接続や微分作用素の空間上の Poisson 構造

黒木 玄

2002 年 5 月 29 日　Preliminary Version 0.4.0*

目 次

1　微分環と微分作用素環

[sec:diff-ring-diff-op-alg]

*まだ大幅に加筆する可能性の高いバージョン.

$\mathbb{Z}$ は有理整数環, $\mathbb{R}$ は実数体, $\mathbb{C}$ は複素数体であるとする. $n \in \mathbb{Z}$ に対して, n 以上の有理整数全体の集合を $\mathbb{Z}_{\geq n}$ と書き, $\mathbb{Z}_{\leq n}$, $\mathbb{Z}_{>n}$, $\mathbb{Z}_{<n}$ も同様に定義する. $\mathbb{K}$ は標数 0 の体であるとする.

1.1 微分環

[sec:diff-alg-diff-ring]

Definition 1.1 (微分代数, 微分環) [def:differential-ring] R は 1 を持つ $\mathbb{K}$ 上の結合代数であるとする. 写像 $\partial : R \to R$ が $\mathbb{K}$-derivation であるとは, $\mathbb{K}$-linear でかつ次の Leibniz 則を満たしていることである:

$$\partial(fg) = (\partial f)g + f(\partial g) \qquad (f, g \in R).$$

R と $\mathbb{K}$-derivation の組 (R, ∂) を $\mathbb{K}$ 上の微分代数 (differential algebra over $\mathbb{K}$) もしくは $\mathbb{K}$ 微分代数と呼ぶ. $\mathbb{K}$ 上の可換微分代数を $\mathbb{K}$ 微分環 ($\mathbb{K}$-differential ring) と呼ぶことにする.

(R, ∂) が微分代数のとき, $f \in R$, $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して次のように書く:

$$f^{(i)} = \partial^i(f),\ f' = \partial(f),\ f'' = \partial^2(f),\ \ldots$$

$\mathbb{K}$ 上の微分代数のあいだの $\mathbb{K}$ 代数準同型 $\phi : R \to S$ が $\mathbb{K}$ 微分代数準同型であるとは $\phi(\partial f) = \partial\phi(f)$ $(f \in R)$ が成立することである. $\mathbb{K}$ 微分環の準同型とは $\mathbb{K}$ 微分代数としての準同型のことである.

$\mathbb{K}$ 上の微分代数 R が部分集合 $A \subset R$ から $\mathbb{K}$ 上微分生成される (differentially generated by $A \subset R$) とは, R が A から $\mathbb{K}$ 代数の演算だけではなく ∂ の作用をも用いて生成されることである. この条件は R が $\bigcup_{m=0}^{\infty} \partial^m(A)$ から $\mathbb{K}$ 代数として生成されることと同値である.

$\mathbb{K}$ 微分環 R の $\mathbb{K}$ イデアル J が微分イデアルであるとは J が ∂ の作用で閉じていることである. このとき, 剰余環 R/J は自然に $\mathbb{K}$ 微分環をなす. □

Example 1.2 [example:Cinfty(R)] 座標 x を持つ数直線 $\mathbb{R}$ 上の複素数値 C^∞ 函数の全体のなす可換環を $C^\infty(\mathbb{R})$ と書くと, $(C^\infty(\mathbb{R}), \partial/\partial x)$ は $\mathbb{C}$ 上の微分環である. 周期 2π を持つ C^∞ 函数全体のなす $C^\infty(\mathbb{R})$ の部分環を $C^\infty(S^1)$ と書くと, $C^\infty(S^1)$ は $C^\infty(\mathbb{R})$ の微分部分環である. □

Example 1.3 [example:K[[x]]] 不定元 x から生成される $\mathbb{K}$ 係数の形式巾級数環を $\mathbb{K}[[x]]$ と書き, 形式 Laurent 級数環を $\mathbb{K}((x))$ と書く. 多項式環 $\mathbb{K}[x]$ は $\mathbb{K}[[x]]$ の部分環とみなせる. 任意の $f(x) \in \mathbb{K}[[x]]$ に対して, $\partial = f(x)\partial/\partial x$ と置くと, $(\mathbb{K}[[x]], \partial)$ と $(\mathbb{K}((x)), \partial)$ は $\mathbb{K}$ 上の微分環である. $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ ならば $(\mathbb{K}[x], \partial)$ は $(\mathbb{K}[[x]], \partial)$ の微分部分環である. $\partial = \partial/\partial x$ または $\partial = x\partial/\partial x$ の場合をよく考える. □

Example 1.4 (微分多項式環) [example:diff-polynomial-ring] R は不定元 $u_i^{(n)}$ $(i \in I,\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ から生成された多項式環であるとする:

$$R = \mathbb{K}\left[\, u_i^{(n)} \;\middle|\; i \in I,\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\right].$$

R に作用する $\mathbb{K}$-derivation ∂ を $\partial u_i^{(n)} = u_i^{(n+1)}$ という条件によって定める．すなわち，

$$\partial = \sum_{i \in I} \sum_{n=0}^{\infty} u_i^{(n+1)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}.$$

このとき, R は $\mathbb{K}$ 上の微分環でかつ $u_i := u_i^{(0)}$ $(i \in I)$ から $\mathbb{K}$ 上微分生成される．この R を u_i $(i \in I)$ から生成される $\mathbb{K}$ 上の微分多項式環と呼ぶ.

I が空でない有限集合のとき, R は $\mathbb{K}$ 微分環として有限生成であるが, $\mathbb{K}$ 代数としては有限生成ではない.

S は $\mathbb{K}$ 上の微分環であるとし, 任意に $f_i \in S$ $(i \in I)$ を取るとき, $\mathbb{K}$ 微分環の準同型写像 $\phi : R \to S$ で $\phi(u_i) = f_i$ $(i \in I)$ をみたすものが唯一存在する．すなわち, R は u_i $(i \in I)$ から生成される自由 $\mathbb{K}$ 微分環である．□

Example 1.5 [example:Cinfty(M)] M は可微分多様体であり, $C^\infty(M)$ は M 上の複素数値 C^∞ 函数であるとする．このとき, M 上の任意のベクトル場 ∂ に対して, $(C^\infty(M), \partial)$ は $\mathbb{C}$ 微分環である．□

1.2　微分作用素環

[sec:diff-op-alg]

Definition 1.6 (微分作用素環) [def:do] 左 R 加群として $\mathcal{D} = \mathcal{D}_R$ を次のように定める:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_R = R[\partial] = \left\{ A = \sum_{i=0}^{n} a_i \partial^i \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ a_i \in R\ (i = 0, \dots, N) \right\}.$$

すなわち, $\mathcal{D}$ は ∂^i $(i = 0, 1, 2, \dots)$ から生成される左 R 自由加群である．$\mathcal{D}$ に結合代数の構造を次のように定めることができる:

$$(f\partial^m)(g\partial^n) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} f g^{(i)} \partial^{m-i+n}.$$

ここで, $f, g \in R$, $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で, $\binom{m}{i}$ は二項係数である:

$$\binom{m}{i} = \frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)}{i!}.$$

$\mathcal{D} = \mathcal{D}_R$ を微分環 R に付随する微分作用素環と呼ぶ．$f \in R$ と $f\partial^0 \in \mathcal{D}$ を同一視することによって, R は $\mathcal{D}$ の部分代数とみなせる．□

Remark 1.7 [rem:associativity-D] 以下のようにして, $R = \mathbb{K}[x]$ の場合から, R が任意の微分環の場合における $\mathcal{D} = \mathcal{D}_R$ の結合律が証明される.

