

# ソリトン系の基本パターン Part 3

黒木 玄

2001年6月14日\*

## 目次

1	Poisson 構造の一般論	2
2	Lie algebra の dual space 上の Poisson 構造	5
2.1	$\mathfrak{g}^*$ 上の Poisson bracket の座標表示	5
2.2	$S(\mathfrak{g})$ と $U(\mathfrak{g})$ の関係	6
2.3	$\mathfrak{g}^*$ 上の Poisson bracket の他の表示	6
2.4	$\mathfrak{g}^*$ 上の Hamiltonian vector field と Lax 方程式	7
3	ソリトン系の Lie algebra レベルでの Hamiltonian 構造	9
3.1	ソリトン系の基本パターンの復習	9
3.2	Lie algebra レベルでの Hamiltonian 構造が存在するための十分条件	11
4	前節の方法が使えない場合について	13
5	群レベルでの Hamiltonian 構造を考えることの必要性	15

---

\*これはプレインテキスト版 <http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-3.txt> の日付け。TEX 版は 2002 年 1 月 17 日に菊地哲也によって作成された。この版はさらにそれに筆者が追加・修正を加えたものである。筆者の疑問や意見は 2001 年 6 月 14 日時点のものであり、現在では解決や変化している場合がある。

Date: Thu, 14 Jun 2001 21:39:24 +0900 (JST)  
From: Kuroki Gen <kuroki@math.tohoku.ac.jp>  
Message-Id: <200106141239.VAA18883@sakaki.math.tohoku.ac.jp>  
Subject: ソリトン系の基本パターン Part 3

これは

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-1.0.txt>  
<http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-1.1.txt>  
<http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-2.txt>

の続き. ソリトン系について専門家であればよく知っていることはずの事柄をメールに書いて送っています.

このメールの内容はソリトン系の Lie algebra レベルでの Hamiltonian 構造に関する解説です. 簡単のために基礎体は実数体  $\mathbb{R}$  または複素数体  $\mathbb{C}$  であるとする.

## 1 Poisson 構造の一般論

一般に可換環  $A$  の Poisson 構造とは Lie algebra の公理を満たす linear map  $\{, \} : A \otimes A \rightarrow A$  で任意の  $f, g, h \in A$  に対して,

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

を満たすもののことである. この条件は,  $\{f, \cdot\}$  が  $A$  に作用する derivation であることを意味している. このとき,  $\{, \}$  は Poisson bracket であると言う.

よって,  $A$  が多様体  $M$  上の函数環  $C^\infty(M)$  であるならば,  $\{f, \cdot\}$  は  $M$  上のベクトル場であることを意味している. Poisson bracket は Lie algebra の公理を満たしているので,  $\{\cdot, f\} = -\{f, \cdot\}$  であるから,  $\{\cdot, f\}$  も  $M$  上のベクトル場になる. このことから,  $M$  の local coordinate  $x_i$  を取るとき,  $M$  上の函数  $f, g$  の Poisson bracket は次のように計算される:

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \{x_i, x_j\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

よって, 局所的に Poisson bracket は局所座標  $x_i$  たちの Poisson bracket によって決定される. Poisson bracket に対して,

$$B = \sum_{i,j} \{x_i, x_j\} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_j}$$

を Poisson bivector と呼ぶ.  $B$  は次のような  $T^*M$  から  $TM$  への写像と同一視される:

$$B \left( \sum_j A_j dx_j \right) = \sum_{i,j} \{x_i, x_j\} A_j \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

すなわち, Poisson bivector を通して, 1-form から vector field が得られる.

例 1.1 (symplectic structure の Poisson 構造) 座標  $q_i, p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) において, 次の公式は Poisson 構造を定める:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{i,j}, \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0.$$

一般の函数  $f, g$  に対しては,

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \quad \square$$

以下  $M$  は Poisson 構造が定められた多様体 (それを Poisson 多様体と呼ぶ) であるとし,  $x_i$  は局所座標系であるとする.

このとき, 上で注意したように  $M$  上の函数  $H$  に対して,  $M$  上のベクトル場

$$\{\cdot, H\} = B(dH) = \sum_{i,j} \{x_i, x_j\} \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

が定まる. これを Hamiltonian  $H$  から定まる  $M$  上の Hamiltonian ベクトル場と呼ぶ. そして, Hamiltonian ベクトル場から決まるフローを記述する次の常微分方程式を Hamiltonian  $H$  に関する Hamilton の正準運動方程式 (Hamilton's canonical equation of motion) もしくは Hamilton 方程式と呼ぶ:

$$\frac{dx_i}{dt} = \{x_i, H\} = \sum_j \{x_i, x_j\} \frac{\partial H}{\partial x_j}.$$

この方程式の解を  $M$  上の函数  $F$  に代入したものを  $F$  と略記すると,  $F$  も  $x_i$  と同じ形の次の方程式を満たしている:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}.$$

実際,

$$\text{左辺} = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{i,j} \{x_i, x_j\} \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \text{右辺}.$$

例 1.2 例 1.1 の状況のもとで, Hamiltonian  $H$  に関する正準運動方程式は次の形になる:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

例えば,  $n = 1$ ,  $(q, p) = (q_1, p_1)$  で

$$H = H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + U(q)$$

のとき, 正準方程式は次の形になる:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q}.$$

この微分方程式は左の式と同値な  $p = m dq/dt$  を右の式に代入することによって次と同値であることがわかる:

