関する結果

このノートの目的は $n \times n$ の L-operator を見付けて長谷川の置換群作用の Lax 表示を見付けることである. しかし, まず最初に n が奇数の場合の 2×2 の local L-operators を用いた Veselov 表示について説明しよう (去年の 11 月に名大で話した). その後で $n \times n$ の L-operator について説明する.

3.1　2×2 の local L-operators による置換群作用の Veselov 表示

以下 n は 3 以上の奇数であるとする.

K は標数 0 の可換体であり, $q \in K^\times$ であるとする. 次の生成元と基本関係式を持つ K 上の結合代数の商斜体 $\mathcal{K}$ を考える. 生成元:

$$x_i, \quad y_i \qquad (i = 1, \dots, n).$$

x_i, y_i の添字を n 周期的に整数全体に拡張しておく. 基本関係式:

$$\begin{aligned}
&x_i y_i = y_i x_i, \\
&x_j x_i = q^{(-1)^{j-i-1}} x_i x_j \qquad (i < j < i+n), \\
&y_j x_i = q^{(-1)^{j-i}} x_i y_j \qquad (i < j < i+n), \\
&x_j y_i = q^{(-1)^{j-i}} y_i x_j \qquad (i < j < i+n), \\
&y_j y_i = q^{(-1)^{j-i-1}} y_i y_j \qquad (i < j < i+n).
\end{aligned}$$

例えば,

$$\begin{aligned}
&x_{i+1} x_i = q x_i x_{i+1}, \quad x_{i+2} x_i = q^{-1} x_i x_{i+2}, \quad x_{i+3} x_i = q x_i x_{i+3}, \quad \dots, \\
&y_{i+1} x_i = q^{-1} x_i y_{i+1}, \quad y_{i+2} x_i = q x_i y_{i+2}, \quad y_{i+3} x_i = q^{-1} x_i y_{i+3}, \quad \dots
\end{aligned}$$

[1] unipotent crystal の理論ではまだ Poisson 構造さえほとんど考察されていない. unipotent crystal の理論の量子化を考える以前に量子化される対象である Poisson 構造さえはっきりしていないというのが現状である.

x_i, y_i の添字 i の巡回置換 $(1,2,\dots,n)\mapsto(2,\dots,n,1)$ と $(x_1,\dots,x_n)$ と $(y_1,\dots,y_n)$ の交換はそれぞれ斜体 $\mathcal{K}$ の自己同型を定める. n が奇数であることより以下が成立していることに注意せよ:

- $i<j<i+n$ と $j<i+n<j+n$ は同値であり, $x_jx_i=q^{(-1)^{j-i-1}}x_ix_j$ の (i,j) を $(j,i+n)$ で置き変えて得られる関係式ともとの関係式は同値である. 他の関係式についても同様の事実が成立している.

- $x_1\cdots x_n$, $y_1\cdots y_n$ および
$$\varepsilon_i := x_iy_i = y_ix_i$$
は $\mathcal{K}$ の中心元である.

さらに次の結果が直接的な計算によって証明される.

定理 3.1 (置換群作用の構成) 斜体 $\mathcal{K}$ に置換群 $S_n=\langle s_1,\dots,s_{n-1}\rangle$ を次のように自己同型作用させることができる:

$$s_i(x_j)=\begin{cases} x_i-\dfrac{\alpha_i}{x_{i+1}+y_i}=(x_i+y_{i+1})x_{i+1}(x_{i+1}+y_i)^{-1} & (j\equiv i \mod n),\\ x_{i+1}+\dfrac{\alpha_i}{x_i+y_{i+1}}=(x_i+y_{i+1})^{-1}x_i(x_{i+1}+y_i) & (j\equiv i+1 \mod n),\\ x_j & (j\not\equiv i,i+1 \mod n),\end{cases}$$
$$s_i(y_j)=\begin{cases} y_i-\dfrac{\alpha_i}{y_{i+1}+x_i}=(x_{i+1}+y_i)y_{i+1}(x_i+y_{i+1})^{-1} & (j\equiv i \mod n),\\ y_{i+1}+\dfrac{\alpha_i}{y_i+x_{i+1}}=(x_{i+1}+y_i)^{-1}y_i(x_i+y_{i+1}) & (j\equiv i+1 \mod n),\\ y_j & (j\not\equiv i,i+1 \mod n).\end{cases}$$

ここで $\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}=x_iy_i-x_{i+1}y_{i+1}$ と置いた. このとき s_i は ε_j に互換で作用する:

$$s_i(\varepsilon_j)=\begin{cases}\varepsilon_{i+1} & (j\equiv i \mod n),\\ \varepsilon_i & (j\equiv i+1 \mod n),\\ \varepsilon_j & (j\not\equiv i,i+1 \mod n). \quad\square\end{cases}$$

$y_i=\varepsilon_i/x_i$ であるから, s_i の作用が x_i, y_i たちの基本関係式を保つことを示すためには, s_i の作用が x_i だけからなる関係式を保つことを示せば十分である. そのことは以下のようにして証明される.