$\mathcal{D} = \mathcal{D}_R$ の積の定義より, $f, g, h \in R$, $\mu, \nu, \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$(f\partial^\mu)\bigl((g\partial^\nu)(h\partial^\lambda)\bigr) = \sum_{n=0}^{\mu+\nu} \sum_{m=0}^{n} \left[\sum_{i=m}^{n} \binom{\mu}{i} \binom{\nu}{n-i} \binom{i}{m} \right] f g^{(m)} h^{(n-m)} \partial^{\mu+\nu+\lambda-n},$$

$$\bigl((f\partial^\mu)(g\partial^\nu)\bigr)(h\partial^\lambda) = \sum_{n=0}^{\mu+\nu} \sum_{m=0}^{n} \binom{\mu}{m} \binom{\mu+\nu-m}{n-m} f g^{(m)} h^{(n-m)} \partial^{\mu+\nu+\lambda-n}.$$

よって, 任意の微分環 R に対して $\mathcal{D}=\mathcal{D}_R$ の積が結合律を満たすことは二項係数に関する次の公式と同値である:

$$\sum_{i=m}^{n}\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{n-i}\binom{i}{m}=\binom{\mu}{m}\binom{\mu+\nu-m}{n-m}.$$

ここで, $\mu,\nu,m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m\leq n\leq\mu+\nu$ である.

$\mathcal{D}_{\mathbb{K}[x]}=\mathbb{K}[x,\partial/\partial x]$ の $\mathbb{K}[x]$ への自然な作用を通して, 自然に $\mathcal{D}_{\mathbb{K}[x]}\subset\operatorname{End}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}[x]$ とみなせる. よって, $\mathcal{D}_{\mathbb{K}[x]}$ の積は結合律を満たしている. このことから, 二項係数に関する上の公式が成立することがわかる. □

Definition 1.8 (formal adjoint) [def:formal-adjoint] 微分作用素 $A=\sum_n a_n\partial^n\in\mathcal{D}$ に対して, その formal adjoint を $A^*=\sum_n(-\partial)^n a_n\in\mathcal{D}$ と定める. $(\ )^*:\mathcal{D}\to\mathcal{D}$ は anti-algebra automorphism である. □

1.3 微分環の元の積分

[sec:integration]

(R,∂) は $\mathbb{K}$ 微分環であるとし, 形式的に $\partial/\partial x=\partial$ と考える.

Definition 1.9 (積分) [def:integration] $\bar{R}=\int R\,dx=R/\partial R$ と置き, $\bar{R}$ を R の積分と呼ぶ. R から $\bar{R}$ への自然な写像を積分と呼び, 次のように書くことにする:

$$\bar{f}=\int f\,dx=f\bmod\partial R\ \in\bar{R}\qquad(f\in R).$$

定義より, これは部分積分の公式を満たしている:

$$\int f'g\,dx=-\int fg'\,dx\qquad(f,g\in R).\quad\square$$

Lemma 1.10 [lemma:int-adj] 次が成立している:

$$\int f\cdot Ag\,dx=\int A^*f\cdot g\,dx\qquad(f,g\in R,\ A\in\mathcal{D}).$$

Proof. 部分積分の公式より, $A=\sum_n a_n\partial^n\in\mathcal{D}$ ならば,

$$\int f\cdot Ag\,dx=\sum_n\int f\cdot a_n\partial^n g\,dx=\sum_n\int(-\partial)^n(fa_n)\cdot g\,dx=\int A^*f\cdot g\,dx.\quad\square$$

Example 1.11 [example:int-R] $(R,\partial)=(\mathbb{K}((x)),\partial/\partial x)$ のとき, $\bar{R}$ は自然に $\mathbb{K}x^{-1}\cong\mathbb{K}$ と同一視される. よって, 積分 $\int dx:R\to\bar{R}\cong\mathbb{K}$ は本質的に留数を取る写像と同一視できる.

$(R,\partial)=(C^\infty(S^1),\partial/\partial x)$ のとき, $\bar{R}$ は自然に $\{$ 定数函数 $\}=\mathbb{C}$ と同一視できる. よって, 積分 $\int dx:R\to\bar{R}=\mathbb{C}$ は $f\in C^\infty(S^1)$ に $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx$ を対応させる写像と同一視できる.

(R,∂) が $(\mathbb{K}[x],\partial/\partial x)$ または $(\mathbb{K}[[x]],\partial/\partial x)$ または $(C^\infty(\mathbb{R}),\partial/\partial x)$ ならば $\bar{R}=0$ となるので R の積分は trivial になってしまう．これは直線上の任意函数の通常の意味での積分が定義できないことの反映である．

R が u_i $(i\in I\neq\emptyset)$ から生成される $\mathbb{K}$ 上の微分多項式環であるとき, $\bar{R}$ は non-trivial である． $f\in R$ の積分 $F=\int f\,dx\in\bar{R}$ は u_i $(i\in I)$ の形式的汎函数とみなせる． I. M. Gelfand と L. A. Dikii と I. Ya. Dorfman は微分多項式環における形式変分法を定式化し, ソリトン系の Poisson 構造の構成に応用した ([4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [3]). □

2 デルタ函数の計算

[sec:calculus-of-delta-functions]

この節では R は標数 0 の体 $\mathbb{K}$ 上の微分環であるとし, $\mathcal{D}=\mathcal{D}_R$ はそれに付随する微分作用素環であるとする．

N は正の整数であるとし, $[N]=\{1,2,\dots,N\}$ と置く．

$\mathbb{K}$ 上の可換環 $R_{[N]}$ を $R_{[N]}=R^{\otimes N}$ (N 個の R の $\mathbb{K}$ 上でのテンソル積) と定める．

$R_{[N]}$ に作用する互いに可換な導分 ∂_ν $(\nu\in[N])$ を $\partial_\nu=1\otimes\cdots\otimes\partial\otimes\cdots\otimes 1$ (第 ν 成分だけが ∂ で他は 1) と定める．