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial q}.$$

これは, ポテンシャル  $U$  の中での質量  $m$  の質点に関する Newton の運動方程式である. 例えば, バネ定数  $k$  の調和振動子のポテンシャルは

$$U = U(q) = \frac{k}{2} q^2$$

の形になる. 調和振動子の正準運動方程式と Newton の運動方程式は次の形になる:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = -kq; \quad m \frac{d^2 q}{dt^2} = -kq.$$

古典力学における多くの Hamiltonian は上のような形をしている. Hamiltonian の物理的意味は系の全エネルギーである. 例えば上の場合においては,

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2m} p^2 = (\text{運動エネルギー}), \\ U &= U(q) = (\text{ポテンシャル・エネルギー}), \\ H &= K + U = (\text{全エネルギー}). \quad \square \end{aligned}$$

**定理 1.3** Hamiltonian  $H$  に関する Hamiltonian ベクトル場から決まる流れに沿って函数  $F$  が constant であるための必要十分条件は恒等的に  $\{F, H\} = 0$  が成立すること, すなわち  $F$  が  $H$  と Poisson 可換であることである.

**証明.**  $x(t) = (x_i(t))$  が Hamilton 方程式の解であるとすると, 上で述べたように,

$$\frac{dF}{dt}(x(t)) = \{F, H\}(x(t))$$

が成立している. よって,  $F$  が  $x(t)$  に沿って constant であるための必要十分条件は  $\{F, H\}(x(t)) = 0$  が成立することである. よって, 任意の解曲線  $x(t)$  に沿って  $F$  が constant であるための必要十分条件は恒等的に  $\{F, H\} = 0$  が成立することである.  $\square$

**定義 1.4** Hamiltonian  $H$  に関する保存量とは  $H$  と Poisson 可換な函数のことである. 例えば,  $H$  自身は保存量である. 上の定理より保存量とは Hamilton 方程式の解に沿って constant な函数のことである.  $\square$

互いに Poisson 可換な Hamiltonians  $H_j$  は互いに可換な Hamiltonian ベクトル場を定める. 互いに Poisson 可換な Hamiltonians の系を見付けることは古典力学における基本的な問題である.

**参考 1.5** Poisson 多様体と symplectic 多様体 (定義は省略) の間には以下のような関係がある:

- (1) Poisson 多様体  $M$  が symplectic になるための必要十分条件は任意の局所座標系で行列  $(\{x_i, x_j\})_{i,j=1,\dots,n}$  が任意の点で可逆になることである。
- (2) Poisson 多様体  $M$  上の点  $x$  から、幾つかの Hamiltonian ベクトル場に沿ってたどり着ける点の全体  $N$  は  $x$  を含む symplectic 部分多様体である。

この結果は constant rank の場合が

- A. A. Kirillov, “Local Lie algebras”, Russian Math. Surveys, **31**, (4), (1976), 55–75.

で証明され、一般の場合は

- A. Weinstein, “The local structure of Poisson manifolds”, J. Diff. Geom. **18**, (1983), 523–557.

で証明された。上のような  $N$  を  $M$  の symplectic leaf と呼ぶ。

例えば、Lie 群  $G$  の coadjoint orbits の全体は Lie 環  $\mathfrak{g}$  の dual space  $\mathfrak{g}^*$  における symplectic leaves の全体に一致している。□

## 2 Lie algebra の dual space 上の Poisson 構造

$\mathfrak{g}$  は Lie algebra であるとき、その dual space  $\mathfrak{g}^*$  には自然に Poisson 構造が入ることを説明する。

### 2.1 $\mathfrak{g}^*$ 上の Poisson bracket の座標表示

任意の  $X \in \mathfrak{g}$  は  $\mathfrak{g}^*$  上の linear な函数とみなせ、 $\mathfrak{g}$  の basis は  $\mathfrak{g}^*$  の linear な座標系とみなせる。よって、 $\mathfrak{g}^*$  上の Poisson 構造は  $\mathfrak{g}$  の元たちの Poisson brackets から一意に決定される。 $\mathfrak{g}^*$  上の標準的な Poisson 構造とは、

$$\{X, Y\} = [X, Y] \quad (x, y \in \mathfrak{g})$$

によって決まる Poisson 構造のことである。ここで、右辺の  $[, ]$  は  $\mathfrak{g}$  の Lie algebra 構造である。

$\mathfrak{g}$  の basis  $E_i$  に対応する  $\mathfrak{g}^*$  上の linear な座標系を  $x_i$  と書くとき、 $\mathfrak{g}^*$  上の函数  $F, G$  の Poisson bracket は前節に書いたように次の形になる：

$$\{F, G\} = \sum \{x_i, x_j\} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} = \sum [E_i, E_j] \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j}.$$

例 2.1  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$  であるとし、その basis として行列単位  $E_{ij}$  を取る。 $\mathfrak{g}$  に invariant nondegenerate symmetric bilinear form  $(, )$  を

$$(X, Y) := \text{trace}(XY) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

と定め、これを用いて  $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$  と同一視しておく。このとき、行列単位  $E_{ij}$  は  $\mathfrak{g}^*$  上の次のような函数と同一視される：

$$X \rightarrow x_{ji} = (E_{ij}, X) \quad (X = (x_{ij}) \in \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*).$$