$s_i(x_i)$, $s_i(x_{i+1})$ を次のように表わすこともできる:

$$\begin{aligned} s_i(x_i)&=(x_i+y_{i+1})x_{i+1}(x_i(x_{i+1}+y_i))^{-1}x_i\\ &=\frac{x_ix_{i+1}+\varepsilon_{i+1}}{x_ix_{i+1}+\varepsilon_i}x_i=x_i\frac{qx_ix_{i+1}+\varepsilon_{i+1}}{qx_ix_{i+1}+\varepsilon_i}, \end{aligned}\tag{3.1}$$
$$\begin{aligned} s_i(x_{i+1})&=x_{i+1}((x_i+y_{i+1})x_{i+1})^{-1}x_i(x_{i+1}+y_i)\\ &=x_{i+1}\frac{x_ix_{i+1}+\varepsilon_i}{x_ix_{i+1}+\varepsilon_{i+1}}=\frac{qx_ix_{i+1}+\varepsilon_i}{qx_ix_{i+1}+\varepsilon_{i+1}}x_{i+1}. \end{aligned}\tag{3.2}$$

よって

$$s_i(x_{i+1})s_i(x_i)=x_{i+1}x_i=qx_ix_{i+1}=qs_i(x_i)s_i(x_{i+1}).$$

$i+2\le j\le i+n-2$ のとき

$$x_j(x_{i+1}+y_i)=q^{(-1)^{j-(i+1)-1}}x_{i+1}x_j+q^{(-1)^{j-i}}y_ix_j=q^{(-1)^{j-i}}(x_{i+1}+y_i)x_j,$$
$$x_j(x_i+y_{i+1})=q^{(-1)^{j-i-1}}x_ix_j+q^{(-1)^{j-(i+1)}}y_{i+1}x_j=q^{(-1)^{j-i-1}}(x_i+y_{i+1})x_j$$

より

$$x_j(x_{i+1}+y_i)^{-1}=q^{(-1)^{j-i-1}}(x_{i+1}+y_i)^{-1}x_j,$$
$$x_j(x_i+y_{i+1})^{-1}=q^{(-1)^{j-(i+1)-1}}(x_i+y_{i+1})^{-1}x_j$$

であるから,

$$\begin{aligned}s_i(x_j)s_i(x_i)&=x_j(x_i-\alpha_i(x_{i+1}+y_i)^{-1})\\&=q^{j-i-1}(x_i-\alpha_i(x_{i+1}+y_i)^{-1})x_j=q^{j-i-1}s_i(x_i)s_i(x_j),\\s_i(x_j)s_i(x_{i+1})&=x_j(x_{i+1}+\alpha_i(x_i+y_{i+1})^{-1})\\&=q^{(-1)^{j-(i+1)-1}}(x_{i+1}+\alpha_i(x_i+y_{i+1})^{-1})x_j=q^{(-1)^{j-(i+1)-1}}s_i(x_{i+1})s_i(x_j).\end{aligned}$$

注意 3.2 (長谷川の置換群作用との関係) 長谷川の変数 F_j, a_j は次の変数変換によって得られる:

$$F_i=\frac{x_ix_{i+1}}{\sqrt{\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}}},\qquad a_i=\sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i+1}}}.$$

a_i は斜体 $\mathcal{K}$ の中心元であり, F_i たちは次を満たしている:

$$x_{i+1}F_i=qF_ix_{i+1},\qquad F_ix_i=qx_iF_i,\qquad x_jF_i=F_ix_j\quad(2\le|j-i|\le n-2).$$

このことより F_i たちは次の関係式を満たしていることがわかる:

$$F_{i+1}F_i=qF_iF_{i+1},\qquad F_jF_i=F_iF_j\quad(j\not\equiv i\pm1\mod n).$$

公式 (3.1), (3.2) より

$$\begin{aligned}s_i(x_i)&=\frac{1+a_iF_i}{a_i+F_i}a_i^{-1}x_i=a_i^{-1}x_i\frac{1+qa_iF_i}{a_i+qF_i},\\s_i(x_{i+1})&=a_ix_{i+1}\frac{a_i+F_i}{1+a_iF_i}=\frac{a_i+qF_i}{1+qa_iF_i}a_ix_{i+1},\\s_i(x_j)&=x_j\qquad(j\not\equiv i,i+1\mod n).\end{aligned}$$

よって定理 3.1 の置換群作用から長谷川の置換群作用

$$s_i(F_j)=\begin{cases}\dfrac{1+a_iF_i}{a_i+F_i}F_{i-1} & (j\equiv i-1\mod n),\\ F_{i+1}\dfrac{a_i+F_i}{1+a_iF_i} & (j\equiv i+1\mod n),\\ F_j & (j\not\equiv i\pm1\mod n),\end{cases}$$
$$s_i(a_j)=\begin{cases}a_i^{-1} & (j\equiv i\mod n),\\ a_{i\pm1}a_i & (j\equiv i\pm1\mod n),\\ a_j & (j\not\equiv i,i\pm1\mod n)\end{cases}$$

が誘導されることがわかる. この作用は n が偶数であっても well-defined である. □

2×2 の local L-operators $V_i(w)$ を次のように定める:

$$V_i(w)=\begin{bmatrix} x_i & 1 \\ w & y_i \end{bmatrix}.$$

このとき次の結果が直接的な計算によって証明される.

定理 3.3 (置換群作用の Veselov 表示) 定理 3.1 の置換群作用は次の条件によって一意に特徴付けられる:

$$\begin{aligned} &s_i(V_j(w))=V_j(w) \qquad (j\not\equiv i,i+1 \mod n),\\ &s_i(V_i(w))s_i(V_{i+1}(w))=V_i(w)V_{i+1}(w), \qquad s_i(\varepsilon_i)=\varepsilon_{i+1}, \quad s_i(\varepsilon_{i+1})=\varepsilon_i. \end{aligned}$$

特にモノドロミー行列 $V_1(w)\cdots V_n(w)$ は置換群作用の保存量になる. □

3.2 $n\times n$ の L-operator による置換群作用の Lax 表示 (1)

前節と同様に n は 3 以上の奇数であるとする.