$R_{[N]}$ の R と同型な部分環 R_ν $(\nu\in[N])$ を $R_\nu=1\otimes\cdots\otimes R\otimes\cdots\otimes 1$ (第 ν 成分だけが R で他は 1) と定める．

$f\in R$ と $\nu\in[N]$ に対して, $f(x_\nu)=1\otimes\cdots\otimes f\otimes\cdots\otimes 1\in R_\nu$ (第 ν 成分だけが f で他は 1) と書くことにする． $f\in R$ は単に $f(x)$ と書くことにする． R, R_ν のそれぞれを R_x, R_{x_ν} と書くこともある．

以下, $\emptyset\neq K=\{k_1<\cdots<k_\kappa\}\subset[N]$ とする．

$R_{k_1},\dots,R_{k_\kappa}$ で生成される $R_{[N]}$ の部分環を $R_K=R_{k_1\cdots k_\kappa}$ と書くことにする．可換環として自然に $R_K=\bigotimes_{k\in K}R_k$ とみなせる． $0<M\le N$ でかつ $K=[M]$ のとき $R_{[M]}$ と R_K を自然に同一視する．

$\mathcal{D}_{[N]}=R_{[N]}[\partial_1,\dots,\partial_N]$ は $R_{[N]}$ と ∂_ν から生成される微分作用素環であるとする． $\mathcal{D}_{[N]}=\mathcal{D}^N$ とみなせるので, $\mathcal{D}_\nu=\mathcal{D}_{x_\nu}=1\otimes\cdots\otimes\mathcal{D}\otimes\cdots\otimes 1$ (ν 番目の成分だけが $\mathcal{D}$ で他は 1) は $\mathcal{D}_{[N]}$ の部分代数とみなせる．

$A=\sum_n a_n\partial^n\in\mathcal{D}$ に対して, $A_{x_\nu}=\sum_n a_n(x_\nu)\partial_\nu^n\in\mathcal{D}_\nu=\mathcal{D}_{x_\nu}$ と置く．

微分作用素環 $\mathcal{D}_K=\mathcal{D}_{k_1\cdots k_\kappa}=R_K[\partial_{k_1},\dots,\partial_{k_\kappa}]$ は $\mathcal{D}_k$ $(k\in K)$ から生成される $\mathcal{D}_{[N]}$ の部分代数と同一視できる． $\mathcal{D}_\emptyset=\mathbb{K}$ と置く．

$\mathcal{D}_K$ は基底 $\partial_{k_1}^{n_1}\cdots\partial_{k_\kappa}^{n_\kappa}$ $(n_1,\dots,n_\kappa\in\mathbb{Z}_{\ge 0})$ を持つ自由左 R_K 加群でかつ自由右 R_K 加群である．

2.1 デルタ函数の加群

[sec:delta-function]

Definition 2.1 [def:delta-module] 左 $\mathcal{D}_K$ 加群 $\mathcal{B}_K$ を次のように定める:

$$\mathcal{B}_K=\mathcal{D}_K/J_K,\qquad J_K=\sum_{k,l\in K}\sum_{f\in R}\mathcal{D}_K(f(x_k)-f(x_l))+\mathcal{D}_K\sum_{k\in K}\partial_k.$$

$\mathcal{B}_K$ を (形式的) デルタ函数の加群と呼ぶ. $\delta_K = 1 \bmod J_K \in \mathcal{B}_K$ と置く. $\mathcal{B}_K = \mathcal{D}_K \delta_K$ であり, δ_K は以下の基本関係式を持つ:

$$f(x_k)\delta_K = f(x_l)\delta_K \quad (k, l \in K,\ f \in R), \qquad \sum_{k\in K} \partial_k \delta_K = 0.$$

δ_K を (形式的) デルタ函数と呼ぶ. $\mathcal{B}_\emptyset = \bar{R} = \int R\,dx = R/\partial R$ と置く. □

たとえば, $\nu \in [N]$ に対して, 左 $\mathcal{D}_\nu$ 加群として,

$$\mathcal{B}_{\{\nu\}} = \mathcal{D}_\nu/\mathcal{D}_\nu \partial_\nu = R_\nu.$$

Remark 2.2 `[rem:delta-function]` δ_K は直観的には $x_{k_1} = \cdots = x_{k_\kappa}$ に台を持つデルタ函数である:

$$\delta_K = \delta(x_{k_1} - x_{k_\kappa})\delta(x_{k_1} - x_{k_2}) \cdots \delta(x_{k_{\kappa-1}} - x_{k_\kappa}). \quad \square$$

$\vec{n} = (n_k)_{k\in K} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^K$ に対して,

$$\partial^{\vec{n}} = \partial_{k_1}^{n_1} \dots \partial_{k_\kappa}^{n_\kappa}, \qquad \delta_K^{(\vec{n})} = \partial^{\vec{n}} \delta_K$$

と置く. 自然に $\mathbb{Z}_{\geq 0}^K \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^{[N]}$ とみなせることに注意せよ.

Lemma 2.3 `[lemma:base-of-Del]` 任意の $k = k_\nu \in K$ に対して, $\mathcal{B}_K$ は基底 $\delta_K^{(\vec{n}')}$ ($\vec{n}' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{K-\{k\}}$) を持つ自由左 R_k 加群である:

$$\mathcal{B}_K = \bigoplus_{\vec{n}' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{K-\{k\}}} R_k \delta_K^{(\vec{n}')} = \bigoplus_{n_1,\dots,\widehat{n_\nu},\dots,n_\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R_{k_\nu} \partial_{k_1}^{n_1} \dots \widehat{\partial_{k_\nu}^{n_\nu}} \dots \partial_{k_\kappa}^{n_\kappa} \delta_K.$$

ここで, $\widehat{X}$ は X を取り除くという意味である.

Proof. $\mathcal{D}_K$ は基底 $\partial^{\vec{n}}$ ($\vec{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^K$) を持つ自由右 R_K 加群である. よって,

$$\widetilde{\mathcal{B}}_K = \mathcal{D}_K/\tilde{J}_K, \qquad \tilde{J}_K = \sum_{k,l\in K} \sum_{f \in R} \mathcal{D}_K (f(x_k) - f(x_l))$$

と置くと, 任意の $k_\nu \in K$ に対して,

$$\widetilde{\mathcal{B}}_K = \bigoplus_{n_1,\dots,n_\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \partial_{k_1}^{n_1} \dots \partial_{k_\kappa}^{n_\kappa} R_{k_\nu} \tilde{\delta}_K = \bigoplus_{\vec{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^K} R_{k_\nu} \partial^{\vec{n}} \delta_K, \qquad \tilde{\delta}_K = 1 \bmod \tilde{J}_K.$$