すなわち,  $E_{ij}$  は行列の  $(j, i)$  成分を与える函数  $x_{ji}$  と同一視される. 行列単位は

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}$$

を満たしているので,  $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$  上の Poisson 構造は  $i$  と  $j, k$  と  $l$  を交換した次の公式で決定される:

$$\{x_{ij}, x_{kl}\} = \delta_{il}x_{kj} - \delta_{kj}x_{il}.$$

この式の右辺はちょうど行列単位の関係式の  $-1$  倍の形になっている. これが,  $\mathfrak{gl}(n)$  の場合の Poisson bracket の公式である.  $\square$

## 2.2 $S(\mathfrak{g})$ と $U(\mathfrak{g})$ の関係

$\mathfrak{g}^*$  上の Poisson 構造と  $\mathfrak{g}$  の universal enveloping algebra  $U(\mathfrak{g})$  は密接に関係している.  $\mathfrak{g}$  から生成される symmetric algebra  $S(\mathfrak{g})$  は  $\mathfrak{g}^*$  上の多項式函数全体のなす可換環と同一視され, Poisson 構造を持つ. 一方,  $U(\mathfrak{g})$  に increasing filtration  $U_n$  を

$$U_0 = \mathbb{C}, \quad U_{n+1} = U_n + \mathfrak{g}U_n$$

と定めると, 以下が成立することがわかる:

- (1)  $U_m U_n \in U_{m+n}$ ,
- (2)  $[U_m, U_n] \in U_{m+n-1}$ ,
- (3)  $S^n(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}r^n U(\mathfrak{g}) := U_n / U_{n-1}$ .

$P \in U_n - U_{n-1}$  に対応する  $S^n(\mathfrak{g})$  の元を  $\sigma_n(P)$  と書き,  $P$  の symbol と呼ぶ. このとき,  $P \in U_m - U_{m-1}$ ,  $Q \in U_n - U_{n-1}$  に対して

$$\sigma_{m+n-1}([P, Q]) = \{\sigma_m(P), \sigma_n(Q)\}.$$

すなわち,  $S(\mathfrak{g})$  の Poisson bracket は  $U(\mathfrak{g})$  の commutator の symbol で表わせる. この結果より,  $S(\mathfrak{g})$  の Poisson bracket が Lie algebra の公理を満たしていることがすぐにわかる. このことから,  $U(\mathfrak{g})$  は  $\mathfrak{g}^*$  上の函数環  $S(\mathfrak{g})$  の量子化になっていることがわかる.

$U(\mathfrak{g})$  と  $S(\mathfrak{g})$  の関係と同様の関係が多様体  $M$  上の微分作用素環と cotangent bundle  $T^*M$  上の函数環のあいだにある.

以上の話に関しては,

- 谷崎俊之, 『環と体 3 非可換環論』, 岩波講座現代数学の基礎 17, 岩波書店

の第3章が詳しい.

## 2.3 $\mathfrak{g}^*$ 上の Poisson bracket の他の表示

$\mathfrak{g}^*$  と  $\mathfrak{g}$  のあいだの pairing を  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  と書くことにする.

$\mathfrak{g}^*$  上の各点での tangent space は  $\mathfrak{g}^*$  自身と同一視されるので, cotangent space は  $\mathfrak{g}$  と同一視される.  $\mathfrak{g}$  の basis  $E_i$  を  $\mathfrak{g}^*$  上の linear な座標系  $x_i$  と同一視する:

$$x_i(X) = \langle X, E_i \rangle \quad (X \in \mathfrak{g}^*).$$

例えば, 例 1.2 によれば  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$  のとき, 行列単位  $E_{ij}$  と行列  $X$  に対してその  $(j, i)$  成分  $x_{ji}$  を対応させる函数が同一視されるのであった.

このとき,  $\mathfrak{g}^*$  上の 1-form と  $\mathfrak{g}^*$  上の  $\mathfrak{g}$ -valued function が次のように同一視される:

$$\sum f_i(x) dx_i = \sum f_i(x) E_i.$$

よって,  $\mathfrak{g}^*$  上の 1-form には  $\mathfrak{g}$  の Lie algebra 構造を用いて, 自然に bracket が定義される:

$$[dx_i, dx_j] = [E_i, E_j].$$

定理 2.2 以上の準備のもとで,  $\mathfrak{g}^*$  上の函数  $F, G$  に対して, その Poisson bracket は以下のような表示を持つ:

$$\{F, G\}(X) = \langle X, [dF(X), dG(X)] \rangle.$$

証明. 第 2.1 節より,

$$\{F, G\} = \sum [E_i, E_j] \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sum \langle X, [E_i, E_j] \rangle \frac{\partial F(X)}{\partial x_i} \frac{\partial G(X)}{\partial x_j} \\ &= \left\langle X, \sum [E_i, E_j] \frac{\partial F(X)}{\partial x_i} \frac{\partial G(X)}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle X, \left[ \sum \frac{\partial F(X)}{\partial x_i} E_i, \sum \frac{\partial G(X)}{\partial x_j} E_j \right] \right\rangle = \text{右辺}. \quad \square \end{aligned}$$

もちろん, この定理の公式を  $\mathfrak{g}^*$  上の Poisson 構造の定義だと思っても良い.