さて, やりたいことは長谷川の変数 F_j をうまく変数変換して, $n\times n$ の L-operator

$$L(z)=\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & f_1 & 1 & & & \\ & \varepsilon_2 & f_2 & \ddots & & \\ & & \varepsilon_3 & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots & f_{n-2} & 1 \\ z & & & & \varepsilon_{n-1} & f_{n-1} \\ zf_n & z & & & & \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

を構成し, 長谷川の置換群作用を次のように Lax 表示することである:

$$s_i(L(z))=G_iL(z)G_i^{-1}, \qquad G_i=1+\frac{\alpha_i}{f_i}E_{i+1,i}. \tag{3.3}$$

ここで E_{ij} は行列単位であり, 単位行列をも 1 と書いた. この Lax 表示は次と同値である:

$$s_i(f_j)=\begin{cases} f_{i\pm1}\pm\dfrac{\alpha_i}{f_i} & (j\equiv i\pm1 \mod n),\\ f_j & (j\not\equiv i\pm 1 \mod n), \end{cases} \tag{3.4}$$

$$s_i(\varepsilon_j)=\begin{cases} \varepsilon_{i+1} & (j\equiv i \mod n),\\ \varepsilon_i & (j\equiv i+1 \mod n),\\ \varepsilon_j & (j\not\equiv i,i+1 \mod n). \quad \Box \end{cases} \tag{3.5}$$

ただし f_i, ε_i の添字を n 周期的に整数全体に拡張しておく.

$L(z)$ および置換群作用の Lax 表示の見かけの形は微分量子版と変わりないが, 微分版における f_i たちの交換関係は q 交換関係に置き換わらなければいけない. 正しい q 交換関係を見付けることが問題である.

K は標数 0 の体であるとし, $q\in K^\times$ を任意に固定する.

定義 3.4 (f_i, ε_i の基本関係式) 以下の生成元と基本関係式で定義される K 上の結合代数の商斜体を $\mathcal{K}$ と書くことにする. 生成元:

$$f_i, \quad \varepsilon_i \qquad (i=1,\dots,n).$$

f_i, ε_i の添字を n 周期的に整数全体に拡張しておく. 基本関係式:

(1) ε_i は中心元である.

(2) $f_j f_i = q^{(-1)^{j-i-1}} f_i f_j \quad (i+2\le j\le i+n-2)$.

(3) $f_{i+1}f_i - q f_i f_{i+1} = (1-q)\varepsilon_{i+1}$.

$i+2\le j\le i+n-2$ と $j+2\le i+n\le j+n-2$ は同値であり, (2) の (i,j) を $(j,i+n)$ で置き換えて得られる関係式と (2) 自身は n が奇数であると仮定していたことより同値になることに注意せよ. □

このとき直接的な計算によって次を証明することができる.

定理 3.5 (置換群作用) Lax 表示 (3.3) (すなわち式 (3.4), (3.5)) は斜体 $\mathcal{K}$ への置換群の自己同型作用を定める. □

注意 3.6 (前節との関係) 前節の x_i, y_i を用いて f_i, ε_i を次のように定めると, f_i, ε_i は定義 3.4 の基本関係式を満たしている:

$$f_i = x_i + y_{i+1}, \qquad \varepsilon_i = x_i y_i.$$

実際, $i+2\le j\le i+n-2$ (すなわち $j+2\le i+n\le j+n-2$) のとき

$$\begin{aligned}
f_j f_i &= x_j x_i + x_j y_{i+1} + y_{j+1} x_i + y_{j+1} y_{i+1} \\
&= q^{(-1)^{j-i-1}} x_i x_j + q^{(-1)^{j-(i+1)}} y_{i+1} x_j + q^{(-1)^{j+1-i}} x_i y_{j+1} + q^{(-1)^{j+1-(i+1)-1}} y_{i+1} y_{j+1} \\
&= q^{(-1)^{j-i-1}} (x_i x_j + y_{i+1} x_j + x_i y_{j+1} + y_{i+1} y_{j+1}) = q^{(-1)^{j-i-1}} f_i f_j.
\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}
f_{i+1} f_i &= x_{i+1} x_i + x_{i+1} y_{i+1} + y_{i+2} x_i + y_{i+2} y_{i+1} = q x_i x_{i+1} + \varepsilon_{i+1} + q x_i y_{i+2} + q y_{i+1} y_{i+2}, \\
f_i f_{i+1} &= x_i x_{i+1} + y_{i+1} x_{i+1} + x_i y_{i+2} + y_{i+1} y_{i+2} = x_i x_{i+1} + \varepsilon_{i+1} + x_i y_{i+2} + y_{i+1} y_{i+2}
\end{aligned}$$

なので $f_{i+1}f_i - q f_i f_{i+1} = (1-q)\varepsilon_{i+1}$.

上の f_i, ε_i を x_i, y_i で表わす式は次と同値である:

$$L(z) = K_1(z) K_2(z).$$

ここで

$$K_1(z) = \begin{bmatrix} x_1 & 1 & & \\ & x_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ z & & & x_n \end{bmatrix}, \qquad K_2(z) = \begin{bmatrix} y_1 & 1 & & \\ & y_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ z & & & y_n \end{bmatrix}.$$

$K_1(z)$, $K_2(z)$ はサイトが 2 つのモデルの local L-operators とみなされる.