$\mathcal{B}_K = \widetilde{\mathcal{B}}_K/\mathcal{D}_K(\partial_{k_1} + \cdots + \partial_{k_\kappa})\tilde{\delta}_K$ であるから,

$$\mathcal{B}_K = \bigoplus_{n_1,\dots,\widehat{n_\nu},\dots,n_\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R_{k_\nu} \partial_{k_1}^{n_1} \dots \widehat{\partial_{k_\nu}^{n_\nu}} \dots \partial_{k_\kappa}^{n_\kappa} \delta_K = \bigoplus_{\vec{n}' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{K-\{k_\nu\}}} R_{k_\nu} \delta_K^{(\vec{n}')}. \quad \square$$

2.2 デルタ函数の積分

[sec:integration]

Definition 2.4 (積分) [def:integration] $\mathcal{M}$ が左 $\mathcal{D}_K$ 加群であるとき, $L \subset K$ に対して, 左 $\mathcal{D}_L$ 加群 $\int_{K\to L}\mathcal{M}$ を次のように定める:

$$\int_{K\to L}\mathcal{M} = \mathcal{M}\Big/\Big(\sum_{k'\in K-L}\partial_{k'}\mathcal{M}\Big).$$

左 $\mathcal{D}_L$ 加群の準同型 $\int_{K\to L} : \mathcal{M} \to \int_{K\to L}\mathcal{M}$ を次のように定める:

$$\int_{K\to L}\phi = \phi \bmod \sum_{k'\in K-L}\partial_{k'}\mathcal{M} \qquad (\phi\in\mathcal{M}). \quad \square$$

たとえば, $R_{\{\nu\}}, \mathcal{D}_{\{\nu\}}$ のそれぞれと $R, \mathcal{D}$ を同一視するとき, $\int_{\{\nu\}\to\emptyset} R_{\{\nu\}}$ は $\bar{R} = \int R\,dx = R/\partial R$ に等しい.

$\mathcal{M}$ が左 $\mathcal{D}_K$ 加群であり, $\phi\in\mathcal{M}$, $L\subset K$, $K-L=\{m_1<\cdots<m_\mu\}$ のとき, $\int_{K\to L}\phi \in \int_{K\to L}\mathcal{M}$ を次のように書く:

$$\int_{K\to L}\phi = \int \phi\,dx_{m_1}\cdots dx_{m_\mu}.$$

これの満たす基本的な関係式は次の等式である:

$$\int(\partial_{m_i}\phi)\,dx_{m_1}\cdots dx_{m_\mu} = 0 \qquad (i=1,\dots,\mu).$$

$\int_{K\to L} : \mathcal{M}\to\int_{K\to L}\mathcal{M}$ は自然な射影なのでこれらの合成は互いに compatible である. すなわち次が成立する.

Lemma 2.5 (Fubini の定理) [lemma:Fubini] $K_1\subset K_2\subset K_3\subset[N]$ のとき,

$$\int_{K_2\to K_1}\circ\int_{K_3\to K_2} = \int_{K_3\to K_1} : \mathcal{M}\to\int_{K_3\to K_1}\mathcal{M}. \quad \square$$

Lemma 2.6 [lemma:int-Del] $L\subset K$ のとき, $\int_{K\to L}\mathcal{B}_K$ は $\mathcal{B}_L$ と自然に同一視される.

Proof. , 任意の $k\in K$ に対して, $\mathcal{B}_K$ は基底 $\delta_K^{(\vec{n})}$ $(\vec{n}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{K-\{k\}})$ を持つ自由左 R_k 加群である.

$L=\emptyset$ の場合. Lemma 2.3 より, $\int_{K\to\emptyset}\mathcal{B}_K$ は $R_k/\partial_k R_k$ に同型であることがわかる. よって, R_k と R を同一視することによって, $\int_{K\to\emptyset}\mathcal{B}_K$ は $\mathcal{B}_\emptyset = \bar{R}$ と同一視できる. $f(x_k)\delta_K = f(x_{k'})\delta_K$ $(k,k'\in K,\ f\in R)$ より, この同一視のもとで,

$$\int_{K\to\emptyset} f(x_k)\delta_K^{(\vec{n})} = \delta_{\vec{n},0}\int f(x)\,dx \ \ \in\bar{R} \qquad (f\in R,\ \vec{n}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^K).$$

これより, $\int_{K\to\emptyset}\mathcal{B}_K$ と $\bar{R}$ の同一視の仕方は k の取り方に寄らないことがわかる.

$L\neq\emptyset$ の場合. Lemma 2.3 で $k\in L$ と選べば, $\int_{K\to L}\mathcal{B}_K$ は基底 $\delta_K^{(\vec{m})} \bmod \sum_{k'\in K-L}\partial_{k'}\mathcal{B}_K$ $(\vec{m}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{L-\{k\}})$ を持つ自由左 R_k 加群であることがわかる. したがって, L に関する Lemma 2.3 より, $\int_{K\to L}\mathcal{B}_K$ は $\mathcal{B}_L$ と同一視できることがわかる. この同一視は自然な埋め込み $\mathcal{D}_L\hookrightarrow\mathcal{D}_K$ から誘導されるので, k の取り方によらずに自然に定まる. $\square$

Lemma 2.6 によって $\int_{K\to L}\mathcal{B}_K = \mathcal{B}_L$ と同一視し, これ以後は $\int_{K\to L} : \mathcal{B}_K\to\int_{K\to L}\mathcal{B}_K$ よりも $\int_{K\to L} : \mathcal{B}_K\to\mathcal{B}_L$ の方を扱うことにする. Lemma 2.5 より, $\int_{K\to L} : \mathcal{B}_K\to\mathcal{B}_L$ も Fubini の定理を満たしている.

2.3 $N=2$ の場合

[sec:N=2]

$R_{[2]}=R\otimes R$ であり, $R_{x_1}=R\otimes 1$, $R_{x_2}=1\otimes R$ である. R_{x_1}, R_{x_2} はともに $R_{[2]}$ の部分環である.

任意の $f\in R$ に対して, $f(x_1)=f\otimes 1\in R_{x_1}$, $f(x_2)=1\otimes f\in R_{x_2}$ であり, $R_{[2]}$ に作用する導分 ∂_1, ∂_2 は定義より $\partial_1=\partial\otimes 1$, $\partial_2=1\otimes\partial$ である.

$\mathcal{D}_{[2]}=R_{[2]}[\partial_1,\partial_2]=\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}$ であり, $\mathcal{D}_{x_1}=\mathcal{D}\otimes 1$, $\mathcal{D}_{x_2}=1\otimes\mathcal{D}$ である. $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ はともに $\mathcal{D}_{[2]}$ の subalgebra である. $\mathcal{D}_{[2]}$ は $R_{[2]}$ 係数の微分作用素環であり, $R_{[2]}$ に自然に作用する.