## 2.4 $\mathfrak{g}^*$ 上の Hamiltonian vector field と Lax 方程式

前節の記号をそのまま用いる.

$H$  は  $\mathfrak{g}^*$  上の函数であるとする. 実際には,  $\mathfrak{g}^*$  上の 1-form

$$dH = \sum f_i dx_i, \quad f_i \text{ は } \mathfrak{g}^* \text{ 上の函数}$$

が与えられていれば良い.  $dH$  に対応する  $\mathfrak{g}^*$  上の  $\mathfrak{g}$ -valued function を

$$A(X) = \sum f_i(X) E_i \in \mathfrak{g} \quad (X \in \mathfrak{g}^*)$$

と書くことにする.

このとき,  $\mathfrak{g}$  の basis  $E_i$  の dual basis を  $E^i$  と書くと,

$$L = \sum \langle L, E_i \rangle E^i = \sum x_i(L) E^i \quad (L \in \mathfrak{g}^*).$$

$\{L, H\}(L) \in \mathfrak{g}^*$  を次のように定める:

$$\{L, H\}(L) := \sum \{x_i, H\}(L) E^i.$$

要するに,  $\{L, H\}(L)$  は  $L$  の“行列成分”のそれぞれに  $\{\cdot, H\}$  を作用させることによって得られる“行列”である. この記法を用いると, Hamilton の方程式をまとめて次のように書ける:

$$\frac{dL}{dt} = \{L, H\}.$$

定理 2.3 以上の記号のもとで次が成立している:

$$\{L, H\}(L) = \text{ad}^*(A(L))L \quad (dH(L) = A(L) \in \mathfrak{g}).$$

よって, Hamilton 方程式は次のように書ける:

$$\frac{dL}{dt} = \text{ad}^*(A(L))L.$$

証明. 定理 2.2 より,

$$\begin{aligned} \{x_i, H\}(L) &= \langle L, [dx_i(L), dH(L)] \rangle \\ &= \langle L, [E_i, A(L)] \rangle \\ &= \langle \text{ad}^*(A(L))L, E_i \rangle = x_i(\text{ad}^*(A(L))L). \end{aligned}$$

よって,

$$\{L, H\}(L) = \sum x_i(\text{ad}^*(A(L))L) E^i = \text{ad}^*(A(L))L. \quad \square$$

$\mathfrak{g}$  の invariant nondegenerate symmetric bilinear form によって,  $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$  と同一視されている場合を, 簡単のため以下  $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$  の場合と呼ぶことにする.

系 2.4  $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$  のとき,  $\text{ad}^*(A)L = [A, L]$  が成立しているので,

$$\{L, H\}(L) = [A(L), L] \quad (dH(L) = A(L) \in \mathfrak{g}).$$

よって, Hamilton 方程式は次のような Lax 方程式で書ける:

$$\frac{dL}{dt} = [A(L), L]. \quad \square$$

以上の結果より,  $\mathfrak{g}^*$  上の Hamilton 方程式は本質的に Lax 方程式であることがわかった. よって,  $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$  と同一視されているとき,  $\mathfrak{g}^*$  上に互いに Poisson 可換な Hamiltonians  $H_i$  が与えられたならば,  $\mathfrak{g}^*$  上の互いに可換なフローを生成する Lax 方程式系

$$\frac{dL}{dt} = [B_i(L), L], \quad B_i(L) = dH_i(L)$$

が得られる.

注意 2.5  $\mathfrak{g}^*$  上の Hamiltonians として coadjoint invariant functions を取ると, それらは Poisson 可換になるだけでなく,  $\mathfrak{g}^*$  上のあらゆる函数と Poisson 可換になってしまう. よって, coadjoint invariant function から得られる上の Lax 方程式は  $dL/dt = 0$  という自明な方程式しか与えない. Coadjoint invariant functions 非自明な Lax 方程式を得るためには  $\mathfrak{g}^*$  上の Poisson 構造として  $\mathfrak{g}$  上のもう一つの Lie algebra 構造 “ $r$ -bracket” によって定められたものを考えなければいけない. 次の節を参照せよ.  $\square$



### 3 ソリトン系の Lie algebra レベルでの Hamiltonian 構造

この節ではある条件を満たしているソリトン系の Lie algebra レベルでの Hamiltonian 構造について説明する.

#### 3.1 ソリトン系の基本パターンの復習

一般にソリトン系は抽象的には以下のような設定で定式化されるのであった.

$\mathfrak{g}$  は Lie algebra であり, linear map  $r_+, r_- : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  で以下の条件を満たすものが与えられていると仮定する:

- (1)  $r_+ - r_- = 1$ .
- (2)  $A \in \mathfrak{g}$  に対して,  $A_+ := r_+(A)$ ,  $A_- := r_-(A)$  と置く.
- (3)  $r$ -bracket を  $[A, B]_r := [A_+, B_+] - [A_-, B_-]$  ( $A, B \in \mathfrak{g}$ ) と定める.
- (4)  $\mathfrak{g}$  に  $r$ -bracket を入れたものを  $\mathfrak{g}_r$  と書く.
- (5)  $\mathfrak{g}_r$  は Lie algebra である.
- (6)  $r_+, r_-$  は  $\mathfrak{g}_r$  から  $\mathfrak{g}$  への Lie algebra homomorphism である.