さらに x_i, y_i への置換群作用は定理 3.5 の置換群作用を誘導する. そのことは以下のようにして確かめられる:

$$\begin{aligned}
s_i(f_{i-1}) &= s_i(x_{i-1}) + s_i(y_i) = x_{i-1} + y_i - \frac{\alpha_i}{y_{i+1}+x_i} = f_{i-1} - \frac{\alpha_i}{f_i}, \\
s_i(f_i) &= s_i(x_i) + s_i(y_{i+1}) = x_i - \frac{\alpha_i}{x_{i+1}+y_i} + y_{i+1} + \frac{\alpha_i}{y_i + x_{i+1}} = x_i + y_{i+1} = f_i, \\
s_i(f_{i+1}) &= s_i(x_{i+1}) + s_i(y_{i+2}) = x_{i+1} + \frac{\alpha_i}{x_i + y_{i+1}} + y_{i+2} = f_{i+1} + \frac{\alpha_i}{f_i}.
\end{aligned}$$

$1 < |j-i| < n$ のとき $s_i(f_j) = f_j$ となることは $j \not\equiv i, i+1 \mod n$ のとき $s_i(x_j) = x_j$, $s_i(y_j) = y_j$ であることからただちに得られる

以上の事実によって少なくとも n が奇数のとき, 定理 3.5 の置換群作用と長谷川の置換群作用は本質的に同じものであることがわかる. 定義 3.4 と定理 3.5 は以上のような筋道で発見された. □

問題 3.7 (unipotent crystal の q 差分量子化?) 以上によって q 差分量子版の $n\times n$ の L 作用素と置換群作用の Lax 表示でもっともらしいものができたが, 以下の問題はまだ残っている:

(1) 量子群との関係はどうなっているか? 以上の構成は affine 量子展開環およびその双対である量子群と関係があるはずである. その関係を具体的に書き下せ.

(2) 置換群 (もしくは一般の Weyl 群) の双有理作用の Lax 表示は古典の場合は unipotent crystal の理論としてまとめられている. 以上の結果はその最も簡単な場合の q 差分量子化を行なっていることになっている. q 差分量子化された unipotent crystal の一般論を構成せよ.

このような大きな問題を扱わなくてもこの周辺ではやるべき計算が大量に残っているように思われる.

たとえば, 置換群作用の Hamiltonian を f_i の式で書き下すことや $K_i(z)$ に関する Veselov 表示を用いて 2 次の置換群 $S_2 = \langle r_1 \rangle$ の作用を構成すること (q 差分量子版の高階 Painlevé 方程式の構成) などはすぐにやれるはずの計算である.

さらに $L(z)$ を 3 重対角行列から $m+1$ 重対角行列に一般化せよという問題も考えられる (最近の名古屋創による計算の q 差分量子版). もちろん n が偶数の場合も問題である. □

上の注意より f_i, ε_i への置換群の作用は x_i, y_i への作用に持ち上がる. その作用の local L-operators $K_1(z)$, $K_2(z)$ に関する Lax 表示を求めよう. まず

$$L_1(z) = L(z) = K_1(z)K_2(z), \qquad L_2(z) = K_2(z)K_1(z), \qquad g_i = y_i + x_{i+1}$$

と置く. このとき $L_2(z)$ は $L_1(z) = L(z)$ の中の f_i を g_i で置き換えた形をしている:

$$L_2(z) = \begin{bmatrix}
\varepsilon_1 & g_1 & 1 & & & \\
 & \varepsilon_2 & g_2 & \ddots & & \\
 & & \varepsilon_3 & \ddots & 1 & \\
 & & & \ddots & g_{n-2} & 1 \\
z & & & & \varepsilon_{n-1} & g_{n-1} \\
zg_n & z & & & & \varepsilon_n
\end{bmatrix}.$$

さらに $G_{1;i}$, $G_{2;i}$ を次のように定める:

$$G_{1;i} = G_i = 1 + \frac{\alpha_i}{f_i} E_{i+1,i}, \qquad G_{2;i} = 1 + \frac{\alpha_i}{g_i} E_{i+1,i}.$$

定理 3.8 (x_i, y_i への置換群作用の Lax 表示) 以上の記号のもとで次が成立している:

$$s_i(K_1(z)) = G_{1;i} K_1(z) G_{2;i}^{-1}, \qquad s_i(K_2(z)) = G_{2;i} K_2(z) G_{1;i}^{-1}. \quad \square$$

これで前節で構成された x_i, y_i への置換群作用は 2×2 の local L-operators $V_i(w)$ による Veselov 表示だけではなく, $n \times n$ の local L-operators $K_i(z)$ による Lax 表示を持つことがわかった.

3.3　$n \times n$ の L-operator による置換群作用の Lax 表示 (2)

この節ではしばらくのあいだ n は 3 以上の奇数であるとし, 斜体 $\mathcal{K}$ は $\sqrt{\varepsilon_i}$ を含むと仮定する.

前節では n が奇数の場合に $n \times n$ の L-operator を x_i, y_i の言葉で表わし, 置換群の作用をその L-operator の言葉で Lax 表示した. この節では前節の L を相似変換することによって F_i, ε_i だけで表示された L-operator を構成する.