微分作用素 $A=\sum_n a_n\partial^n\in\mathcal{D}$ に対して, $A_{x_\nu}=\sum_n a_n(x_\nu)\partial_i^n\in\mathcal{D}_\nu$ $(\nu=1,2)$ である.

デルタ函数の加群 $\mathcal{B}_{[2]}$ は次の基本関係式を持つ元 $\delta_{[2]}=\delta(x_1-x_2)$ から生成される左 $\mathcal{D}_{[2]}$ 加群 $\mathcal{D}_{[2]}\delta(x_1-x_2)$ に等しい:

$$f(x_1)\delta(x_1-x_2)=f(x_2)\delta(x_1-x_2), \qquad \partial_1\delta(x_1-x_2)=-\partial_2\delta(x_1-x_2).$$

ここで, $f\in R$ である. このとき, たとえば次が成立している:

$$\begin{aligned} f(x_2)\delta^{(n)}(x_1-x_2) &= \partial_1^n\bigl(f(x_2)\delta(x_1-x_2)\bigr)=\partial_1^n\bigl(f(x_1)\delta(x_1-x_2)\bigr) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x_1)\delta^{(k)}(x_1-x_2). \end{aligned}$$

ここで, $\delta^{(n)}(x_1-x_2):=\partial_1^n\delta(x_1-x_2)=(-\partial_2)^n\delta(x_1-x_2)$ と置いた.

Lemma 2.3 より, 次が成立している:

$$\mathcal{B}_{[2]}=\mathcal{D}_{[2]}\delta(x_1-x_2)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}R_{x_1}\delta^{(n)}(x_1-x_2)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}R_{x_2}\delta^{(n)}(x_1-x_2).$$

積分 $\int dx_2:\mathcal{B}_{[2]}=\mathcal{D}_{[2]}\delta(x_1-x_2)\to R_{x_1}$ は次のように計算される:

$$\int\sum_n f_n(x_1)\delta^{(n)}(x_1-x_2)\,dx_2=f_0(x_1) \qquad (f_n\in R).$$

これが以下を満たしていることがすぐにわかる:

$$\begin{aligned} &\int\delta(x_1-x_2)\,dx_2=1, \\ &\int f(x_1)F\,dx_2=f(x_1)\int F\,dx_2 \qquad (F\in\mathcal{B}_{[2]}=\mathcal{D}_{[2]}\delta(x_1-x_2),\ f\in R), \\ &\int\partial_1 F\,dx_2=\partial_1\int F\,dx_2 \qquad (F\in\mathcal{B}_{[2]}=\mathcal{D}_{[2]}\delta(x_1-x_2)), \\ &\int\partial_2 F\,dx_2=0 \qquad (F\in\mathcal{B}_{[2]}=\mathcal{D}_{[2]}\delta(x_1-x_2)). \end{aligned}$$

$f\in R$ に $f(x_1)\in R_{x_1}$ を対応させる写像の逆写像と $\int dx: R\to\bar{R}$ の合成は $\int dx_1: R_{x_1}=\mathcal{D}_{x_1}/\mathcal{D}_{x_1}=\mathcal{B}_{\{1\}}\Longrightarrow\bar{R}$ に等しい.

以上の定義の 1 と 2 の立場を逆転させた結果も成立している.

次の Fubini の定理が成立することも容易に確かめられる:

$$\iint dx_1 dx_2 = \int dx_1 \circ \int dx_2 = \int dx_2 \circ \int dx_1 : \mathcal{D}_2\delta(x_1 - x_2) \to \bar{R}.$$

次が成立することもすぐにわかる:

$$\iint \partial_1 F \, dx_1 dx_2 = \iint \partial_2 F \, dx_1 dx_2 = 0 \qquad (F \in \mathcal{D}_2\delta(x_1 - x_2)).$$

Lemma 2.7 (微分作用素の核函数) `[lemma:kernel-function]` 微分作用素 $A = \sum_n a_n \partial^n \in \mathcal{D}$ に対して, A の核函数 $K = K(x_1, x_2) \in \mathcal{B}_{[2]} = \mathcal{D}_{[2]}\delta(x_1 - x_2)$ を次のように定める:

$$K = K(x_1, x_2) = A_{x_1}\delta(x_1 - x_2) = \sum_n a_n(x_1)\delta^{(n)}(x_1 - x_2).$$

このとき, 以下が成立する:

$$\begin{aligned}
(Af)(x_1) &= \int K(x_1, x_2) f(x_2) \, dx_2 \qquad (f \in R), \\
(A^* f)(x_2) &= \int f(x_1) K(x_1, x_2) \, dx_1 \qquad (f \in R).
\end{aligned}$$

Proof. $f \in R$ に対して,

$$\begin{aligned}
\int K(x_1, x_2) f(x_2) \, dx_2 &= \int \sum_n a_n(x_1)\delta^{(n)}(x_1 - x_2) f(x_2) \, dx_2 \\
&= \sum_n a_n(x_1)\partial_1^n \int \delta(x_1 - x_2) f(x_2) \, dx_2 \\
&= \sum_n a_n(x_1)\partial_1^n f(x_1) = (Af)(x_1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int f(x_1) K(x_1, x_2) \, dx_1 &= \int f(x_1) \sum_n a_n(x_1)\delta^{(n)}(x_1 - x_2) \, dx_1 \\
&= \sum_n (-\partial_2)^n \int f(x_1) a_n(x_1) \delta(x_1 - x_2) \, dx_1 \\
&= \sum_n (-\partial_2)^n \bigl(f(x_2) a_n(x_2)\bigr) = (A^* f)(x_2). \qquad \square
\end{aligned}$$

3 形式変分法における Poisson 構造

`[sec:Poisson-in-FVC]`

我々は 1 次元の空間上の接続や常微分作用素もしくは常擬微分作用素のなす空間上の Poisson 構造を扱いたい. そのとき技術的に問題になるのはそれらの空間が無限次元になることである. I. M. Gelfand と L. A. Dikii と I. Ya. Dorfman は微分環の概念を用いた形式変分法の定式化によってこの問題を解決した ([4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [3]).

この section では簡単のため (R, ∂) は u_i $(u \in I \neq \emptyset)$ から生成される微分多項式環であると仮定する:

$$R = \mathbb{K}\bigl[\, u_i^{(n)} \bigm| i \in I,\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\bigr].$$

形式的に $\partial/\partial x = \partial$ と考える. このとき, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_R = R[\partial]$ は微分多項式係数の微分作用素環である.

3.1 de Rham complex

[sec:de-Rham-complex]

微分多項式環 R の Kähler 微分の加群 (the module of Kähler differentials of R) を $\Omega_R = \Omega_{R/\mathbb{K}}$ と書くことにする (例えば [15] もしくはその英訳 [13] の第 9 章を見よ). 自然な全微分 $R \to \Omega_R$ を δ と書くことにする.