実は (6) は本質的に  $r_+, r_-$  に関する classical Yang-Baxter equation であり, (5) は (6) を仮定すればいつでも成立している. 詳しい解説については

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Classical-r-1.txt>  
古典  $r$  行列入門 Part 1

の「2. classical  $r$ -operator および  $r$ -matrix の一般論」を参照せよ.

ポイントは  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_r$  に二つの Lie algebra 構造  $[\cdot, \cdot], [\cdot, \cdot]_r$  が定められていることである. よって,  $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_r^*$  にも二つの Poisson 構造  $\{ \cdot, \cdot \}, \{ \cdot, \cdot \}_r$  が定められていることになる. 実はソリトン系の linear Poisson bracket は  $\{ \cdot, \cdot \}_r$  の形をしている.

$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_r$  の coadjoint 表現をそれぞれ  $\text{ad}^*, \text{ad}_r^*$  と書くことにする. それらのあいだには以下のような関係がある.

補題 3.1  $A \in \mathfrak{g}, L \in \mathfrak{g}^*$  が  $\text{ad}^*(A)L = 0$  を満たしていれば,

$$\text{ad}_r^*(A)L = \text{ad}^*(A_+)L = \text{ad}^*(A_-)L.$$

$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$  の場合に対応する結果は,  $[A, L] = 0$  のとき,

$$[A, L]_r = [A_+, L] = [A_-, L].$$

ソリトン系の Lax 方程式の右辺はこの形をしていることに注意せよ.

証明.  $B \in \mathfrak{g}$  とすると,

$$\begin{aligned} \langle \text{ad}_r^*(A)L, B \rangle &= \langle L, [B, A]_r \rangle \\ &= \langle L, [B_+, A_+] - [B_-, A_-] \rangle \\ &= \langle \text{ad}^*(A_+)L, B_+ \rangle - \langle \text{ad}^*(A_-)L, B_- \rangle. \end{aligned}$$

ここで,  $\text{ad}^*(A)L = 0$  より,  $\text{ad}^*(A_+)L = \text{ad}^*(A_-)L$  であるから,

$$\langle \text{ad}_r^*(A)L, B \rangle = \langle \text{ad}^*(A_+)L, B_+ - B_- \rangle = \langle \text{ad}^*(A_+)L, B \rangle,$$

$$\langle \text{ad}_r^*(A)L, B \rangle = \langle \text{ad}^*(A_-)L, B_+ - B_- \rangle = \langle \text{ad}^*(A_-)L, B \rangle.$$

よって,  $\text{ad}_r^*(A)L = \text{ad}^*(A_+)L = \text{ad}^*(A_-)L$ .  $\square$

$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_r$  に対応する simply connected な Lie 群を  $G, G_r$  と書き, Lie algebra homomorphisms  $r_+, r_- : \mathfrak{g}_r \rightarrow \mathfrak{g}$  に対応する Lie group homomorphisms も  $r_+, r_- : G_r \rightarrow G$  と書く.  $g \in G_r$  に対して,

$$g_+ := r_+(g), \quad g_- := r_-(g)$$

と書くことにする.  $G_r$  は  $G$  に右から次のように作用する:

$$x * g = g_-^{-1} x g_+ \quad (x \in G, g \in G_r).$$

このとき,  $I : G_r \rightarrow G$  を

$$I(g) := g_-^{-1} g_+ \quad (g \in G_r)$$

と定めると,  $I$  は  $G_r$  の単位元の近傍で微分同相写像になっている. よって, 単位元の近傍に含まれる  $G$  の元  $x$  は単位元の近傍に含まれる  $g \in G_r$  によって,

$$x = g_-^{-1} g_+$$

と一意的に表わされる. 以下, このような  $x \in G, g \in G_r$  のみを考える. 以上の結果に関しては

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Classical-r-1.txt>

の「3. factorizable Lie algebra に関係した各種 factorizations」を参照せよ.

ここでさらに, 互いに可換な  $P_i \in \mathfrak{g}$  ( $i \in I$ ) が与えられていると仮定する:

$$[P_i, P_j] = 0 \quad (i, j \in I).$$

$x(0) = g_-(0)^{-1} g_+(0)$  ( $g(0) \in G_r$ ) を初期値とする  $P_i$  たちの左作用によるフローを  $x(t)$  と書く:

$$x(t) = \exp\left(\sum t_i P_i\right) x(0).$$

この  $x(t)$  を次のように分解しておく:

$$x(t) = g_-(t)^{-1} g_+(t) \quad (g(t) \in \mathfrak{g}_r, g_{\pm}(t) = r_{\pm}(g(t))).$$

このとき,  $\partial_i := \partial/\partial t_i$  と置くと,

- (1)  $L_i := \partial_i(g)g^{-1} \in \mathfrak{g}_r$ ,
- (2)  $B_i := r_+(L_i) = (L_i)_+ \in \mathfrak{g}$ ,
- (3)  $B_i^c := r_-(L_i) = (L_i)_- \in \mathfrak{g}$

と置くと,

- (4)  $\partial_i(g_+)g_+^{-1} = B_i,$   
 (5)  $\partial_i(g_-)g_-^{-1} = B_i^c,$   
 (6)  $L_i = g_-^{-1}P_i g_- = B_i - B_i^c,$   
 (7)  $[L_i, L_j] = 0$   
 (8)  $\partial_i L_j = [B_i, L_j]$  (Lax 方程式),  
 (9)  $[\partial_i - B_i, \partial_j - B_j] = 0$  (零曲率方程式).