γ_i を次のように定める:

$$\gamma_i = \begin{cases} y_1 y_2 \cdots y_i & (i > 0), \\ 1 & (i = 0), \\ y_0^{-1} y_{-1}^{-1} \cdots y_{i+1}^{-1} & (i < 0). \end{cases}$$

この γ_i は漸化式 $\gamma_{i+1} = \gamma_i y_{i+1}$ を満たしている. その漸化式を満たす γ_i は γ_0 を任意に決めれば一意に決定される. $c = y_1 y_2 \cdots y_n$ は $\mathcal{K}$ の中心元であり, γ_i は次を満たしている:

$$\gamma_{i+n} = c\gamma_i.$$

対角行列 Γ を次のように定める:

$$\Gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n).$$

前節の $L(z)$ を Γ で相似変換して得られる行列を $\mathcal{L}(z)$ と表わす:

$$\mathcal{L}(z) = \Gamma L(z) \Gamma^{-1}.$$

$f_i = x_i + y_{i+1}$, $\varepsilon_i = x_i y_i = y_i x_i$, $x_i x_{i+1} = \sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}} F_i$, $a_i = \sqrt{\varepsilon_i / \varepsilon_{i+1}}$ より,

$$f_i = (1 + a_i F_i) y_{i+1}, \qquad \gamma_i F_i \gamma_i^{-1} = q F_i, \qquad \gamma_i y_{i+1} \gamma_{i+1}^{-1} = 1,$$
$$\gamma_i f_i \gamma_{i+1}^{-1} = 1 + q a_i F_i, \qquad \gamma_i \gamma_{i+2}^{-1} = y_{i+2}^{-1} y_{i+1}^{-1} = q \varepsilon_{i+1}^{-1} a_{i+1} F_{i+1}.$$

これらの公式を用いると $\mathcal{L}(z)$ が次のように表わされることがわかる:

$$\mathcal{L}(z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 1 + q a_1 F_1 & q\varepsilon_2^{-1} a_2 F_2 & & & \\ & \varepsilon_2 & 1 + q a_2 F_2 & q\varepsilon_3^{-1} a_3 F_3 & & \\ & & \varepsilon_3 & 1 + q a_3 F_3 & \ddots & \\ & & & \varepsilon_4 & \ddots & q\varepsilon_{n-1}^{-1} a_{n-1} F_{n-1} \\ cz(q\varepsilon_n^{-1} a_n F_n) & & & & \ddots & 1 + q a_{n-1} F_{n-1} \\ cz(1 + q a_n F_n) & cz(q\varepsilon_1^{-1} a_1 F_1) & & & & \varepsilon_n \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

$\mathcal{L}(z)$ への置換群 $S_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1}\rangle$ の作用を計算しよう. $s_i(\mathcal{L}(z))$ は次のように計算される:

$$s_i(\mathcal{L}(z)) = s_i(\Gamma)s_i(L(z))s_i(\Gamma)^{-1} = s_i(\Gamma)G_iL(z)G_i^{-1}s_i(\Gamma)^{-1}$$

ここで $G_i = 1 + \alpha_i f_i^{-1}E_{i+1,i}$, $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ である. よって

$$\mathcal{G}_i = s_i(\Gamma)G_i\Gamma^{-1}$$

と置くと

$$s_i(\mathcal{L}(z)) = \mathcal{G}_i\mathcal{L}(z)\mathcal{G}_i^{-1}. \tag{3.7}$$

もしも $\mathcal{G}_i$ が F_i, ε_i のみで表わされるとすれば, この等式は置換群の F_i, ε_i への作用の Lax 表示を与えていることになる.

前節と同様にして $s_i(y_j)$ は次のように書けることがわかる:

$$\begin{aligned}
s_i(y_i) &= a_i^{-1}y_i\frac{a_i+F_i}{1+a_iF_i} = \frac{a_i+qF_i}{1+qa_iF_i}a_i^{-1}y_i,\\
s_i(y_{i+1}) &= \frac{1+a_iF_i}{a_i+F_i}a_iy_{i+1} = a_iy_{i+1}\frac{1+qa_iF_i}{a_i+qF_i},\\
s_i(y_j) &= y_j \qquad (j \not\equiv i, i+1 \mod n).
\end{aligned}$$

よって

$$s_i(\gamma_j) = \begin{cases} \dfrac{a_i+qF_i}{1+qa_iF_i}a_i^{-1}\gamma_i & (j \equiv i \mod n),\\ \gamma_j & (j \not\equiv i \mod n).\end{cases}$$

これより

$$s_i(\Gamma) = \mathrm{diag}\Big(1, \dots, \underbrace{a_i^{-1}\frac{a_i+qF_i}{1+qa_iF_i}}_{i\ \text{番目}}, \dots, 1\Big)\Gamma.$$

$\Gamma G_i\Gamma^{-1}$ は次のように計算される:

$$\Gamma G_i\Gamma^{-1} = 1 + \frac{\alpha_i}{\gamma_i f_i\gamma_{i+1}^{-1}}E_{i+1,i} = 1 + \frac{\alpha_i}{1+qa_iF_i}E_{i+1,i}.$$

よって $\mathcal{G}_i$, $\mathcal{G}_i^{-1}$ は次のように表わされる:

$$\mathcal{G}_i = \begin{bmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& a_i^{-1}\frac{a_i+qF_i}{1+qa_iF_i} & 0 && \\ &&& \frac{\alpha_i}{1+qa_iF_i} & 1 && \\ &&&&& 1 && \\ &&&&&& \ddots & \\ &&&&&&& 1 \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

$$
\mathcal{G}_i^{-1} = \begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
& & & a_i\frac{1+qa_iF_i}{a_i+qF_i} & 0 & & & \\
& & & -\frac{\alpha_i a_i}{a_i+qF_i} & 1 & & & \\
& & & & & 1 & & \\
& & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & 1
\end{bmatrix}. \tag{3.9}
$$

ここで $a_i^{-1}(a_i+qF_i)/(1+qa_iF_i)$ は $\mathcal{G}_i$ の第 (i,i) 成分であり, $a_i(1+qa_iF_i)/(a_i+qF_i)$ は $\mathcal{G}_i^{-1}$ の第 (i,i) 成分である.