Remark 3.1 [rem:d-vs-delta] $\delta : R \to \Omega_R$ を d ではなく δ と書くことにした理由は二つある. 一つ目は $\int dx$ の意味での d と区別したいからである. 二つ目は変分法の意味での全微分には通常 δ という記号が使われるからである. □

R から R 加群 M への $\mathbb{K}$-derivations 全体のなす R 加群を $\mathrm{Der}(R, M) = \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(R, M)$ と書くことにし, R からそれ自身への $\mathbb{K}$-derivations 全体のなす加群を $\mathrm{Der}\, R = \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}\, R$ と書くことにする.

R は多項式環なので自然に de Rham complex $(\Omega_R^{\cdot}, \delta)$ が定義される. Kähler 微分の加群 Ω_R は基底 $\delta u_i^{(n)}$ $(i \in I,\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を持つ自由 R 加群であり, Ω_R^p $(p = 0, 1, 2, \dots)$ は Ω_R の R 上の p 次の外積である. 簡単のため $p < 0$ とき $\Omega_R^p = \{0\}$ と置く. $\Omega_R^0 = R$ であり, $\wedge : \Omega_R^0 \times \Omega_R^p \to \Omega_R^p$ は R のスカラー倍作用に一致する.

全微分 $\delta : R \to \Omega_R$ は次のように表わされる:

$$\delta f = \sum_{i \in I} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial u_i^{(n)}} \delta u_i^{(n)} \quad \in \Omega_R \qquad (f \in R).$$

R から R 加群 M への derivations 全体のなす加群と Ω_R から M への R 準同型全体のなす加群は自然に同一視される:

$$\mathrm{Hom}_R(\Omega_R, M) = \mathrm{Der}(R, M), \quad \phi \mapsto \phi \circ \delta.$$

R に作用する derivations の全体のなす加群 $\mathrm{Der}\, R$ は $\prod_{i \in I} \prod_{n=0}^{\infty} R\partial/\partial u_i^{(n)}$ に R 加群として同型である. 自然な R 双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle : \Omega_R \times \mathrm{Der}\, R \to R$ が次のように定義される:

$$\left\langle \delta u_i^{(m)}, \frac{\partial}{\partial u_j^{(n)}} \right\rangle = \delta_{i,j} \delta_{m,n} \qquad (i, j \in I,\ m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

外微分 $\delta : \Omega_R^p \to \Omega_R^{p+1}$ は以下の条件によって一意に特徴付けられる:

- $\delta : \Omega_R^p \to \Omega_R^{p+1}$ は $\mathbb{K}$-linear である.
- $\delta : \Omega_R^0 \to \Omega_R^1$ は $\delta : R \to \Omega_R$ に一致する.
- $\delta(\delta u_i^{(n)}) = 0 \quad (i \in I,\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$.
- $\delta(\omega \wedge \theta) = (\delta\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge (\delta\theta) \quad (\omega \in \Omega_R^p,\ \theta \in \Omega_R^q)$.

外微分は $\delta^2 = \delta \cdot \delta = 0$ を満たしている.

$A \in \mathrm{Der}\, R$ に対して, 内部積 (interior product) $i(A) : \Omega_R^p \to \Omega_R^{p-1}$ は以下の条件によって一意に特徴付けられる:

- $i(A) : \Omega_R^p \to \Omega_R^{p-1}$ は $\mathbb{K}$-linear である.
- $i(A)(f) = 0 \quad (f \in \Omega^0 = R)$.

- $i(A)(\alpha) = \langle \alpha, A \rangle \quad (\alpha \in \Omega_R^1 = \Omega_R)$.
- $i(A)(\omega \wedge \theta) = (i(A)\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge (i(A)\theta) \quad (\omega \in \Omega_R^p,\ \theta \in \Omega_R^q)$.

$A \mapsto i(A)$ は R 準同型である．さらに, $\alpha \in \Omega_R$ の左からの外積 (exterior product) を $e(\alpha) = \alpha \wedge (\cdot) : \Omega_R^p \to \Omega_R^{p+1}$ と書くと, 次の Clifford 代数の関係式が成立している:

$$[e(\alpha), i(A)]_+ = \langle \alpha, A \rangle \in R, \qquad [e(\alpha), e(\beta)]_+ = [i(A), i(B)]_+ = 0.$$

ここで, $[X,Y]_+ = XY + YX$ (反交換子), $A, B \in \operatorname{Der} R$, $\alpha, \beta \in \Omega_R^1 = \Omega_R$.

$A \in \operatorname{Der} R$ に対して, Lie 微分 (Lie derivation) $\operatorname{Lie}_A : \Omega_R^p \to \Omega_R^p$ は[1] 以下の条件によって一意に特徴付けられる:

- $\operatorname{Lie}_A : \Omega_R^p \to \Omega_R^p$ は $\mathbb{K}$-linear である．
- $\operatorname{Lie}_A f = A(f) \quad (f \in \Omega_R^0 = R)$.
- $\operatorname{Lie}_A(\alpha) = \delta \langle \alpha, A \rangle \quad (\alpha \in \Omega_R^1 = \Omega_R)$.
- $\operatorname{Lie}_A(\omega \wedge \theta) = (\operatorname{Lie}_A \omega) \wedge \theta + \omega \wedge (\operatorname{Lie}_A \theta) \quad (\omega \in \Omega_R^p,\ \theta \in \Omega_R^q)$.

$A \mapsto \operatorname{Lie}_A$ は R 準同型ではないことに注意せよ．

Lemma 3.2 [lemma:i-Lie-delta] 内部積, Lie 微分, 外微分は以下の関係式を満たしている:

(1) $\operatorname{Lie}_A = [i(A), \delta]_+ \quad (A \in \operatorname{Der} R)$.
(2) $[\delta, \operatorname{Lie}_A] = 0 \quad (A \in \operatorname{Der} R)$.
(3) $[\operatorname{Lie}_A, i(B)] = [i(A), \operatorname{Lie}_B] = i([A,B]) \quad (A, B \in \operatorname{Der} R)$.
(4) $[\operatorname{Lie}_A, \operatorname{Lie}_B] = \operatorname{Lie}_{[A,B]} \quad (A, B \in \operatorname{Der} R)$.