などが成立する. 以上の結果に関しては,

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Classical-r-1.txt>

の「4. factorizable Lie algebra に付随した soliton system」を参照せよ. (具体的なソリトン系について知っている人はそれを思い浮かべても良い.)

### 3.2 Lie algebra レベルでの Hamiltonian 構造が存在するための十分条件

以下,  $\mathfrak{g}$  には invariant nondegenerate symmetric bilinear form  $(\cdot, \cdot)$  が定められていると仮定し,  $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$  と同一視されているとする.

問題は前節の Lax 方程式  $\partial_i L_j = [B_i, L_j]$  を Hamilton 方程式で表わすことである.

そのために, ここで新たに以下の条件を仮定する:

- (A)  $\mathfrak{g}$  はある associative algebra  $A$  に埋め込まれており,  $\mathfrak{g}$  の bracket は  $A$  における commutator に一致している.  
 (B) ある  $\Lambda \in A$  と  $1 \in I$  が存在して,  $P_1 = \Lambda$  であり, 全ての  $P_i$  が次のように表示可能である:

$$P_i = \Lambda^{d_i} \quad (d_i \in \mathbb{Z}_{>0}, i \in I).$$

- (C)  $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$  上の函数  $H_i$  で  $dH_i(L) = L^{d_i} \in \mathfrak{g}$  を満たすものが存在する.

注意 3.2 前者の条件 (A) は大抵の場合に成立している. ここで本質的なのは後者の (B) と (C) の条件である. (B) は KP 系や KdV 系などでは満たされているが, NLS 系では満たされていない. 多くの例において, 全ての  $P_i$  を表わすために複数の  $\Lambda \in A$  が必要である. そのような例では (B) は成立していない. 条件 (C) については次の例を参照せよ.  $\square$

例 3.3  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = M(n, \mathbb{C})$  の場合.  $(A, B) = \text{trace}(AB)$  によって,  $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$  とみなせる. この同一視によって, 行列単位  $E_{ij}$  と行列に対してその  $(j, i)$  成分を対応させる函数  $x_{ji}$  と  $dx_{ji}$  が同一視される. このとき,

$$H_d(L) = \frac{1}{d+1} \text{trace}(L^{d+1})$$

と置くと,

$$dH_d(L) = \text{trace}(L^d dL) = \sum (L^d)_{ij} dx_{ji}(L) = \sum (L^d)_{ij} E_{ij} = L^d$$

である. よって条件 (C) が成立している. 一般に,

$$\begin{aligned}\text{trace}(A(L)dL) &= \sum A(X)_{ij}dx_{ji}(L) \\ &= \sum A(L)_{ij}E_{ij} = A(L).\end{aligned}$$

が成立している. よって,  $dH(L) = \text{trace}(A(L)dL)$  を満たすような Hamiltonian  $H$  に関する Hamilton 方程式は Lax 方程式  $dL/dt = [A(L), L]$  になる.  $\square$

例 3.4  $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*$  の dual bases  $E_i, E^i$  を取り,  $E_i$  に対応する  $\mathfrak{g}^*$  上の linear function  $x_i$  を

$$x_i(L) := \langle L, E_i \rangle \quad (L \in \mathfrak{g}^*)$$

と定める. このとき,

$$L = \sum \langle L, E_i \rangle E^i = \sum x_i(L) E^i \quad (L \in \mathfrak{g}^*).$$

さらに,  $A \in \mathfrak{g}$  に対して,

$$A^i := \langle E^i, A \rangle$$

と定め,  $\mathfrak{g}^*$  上の  $\mathfrak{g}$ -valued function  $A(L)$  に対して,  $\mathfrak{g}^*$  上の 1-form  $\omega_A$  を形式的に次のように定義する:

$$\omega_A := \langle dL, A(L) \rangle = \sum dx_i \langle E^i, A(L) \rangle = \sum A(L)^i dx_i.$$

これは  $dx_i$  と  $E_i$  を同一視すれば,  $A(L)$  と同一視される. よって, もしも  $\mathfrak{g}^*$  上の函数  $H$  で  $dH = \omega_A$  を満たしているならば,  $H$  に関する Hamilton 方程式は  $dL/dt = [A(L), L]$  の形になる. そのような  $H$  が存在するための条件  $d\omega_A = 0$  が成立するための必要十分条件は

$$\frac{\partial A(L)^i}{\partial x_j} = \frac{\partial A(L)^j}{\partial x_i}$$

が成立することである.  $\square$

上の仮定 (A), (B) のもとで,  $L = L_1$  と置くと,  $L_i = L^{d_i}$  が成立するので,  $L_j$  に関する Lax 方程式  $\partial_i L_j = [(L_i)_+, L_j]$  は  $L$  に関する Lax 方程式

$$\partial_i L = [(L^{d_i})_+, L]$$

から導かれる. よって, この方程式を Hamilton 方程式で表わせれば良い.