これで $\mathcal{L}(z)$ を (3.6) と定め, $\mathcal{G}_i$ を (3.8) と定めると, $\mathcal{L}(z)$ への置換群の作用が (3.7) のように Lax 表示されることがわかった. $\mathcal{L}(z)$, $\mathcal{G}_i$ は F_i, ε_i のみで表わされており, x_i, y_i を陽に含まないことに注意せよ.

以上において n は 3 以上の奇数であると仮定し, x_i, y_i で生成される斜体を出発点にして議論を進めた. n が奇数であると仮定しなければいけなかったのは x_i, y_i の満たすべき基本関係式は n が奇数の場合以外は $q\neq 1$ と矛盾するからである[2]. しかし F_i の満たすべき基本関係式は n が偶数の場合も $q \neq 1$ と矛盾しない. そこで以下においては n は任意の 3 以上の整数であるとする.

K は標数 0 の可換体であり, $q\in K^\times$ であるとする. 次の生成元と基本関係式を持つ K 上の結合代数の商斜体 $\mathcal{K}$ を考える. 生成元:

$$
F_i, \quad \sqrt{\varepsilon_i} \qquad (i=1,\dots,n).
$$

F_i, $\sqrt{\varepsilon_i}$ の添字を n 周期的に整数全体に拡張しておく. 基本関係式: $\sqrt{\varepsilon_i}$ は中心元であり,

$$
F_{i+1}F_i = qF_iF_{i+1}, \qquad F_jF_i = F_iF_j \quad (j\not\equiv i\pm 1 \mod n).
$$

$a_i=\sqrt{\varepsilon_i/\varepsilon_{i+1}}$ と置き, $\mathcal{L}(z)$, $\mathcal{G}_i$ をそれぞれ (3.6), (3.8) で定める. このとき直接的な計算で次の定理を証明できる.

定理 3.9 Lax 表示 (3.7) は置換群の斜体 $\mathcal{K}$ への自己同型作用を定める. しかも s_i の F_i, ε_i への作用は注意 3.2 のように書ける. (この結果は n が偶数でも正しい.) □

証明. (3.7) の右辺の添字 $(i-1,i,i+1,i+2)$ に対応する成分のみを計算しよう. (3.6), (3.8) より $\mathcal{G}_i\mathcal{L}(z)$ は次のように計算される:

$$
\mathcal{G}_i\mathcal{L}(z) = \begin{bmatrix}
\varepsilon_{i-1} & 1+qa_{i-1}F_{i-1} & q\varepsilon_i^{-1}a_iF_i & 0 \\
0 & \varepsilon_i a_i^{-1}\frac{a_i+qF_i}{1+qa_iF_i} & A & B \\
0 & \frac{\varepsilon_i\alpha_i}{1+qa_iF_i} & C & D \\
0 & 0 & 0 & \varepsilon_{i+2}
\end{bmatrix}.
$$

ここで

$$
A = a_i^{-1}(a_i+qF_i) = 1+qa_i^{-1}F_i,
$$

[2] $x_jx_i = q^{(-1)^{j-i-1}}x_ix_j$ $(i<j<i+n)$ と $x_{i+n}=x_i$ より $x_jx_i=q^{(-1)^{j-i-n}}x_ix_j$ が導かれる. もしも n が偶数ならば $x_ix_j=q^{(-1)^{j-i}}x_ix_j$ となるので $q=1$ でなければいけない.

$$
\begin{aligned}
&B = q\varepsilon_{i+1}^{-1}a_i^{-1}a_{i+1}\frac{a_i+qF_i}{1+qa_iF_i}F_{i+1} = q\varepsilon_i^{-1}a_ia_{i+1}\frac{a_i+qF_i}{1+qa_iF_i}F_{i+1},\\
&C = \varepsilon_{i+1}+\alpha_i = \varepsilon_i,\\
&D = 1+qa_{i+1}F_{i+1}+\frac{\alpha_i\varepsilon_{i+1}}{1+qa_iF_i}qa_{i+1}F_{i+1} = 1+\frac{1+qa_iF_i+\alpha_i\varepsilon_{i+1}^{-1}}{1+qa_iF_i}qa_{i+1}F_{i+1}\\
&\quad = 1+\frac{1+qa_iF_i+a_i^2-1}{1+qa_iF_i}qa_{i+1}F_{i+1} = 1+qa_ia_{i+1}\frac{a_i+qF_i}{1+qa_iF_i}F_{i+1}.
\end{aligned}
$$