ここで, $[X,Y] = XY - YX$, $[X,Y]_+ = XY + YX$.　□

3.2　形式変分複体

[sec:formal-variational-complex]

微分多項式環 R には導分 $\partial = \sum_{i,n} u_i^{(n+1)} \partial/\partial u_i^{(n)} \in \operatorname{Der} R$ が定められている．R の積分が $\bar{R} = \int R\,dx = R/\partial R$ と定義され, $f \in R$ の積分が $\bar{f} = \int f\,dx = f \bmod \partial R \in \bar{R}$ と定義された．この構成を de Rham complex $\Omega_R^{\cdot}$ 全体に拡張しよう．

記号の簡単のため, $\operatorname{Lie}_\partial$ と $\operatorname{Lie}_{\partial/\partial u_i^{(n)}}$ のそれぞれを単に ∂, $\partial/\partial u_i^{(n)}$ と書くことにする．Lemma 3.2 (2) より, $\partial, \partial/\partial u_i^{(n)} : \Omega_R^{\cdot} \to \Omega_R^{\cdot}$ は外微分 δ と可換である．より具体的には, $f \in R$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\partial(f\,\delta u_{i_1}^{(n_1)} \wedge \cdots \wedge \delta u_{i_p}^{(n_p)}) \\
&= f'\,\delta u_{i_1}^{(n_1)} \wedge \cdots \wedge \delta u_{i_p}^{(n_p)} + \sum_{\nu=1}^{p} f\,\delta u_{i_1}^{(n_1)} \wedge \cdots \wedge \delta u_{i_p}^{(n_p+1)} \wedge \cdots \wedge \delta u_{i_p}^{(n_p)}, \\
&\frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}(f\,\delta u_{i_1}^{(n_1)} \wedge \cdots \wedge \delta u_{i_p}^{(n_p)}) = \frac{\partial f}{\partial u_i^{(n)}}\,\delta u_{i_1}^{(n_1)} \wedge \cdots \wedge \delta u_{i_p}^{(n_p)}.
\end{aligned}$$

[1]微分幾何の教科書ではベクトル場 A による Lie 微分は通常 L_A と表わされる．記号法 Lie_A を使う理由は L を Lagrangian の記号として使用する場合 ([4]) と L を L-operator の記号として使用する場合に困らないようにするためである．

$\partial = \mathrm{Lie}_\partial$ と δ の可換性より, ∂ は $\Omega_R^\cdot$ の cochain complex endomorphism である. よって, $\Omega_R^\cdot$ の quotient cochain complex

$$\bar{\Omega}_R^\cdot = \Omega_R^\cdot / \partial \Omega_R^\cdot$$

が定義される. $\bar{\Omega}_R^0 = \bar{R}$ である. $\bar{\Omega}_R = \bar{\Omega}_R^1$ と置く.

任意の $\omega \in \Omega_R^p$ に対して, $\bar{\omega} = \int \omega\,dx$ を次のように定める:

$$\bar{\omega} = \int \omega\,dx = \omega \mod \partial\Omega_R^p \quad \in \bar{\Omega}_R^p.$$

このとき, ∂ が次数 0 の derivation であることより, 次の部分積分の公式が成立することがわかる:

$$\int \omega \wedge (\partial\theta)\,dx = -\int (\partial\omega) \wedge \theta\,dx \qquad (\omega, \theta \in \Omega_R^\cdot).$$

$\bar{\Omega}_R^\cdot$ に誘導される外微分も δ と書くことにする:

$$\delta\bar{\omega} = \delta \int \omega\,dx := \overline{\delta\omega} = \int \delta\omega\,dx \quad \in \bar{\Omega}_R^{p+1} \qquad (\omega \in \Omega_R^p).$$

Definition 3.3 `[def:fvc]` 以上のように定義される $(\bar{\Omega}_R^\cdot, \delta)$ を形式変分複体 (formal variational complex) と呼ぶことする. □

3.3 形式変分法 (1)

`[sec:formal-variational-calculus-1]`

$\Omega_R^\cdot$ の cochain complex endomorphism $\delta_i = \delta/\delta u_i$ を次のように定める:

$$\delta_i = \frac{\delta}{\delta u_i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\partial)^n \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}} \qquad (i \in I).$$

Lemma 3.4 `[lemma:barOmegaR]` 包含写像 $\bigoplus_{i\in I} R\,\delta u_i \hookrightarrow \Omega_R$ と 自然な射影 $\Omega_R \twoheadrightarrow \bar{\Omega}_R$ の合成はベクトル空間の同型写像である:

$$\bigoplus_{i\in I} R\,\delta u_i \xrightarrow{\sim} \bar{\Omega}_R = \left\{ \int \theta\,dx \;\middle|\; \theta \in \bigoplus_{i\in I} R\,\delta u_i \right\}.$$

$\delta : \bar{R} \to \bar{\Omega}_R$ とこの同型の逆写像の合成は次に等しい:

$$\bar{R} \to \bigoplus_{i\in I} R\,\delta u_i, \quad \int f\,dx \mapsto \sum_{i\in I} \frac{\delta f}{\delta u_i}\,\delta u_i.$$

Proof. 前半の全射性. 任意の $\omega = \sum_{i,n} \omega_{i,n} \delta u_i^{(n)} \in \Omega_R$ に対して, 部分積分の公式より,

$$\int \omega\,dx = \sum_{i,n} \int \omega_{i,n} \delta u_i^{(n)}\,dx = \sum_{i,n} \int \omega_{i,n} \cdot \partial^n \delta u_i\,dx = \sum_{i,n} \int (-\partial)^n \omega_{i,n} \cdot \delta u_i\,dx.$$

よって, $\theta_i = \sum_n (-\partial)^n \omega_{i,n} \in R$, $\theta = \sum_i \theta_i\,\delta u_i \in \bigoplus_{i\in I} R\,\delta u_i$ と置くと, $\int \omega\,dx = \int \theta\,dx$.

前半の単射性: $\theta = \sum_i \theta_i\,\delta u_i \in \bigoplus_{i\in I} R\,\delta u_i$ を任意に取り, $\int \theta\,dx = 0$ と仮定すると,

$$0 = \partial\theta = \sum_i \theta_i'\,\delta u_i + \sum_i \theta_i\,\delta u_i^{(1)}.$$

このとき, $\theta_i = 0$ $(i \in I)$ すなわち $\theta = 0$.

後半は変分法でおなじみの次の公式と同値である:

$$\delta \int f\,dx = \int \sum_{i\in I} \frac{\delta f}{\delta u_i}\delta u_i\,dx \qquad (f \in R).$$

$f \in R$ のとき, 部分積分の公式より,

$$\delta \int f\,dx = \sum_{i,n} \int \frac{\partial f}{\partial u_i^{(n)}}\delta u_i^{(n)}\,dx = \sum_{i,n} \int \frac{\partial f}{\partial u_i^{(n)}} \cdot \partial^n \delta u_i\,dx$$
$$= \sum_{i,n} \int (-\partial)^n \frac{\partial f}{\partial u_i^{(n)}} \cdot \delta u_i\,dx = \int \sum_{i\in I} \frac{\delta f}{\delta u_i}\delta u_i\,dx. \quad \square$$

Lemma 3.5 `[lemma:deltaid=0]` $\delta_i\partial = \dfrac{\delta}{\delta u_i}\partial = 0 \quad (i \in I)$.