定理 3.5 仮定 (A), (B), (C) のもとで,  $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$  上の  $r$ -bracket に関する Poisson bracket を  $\{, \}_r$  と書くと,

$$\{L, H_i\}_r(L) = [L^{d_i}, L]_r = [(L^{d_i})_+, L] = [(L^{d_i})_-, L].$$

特に,  $\{, \}_r$  に関する  $H_i$  に関する時間変数  $t_i$  の Hamilton 方程式は

$$\partial_i L = [(L^{d_i})_+, L] = [(L^{d_i})_-, L]$$

と書ける.

証明. 仮定 (C) より  $dH_i(L) = L^{d_i}$  が成立している. 系 2.4 より,  $\{L, H_i\}_r(L) = [L^{d_i}, L]_r$  が成立している. よって, 補題 3.1 より,  $\{L, H_i\}_r(L) = [(L^{d_i})_+, L] = [(L^{d_i})_-, L]$  が成立することがわかる.  $\square$

## 4 前節の方法が使えない場合について

前節では全ての Lax operators が 1 つの Lax operator  $L = g_- \Lambda g_-^{-1}$  の多項式で表わされている場合には適用できるが、そうでない場合には適用できない。

この節ではその理由を説明するために次の場合について考える：

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = M(n, \mathbb{C})$ .
- $\Lambda_a \in \mathfrak{g}$  ( $a = 1, \dots, S$ ) は互いに可換である。
- $P_i = \Lambda^i = \Lambda_1^{i_1} \cdots \Lambda_S^{i_S}$  ( $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^S$ ).
- $\mathfrak{g}_+$ ,  $\mathfrak{g}_-$  は  $\mathfrak{g}$  の subalgebra であり,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-$  (線形直和).
- $\mathfrak{g}$  から  $\mathfrak{g}_+$  への projection を  $r_+$  と書き,  $\mathfrak{g}_-$  への projection の  $-1$  倍を  $r_-$  と書き,  $X \in \mathfrak{g}$  に対して,  $X_+ := r_+(X)$ ,  $X_- := r_-(X)$  と置く。
- $\mathfrak{g}$  に  $r$ -bracket を  $[X, Y]_r := [X_+, Y_+] - [X_-, Y_-]$  と定める.  $\mathfrak{g}$  に  $r$ -bracket を入れたもの  $\mathfrak{g}_r$  は Lie algebra をなし,  $r_+$ ,  $r_-$  は  $\mathfrak{g}_r$  から  $\mathfrak{g}$  への Lie algebra homomorphism をなす。

$S = 1$  の場合は前節の仮定が全て満たされている。しかし,  $S \geq 2$  ならば一般に前節の仮定は満たされない。

上の設定のもとで,  $L_a = g_- \Lambda_a g_-^{-1}$  と置くと,  $i \in I$  に対して,

$$L_i = L^i = L_1^{i_1} \cdots L_S^{i_S}$$

であるから, 全ての  $L_i$  ( $i \in I$ ) に関する Lax 方程式は,  $L_a$  ( $a = 1, \dots, S$ ) に関する Lax 方程式

$$\partial_i L_a = [(L^i)_+, L_a] = [(L_1^{i_1} \cdots L_S^{i_S})_+, L_a] \quad (4.1)$$

に帰着される。問題はこの Lax 方程式を Hamilton 方程式の形で書けるかどうかである。

$S$  個の  $\mathfrak{g}$  の直積 Lie algebra を  $\mathfrak{p}$  と書くことにする：

$$\mathfrak{p} := \mathfrak{g}^S = (S \text{ 個の } \mathfrak{g} \text{ の直積 Lie algebra}).$$

$\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_r^S$  と見ることによって,  $\mathfrak{p}$  には  $r$ -bracket が定義される。  $X = (X_a) \in \mathfrak{p}$  に対して,

$$X_+ := ((X_1)_+, \dots, (X_S)_+), \quad X_- := ((X_1)_-, \dots, (X_S)_-)$$

と書くと,  $\mathfrak{p}$  の  $r$ -bracket はいつものように

$$[X, Y]_r = [X_+, Y_+] - [X_-, Y_-]$$

と表わされる。

$\mathfrak{p} = M(n, \mathbb{C})^S$  上に trace と invariant nondegenerate symmetric bilinear form  $(, )$  を

$$\begin{aligned} \text{trace}(A) &:= \sum_{a=1}^S \text{trace}(A_a) & (A = (A_a) \in M(n, \mathbb{C})^S), \\ (A, B) &:= \text{trace}(AB) = \sum \text{trace}(A_a B_a) & (A = (A_a), B = (B_a) \in \mathfrak{p} = \mathfrak{g}^S) \end{aligned}$$

と定める。これによって,  $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}$  とみなす。

$\mathfrak{p}$  の部分多様体  $\mathfrak{M}$  を次のように定義する:

$$\mathfrak{M} := \{ L = (L_a) \in \mathfrak{p} = \mathfrak{g}^S \mid [L_a, L_b] = 0 \ (a, b = 1, \dots, S) \}.$$

例えば,  $L_a = g_- \Lambda_a g_-^{-1}$  の場合は  $L = (L_a) \in \mathfrak{M}$  である.

補題 4.1  $\mathfrak{p}$  上の  $\mathfrak{g}$  に値を持つ函数  $A(L)$  を任意に取り,  $\mathfrak{p}$  上のベクトル場  $V$  を

$$V(L) = ([A(L), L_1], \dots, [A(L), L_S])$$

と定める. このとき,  $V$  は  $\mathfrak{M}$  に接している. (上の Lax 方程式 (4.1) に対応するベクトル場はこの補題の条件を満たしていることに注意せよ.)