$q\varepsilon_i^{-1}a_iF_i = q\varepsilon_{i+1}^{-1}a_i^{-1}F_i$ が成立することにも注意せよ．さらに (3.9) より，

$$
\mathcal{G}_i\mathcal{L}(z)\mathcal{G}_i^{-1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{i-1} & A' & q\varepsilon_{i+1}^{-1}a_i^{-1}F_i & 0\\ 0 & B' & 1+qa_i^{-1}F_i & B\\ 0 & 0 & \varepsilon_i & D\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{i+2} \end{bmatrix}.
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
A' &= (1+qa_{i-1}F_{i-1})a_i\frac{1+qa_iF_i}{a_i+qF_i} - \frac{q\alpha_i\varepsilon_{i+1}^{-1}F_i}{a_i+qF_i}\\
&= \big((1+qa_{i-1}F_{i-1})a_i(1+qa_iF_i) - q(a_i^2-1)F_i\big)(a_i+qF_i)^{-1}\\
&= (a_i+qF_i+qa_ia_{i-1}F_{i-1}(1+qa_iF_i))(a_i+qF_i)^{-1}\\
&= 1+qa_ia_{i-1}F_{i-1}\frac{1+qa_iF_i}{a_i+qF_i},\\
B' &= \varepsilon_i-\alpha_i = \varepsilon_{i+1}.
\end{aligned}
$$

つまり

$$
\begin{aligned}
&\tilde{F}_{i-1} = F_{i-1}\frac{1+qa_iF_i}{a_i+qF_i} = \frac{1+a_iF_i}{a_i+F_i}F_{i-1}, \qquad \tilde{F}_{i+1} = \frac{a_i+qF_i}{1+qa_iF_i}F_{i+1} = F_{i+1}\frac{a_i+F_i}{1+a_iF_i},\\
&\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i+1}, \qquad \tilde{\varepsilon}_{i+1} = \varepsilon_i, \qquad \tilde{a}_i = a_i^{-1}, \qquad \tilde{a}_{i\pm1} = a_ia_{i\pm1}
\end{aligned}
$$

と置くと, $\mathcal{G}_i\mathcal{L}(z)\mathcal{G}_i^{-1}$ は次のように表わされる:

$$
\mathcal{G}_i\mathcal{L}(z)\mathcal{G}_i^{-1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{i-1} & 1+q\tilde{a}_{i-1}\tilde{F}_{i-1} & q\tilde{\varepsilon}_i^{-1}\tilde{a}_iF_i & \\ & \tilde{\varepsilon}_i & 1+q\tilde{a}_iF_i & q\tilde{\varepsilon}_{i+1}^{-1}\tilde{a}_{i+1}\tilde{F}_{i+1}\\ & & \tilde{\varepsilon}_{i+1} & 1+q\tilde{a}_{i+1}\tilde{F}_{i+1}\\ & & & \varepsilon_{i+2} \end{bmatrix}.
$$

この結果と注意 3.2 と比較すれば定理が証明される． □

3.4 $n\times n$ の L-operator による置換群作用の Lax 表示 (3)

前節の $\mathcal{L}(z)$ は次のように分解される:

$$
\mathcal{L}(z) = \mathcal{K}_1(z)\mathcal{K}_2(z).
$$

ただし, $\mathcal{K}_1(z)$, $\mathcal{K}_2(z)$ は φ_i を

$$\varphi_i = q\varepsilon_i^{-1} a_i F_i = \frac{qF_i}{\sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}}} \quad (n \text{ が奇数の場合はさらに} = y_{i+1}^{-1} y_i^{-1})$$

と置いて次のように定める:

$$\mathcal{K}_1(z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 1 & & \\ & \varepsilon_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ cz & & & \varepsilon_n \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{K}_2(z) = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \varphi_{n-1} \\ cz\varphi_n & & & 1 \end{bmatrix}.$$

ここで c は $\mathcal{K}^\times$ の中心元である. この節の目標は前節の置換群作用の Lax 表示を $\mathcal{K}_1(z)$, $\mathcal{K}_2(z)$ への作用に分解することである.

注意 3.10 もしも n が奇数であり, F_i が x_i, y_i たちで表示されているならば, $\mathcal{K}_1(z)$, $\mathcal{K}_2(z)$ は前々節の $K_1(z)$, $K_2(z)$ から以下のようにして構成される. 前節と同様に $\gamma_i = y_1 y_2 \cdots y_n$ と置くと,

$$\gamma_i x_i \gamma_{i-1}^{-1} = \varepsilon_i, \qquad \gamma_{i-1} y_i \gamma_i^{-1} = 1, \qquad \gamma_{i-1}\gamma_{i+1}^{-1} = \varphi_i.$$

よって $c = y_1 \cdots y_n$ と置いて対角行列 Γ_1, Γ_2 を

$$\Gamma_1 = \operatorname{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \qquad \Gamma_2 = \operatorname{diag}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}).$$

と定めると次が成立する:

$$\mathcal{K}_1(z) = \Gamma_1 K_1(z) \Gamma_2^{-1}, \qquad \mathcal{K}_2(z) = \Gamma_2 K_1(z) \Gamma_1^{-1}. \quad \square$$

前節の $\mathcal{G}_i$ を $\mathcal{G}_{1,i}$ と書き, 新たに $\mathcal{G}_{2,i}$ を次のように定める:

$$\mathcal{G}_{2,i} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & \frac{\alpha_i}{1+qa_iF_i} & a_i^{-1}\frac{a_i+qF_i}{1+qa_iF_i} & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

ここで $a_i^{-1}(a_i + qF_i)/(1 + qa_iF_i)$ は $\mathcal{G}_{2,i}$ の $(i+1, i+1)$ 成分である.