証明.  $L = (L_a) \in \mathfrak{M}$  (i.e.  $[L_a, L_b] = 0$ ),  $\varepsilon^2 = 0$  に対して,

$$L_a^\varepsilon = L_a + \varepsilon[A(L), L_a]$$

と置いて,  $[L_a^\varepsilon, L_b^\varepsilon] = 0$  を示せば良いが, それは次のように示される:

$$\begin{aligned} [L_a^\varepsilon, L_b^\varepsilon] &= \varepsilon([L_a, [A(L), L_b]] + [[A(L), L_a], L_b]) \\ &= \varepsilon([[L_a, A(L)], L_b] + [[A(L), L_a], L_b]) \\ &= \varepsilon(-[[A(L)_+, L_a], L_b] + [[A(L)_+, L_a], L_b]) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

$\mathfrak{p}$  の basis  $E_{a;kl}$  を

$$E_{a;kl} = (0, \dots, E_{kl}, \dots, 0) = (a \text{ 番目が行列単位 } E_{kl} \text{ で他は } 0)$$

と定め,  $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}$  上の linear function  $x_{a;lk}$  を

$$x_{a;lk}(L) = (L, E_{a;kl}) \quad (L = (L_a) \in \mathfrak{p}^* = \mathfrak{p})$$

と定める.  $x_{a;lk}(L)$  は行列  $L_a$  の  $(l, k)$  成分である.  $\mathfrak{p}^*$  上の 1-form と  $\mathfrak{p}^*$  上の  $\mathfrak{p}$ -valued function を次のように同一視しておく:

$$\sum f_{a;kl}(L) dx_{a;lk} = \sum f_{a;kl}(L) E_{a;kl}.$$

命題 4.2  $L \in \mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}$  の  $H_i$  と  $\mathfrak{p}$ -valued function  $A_i(L)$  を次のように定める:

$$\begin{aligned} H_i(L) &:= \text{trace}(L^i) = \text{trace}(L_1^{i_1} \cdots L_S^{i_S}), \\ A_i(L) &= (A_{i,1}(L), \dots, A_{i,S}(L)), \\ A_{i,a}(L) &= i_a L_1^{i_1} \cdots L_a^{i_a-1} \cdots L_S^{i_S}. \end{aligned}$$

このとき,  $L \in \mathfrak{M}$  ならば  $dH_i(L) = A_i(L)$  が成立する. よって,  $L \in \mathfrak{M}$  において,  $H_i$  に関する  $r$ -bracket に関する Hamilton 方程式は

$$\partial_i L_a = [A_{i,a}(L), L_a]_r = [A_{i,a}(L)_+, L_a]$$

の形になる. (この方程式に対応する  $\mathfrak{M}$  上のベクトル場

$$V_{i,a}(L) = ([A_{i,a}(L)_+, L_a])_{a=1}^S$$

には補題 4.1 が適用できないことに注意せよ. よって,  $V_{i,a}$  は一般に  $\mathfrak{M}$  に接してない.)

証明.  $L = (L_a) \in \mathfrak{M}$  と  $L_a$  が互いに可換なことは同値であるから,

$$\begin{aligned}
dH_i(L) &= \sum_{a=1}^S \text{tr}(A_{i,a}(L)dL_a) \\
&= \sum_{a,b,k,l} x_{b;kl}(A_{i,a}(L))dx_{b;lk} \\
&= \sum_{a,b,k,l} x_{b;kl}(A_{i,a}(L))E_{b;kl} \\
&= (A_{i,1}(L), \dots, A_{i,S}(L)) = A_i(L).
\end{aligned}$$

Hamilton 方程式の形に関する結果は系 2.4 と補題 3.1 から導かれる.  $\square$

この命題 4.2 は Hamiltonians  $H_i$  に関する Hamilton 方程式は,  $S \geq 2$  ならば, ソリトン系の Lax 方程式 (4.1) を含んでないことを意味している. このような理由で前節では条件 (B) を仮定したのである.

## 5 群レベルでの Hamiltonian 構造を考えることの必要性

前節ではソリトン系のフローを生成する  $P_i$  が一つの  $\Lambda$  の多項式で表わせない場合は Hamiltonian 構造を簡単に与えることができない理由を説明した.

その困難の原因は  $\mathfrak{g}$  の直積を phase space として採用したことにある.

$L$ -operators  $L_i$  はソリトン系の基本設定では, 共通の  $g_-(t)$  によって,

$$L_i(t) = g_-(t)P_i g_-(t)^{-1}$$

と定義されるのであった. よって, 基本的な従属変数は  $L_i$  ではなく,  $g_-$  の方である.

前節の困難の原因は基本的でない従属変数である  $L$ -operators のレベルで Hamiltonian 構造を考えようとしたことにあると考えられる.

この困難はもしも  $g_-$  のレベルでの Sato-Wilson 方程式

$$\partial_i g_- = (L_i)_- g_- = (L_i)_+ g_- - P_i g_-$$

の Hamiltonian 構造がとらえ切れれば解決されると考えられる.

以上のような理由から, Lie algebra レベルではなく, 群レベルで Hamiltonian 構造を考えるべきなのである.