$\mathcal{G}_{1,i}$, $\mathcal{G}_{2,i}$ の添字 $i, i+1$ に対応する 2×2 のブロック $\mathcal{G}_{1,i}\left[\begin{smallmatrix} i,i+1 \\ i,i+1 \end{smallmatrix}\right]$, $\mathcal{G}_{2,i}\left[\begin{smallmatrix} i,i+1 \\ i,i+1 \end{smallmatrix}\right]$ は次の形をしている:

$$\mathcal{G}_{1,i}\left[\begin{smallmatrix} i,i+1 \\ i,i+1 \end{smallmatrix}\right] = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_i & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{G}_{2,i}\left[\begin{smallmatrix} i,i+1 \\ i,i+1 \end{smallmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ B_i & A_i \end{bmatrix}.$$

ここで

$$A_i = a_i^{-1}\frac{a_i + qF_i}{1 + qa_iF_i} = \frac{1 + \varepsilon_{i+1}\varphi_i}{1 + \varepsilon_i\varphi_i}, \qquad B_i = \frac{\alpha_i}{1 + qa_iF_i} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}}{1 + \varepsilon_i\varphi_i}.$$

A_i, B_i は次の関係式を満たしている:

$$A_i\varepsilon_i - B_i = \varepsilon_{i+1}, \tag{3.10}$$
$$A_i + B_i\varphi_i = 1. \tag{3.11}$$

逆に A_i, B_i はこの関係式から一意に決定される.

定理 3.11 $\mathcal{K}_i(z)$, $\mathcal{K}_2(z)$ への置換群の作用は次の Lax 表示を持つ:

$$s_i(\mathcal{K}_1(z)) = \mathcal{G}_{1,i}\mathcal{K}_1(z)\mathcal{G}_{2,i}^{-1}, \qquad s_i(\mathcal{K}_2(z)) = \mathcal{G}_{2,i}\mathcal{K}_2(z)\mathcal{G}_{1,i}^{-1}. \quad \square$$

証明. $s_i(\mathcal{K}_1(z))$ は $\mathcal{K}_1(z)$ の中の ε_i と ε_{i+1} を交換してできる行列に等しい. $\mathcal{G}_{1,i}\mathcal{K}_1(z)\mathcal{G}_{2,i}^{-1}$ が実際にその形になることは添字 $i, i+1$ に対応する 2×2 のブロックの計算によって確かめられる. その計算は次の通り:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{1,i}\left[{}^{i,i+1}_{i,i+1}\right]\mathcal{K}_1(z)\left[{}^{i,i+1}_{i,i+1}\right]\mathcal{G}_{2,i}\left[{}^{i,i+1}_{i,i+1}\right]^{-1} &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_i & 1 \\ 0 & \varepsilon_{i+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -A_i^{-1}B_i & A_i^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A\varepsilon_i - B_i & 1 \\ B\varepsilon_i - (\varepsilon_{i+1} + B_i)A_i^{-1}B_i & (\varepsilon_{i+1} + B_i)A_i^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{i+1} & 1 \\ 0 & \varepsilon_i \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

最後の等号で (3.10) を用いた.

$s_i(\varphi_j)$ は次の形になる:

$$s_i(\varphi_j) = \begin{cases} \varphi_{i-1}A_i^{-1} & (j \equiv i-1 \mod n), \\ A_i\varphi_{i+1} & (j \equiv i+1 \mod n), \\ \varphi_j & (j \not\equiv i \pm 1 \mod n). \end{cases}$$

よって $s_i(\mathcal{K}_2(z)) = \mathcal{G}_{2,i}\mathcal{K}_2(z)\mathcal{G}_{1,i}^{-1}$ を証明するためには添字 $i-1, i, i+1, i+2$ に対応する 4×4 のブロックのみを計算すれば十分である. その計算は以下の通り:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{2,i}\mathcal{K}_2(z)\mathcal{G}_{1,i}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & B_i & A_i & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \varphi_{i-1} & & \\ & 1 & \varphi_i & \\ & & 1 & \varphi_{i+1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & A_i^{-1} & & \\ & -A_i^{-1}B_i & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \varphi_{i-1}A_i^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & A_i^{-1} - \varphi_i A_i^{-1}B_i & \varphi_i & 0 \\ 0 & B_iA_i^{-1} - (B_i\varphi_i + A_i)A_i^{-1}B_i & B_i\varphi_i + A_i & A_i\varphi_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \varphi_{i-1}A_i^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & A_i\varphi_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

最後の等号で (3.11) を用いた. これで $s_i(\mathcal{K}_2(z)) = \mathcal{G}_{2,i}\mathcal{K}_2(z)\mathcal{G}_{1,i}^{-1}$ も証明された. $\square$

注意 3.12 前節の定理 3.9 は上の定理からただちに導かれる．しかも証明に必要な計算は上の定理の方がずっと整理されている．□

注意 3.13 もしも n が奇数であり，F_i が x_i, y_i たちで表示されているならば，$\mathcal{G}_{1,i}(z)$, $\mathcal{G}_{2,i}(z)$ は前々節の $G_{1,i}(z)$, $G_{2,i}(z)$ から次のように構成される:

$$\mathcal{G}_{1,i} = s_i(\Gamma_1) G_{1,i} \Gamma_1^{-1}, \qquad \mathcal{G}_{2,i} = s_i(\Gamma_2) G_{2,i} \Gamma_2^{-1}.$$

よってそのとき上の定理は定理 3.8 から導かれる．□