Proof. $[\partial/\partial u_i^{(n)}, \partial] = \partial/\partial u_i^{(n-1)}$ (ここで $\partial/\partial u_i^{(-1)} = 0$) より,

$$\delta_i\partial = \frac{\delta}{\delta u_i}\partial = \sum_{n=0}^{\infty}(-\partial)^n \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}\partial = \sum_{n=0}^{\infty}(-\partial)^n \left(\partial\frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}} + \left[\frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}, \partial\right]\right)$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}(-\partial)^{n+1}\frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}} + \sum_{n=1}^{\infty}(-\partial)^n \frac{\partial}{\partial u_i^{(n-1)}} = 0. \quad \square$$

この Lemma 3.5 より, $\Omega_R^{\cdot}$ の cochain complex endmorphism $\delta_i = \delta/\delta u_i$ は cochain complex homomorphism $\delta_i = \delta/\delta u_i : \bar\Omega_R^{\cdot} \to \Omega_R^{\cdot}$ を誘導する:

$$\delta_i \int \omega\,dx = \frac{\delta\omega}{\delta u_i} = \frac{\partial\omega}{\partial u_i} - \partial\frac{\partial\omega}{\partial u_i'} + \partial^2\frac{\partial\omega}{\partial u_i''} - \partial^3\frac{\partial\omega}{\partial u_i'''} + \cdots \in \Omega_R^p \qquad (\omega \in \Omega_R^p).$$

$\delta_i : \bar\Omega_R^{\cdot} \to \Omega_R^{\cdot}$ と自然な射影 $\Omega_R^{\cdot} \to \bar\Omega_R^{\cdot}$ の合成を $\bar\delta_i : \bar\Omega_R^{\cdot} \to \bar\Omega_R^{\cdot}$ と書くことにする. $\Omega_R^{\cdot}$ の cochain complex endmorphisms δ_i $(i \in I)$ は互いに可換ではないが, $\bar\Omega_R^{\cdot}$ の cochain complex endmorphisms $\bar\delta_i$ $(i \in I)$ は互いに可換である (Lemma 3.8 を見よ).

Example 3.6 `[example:Euler-Laglange]` $f = f(u, u') \in R$ が u_i, u_i' $(i \in I)$ の多項式ならば

$$\delta_i \int f(u, u')\,dx = \frac{\delta f}{\delta u_i} = \frac{\partial f}{\partial u_i} - \partial\frac{\partial f}{\partial u_i'}.$$

よって, $\delta_i \int f(u, u')\,dx = 0$ は Euler-Lagrange 方程式を意味する. $\square$

$\vec{a} = (a_i)_{i\in I} \in R^I$ に対して, $\delta_{\vec{a}} : \Omega_R^{\cdot} \to \Omega_R^{\cdot}$ もしくは $\delta_{\vec{a}} : \bar\Omega_R^{\cdot} \to \Omega_R^{\cdot}$ と $\bar\delta_{\vec{a}} : \bar\Omega_R^{\cdot} \to \bar\Omega_R^{\cdot}$ を次のように定める:

$$\delta_{\vec{a}} = \sum_{i\in I} a_i\delta_i = \sum_{i\in I}\sum_{n=0}^{\infty} a_i\,(-\partial)^n \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}, \qquad \bar\delta_{\vec{a}} = \sum_{i\in I} a_i\bar\delta_i.$$

3.4 形式変分法 (2)

[sec:formal-variational-calculus-2]

微分多項式環 R に作用する ∂ と可換な $\mathbb{K}$-derivations 全体の空間を $\operatorname{Der}_\partial R$ と書くことにする:

$$\operatorname{Der}_\partial R = \{\, A \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R \mid [A, \partial] = 0 \,\}.$$

$\operatorname{Der}_\partial R$ は $\operatorname{Der} R$ の Lie subalgebra をなし, $\operatorname{Der}_\partial R$ は $\bar{R} = R/\partial R$ に自然に作用する.

Lemma 3.2 (4) より, 任意の $A \in \operatorname{Der}_\partial R$ に対して $[\mathrm{Lie}_A, \mathrm{Lie}_\partial] = 0$ であるから, Lie_A は $\bar{\Omega}^p_R$ に自然に作用する. Lemma 3.2 (2) より, Lie_A ($A \in \operatorname{Der}_\partial R$) の $\bar{\Omega}^\cdot_R$ への作用は外微分 δ と可換である. これで, $\operatorname{Der}_\partial R$ の $\bar{R} = R/\partial R$ への Lie algebra 作用は formal variational complex $(\bar{\Omega}^\cdot_R, \delta)$ への作用に自然に拡張されることがわかった. 記号の簡単のため $A \in \operatorname{Der}_\partial R$, $\omega \in \Omega^\cdot_R$ に対して, $\mathrm{Lie}_A \omega$ を $A\omega$ と書くことにする.

$\vec{a} = (a_i)_{i\in I} \in R^I$ に対して, $\partial_{\vec{a}} \in \operatorname{Der} R$ を次のように定める:

$$\partial_{\vec{a}} = \sum_{i\in I} \sum_{n=0}^{\infty} a_i^{(n)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}.$$

例えば, $\vec{a} = (u_i')_{i\in I}$ のとき, $\partial_{\vec{a}} = \partial$ である.

Lemma 3.7 [lemma:Der-d-R] $\vec{a} \in R^I$ に $\partial_{\vec{a}} \in \operatorname{Der} R$ を対応させる写像はベクトル空間の同型写像 $R^I \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_\partial R$ を誘導する. すなわち, R に作用する ∂ と可換な $\mathbb{K}$-derivation は $\partial_{\vec{a}}$ ($\vec{a} \in R^I$) の形で一意に表わされる:

$$\operatorname{Der}_\partial R = \{\, \partial_{\vec{a}} \mid \vec{a} \in R^I \,\} \cong R^I.$$

さらに,

$$[\partial_{\vec{a}}, \partial_{\vec{b}}] = \partial_{[\vec{a},\vec{b}]}, \qquad [\vec{a}, \vec{b}] := \partial_{\vec{a}}\vec{b} - \partial_{\vec{b}}\vec{a} \qquad (\vec{a}, \vec{b} \in R^I).$$

ここで, $[\vec{a}, \vec{b}]$ の定義において $\operatorname{Der} R$ の R^I への自然な作用を用いた.

Proof. $\partial = \sum_{i,n} u_i^{(n+1)} \partial/\partial u_i^{(n)}$ であるから,

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}, \partial\right] = \frac{\partial}{\partial u_i^{(n-1)}} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial u_i^{(-1)}} := 0\right).$$

よって, 任意の $A = \sum_{i,n} a_{i,n} \partial/\partial u_i^{(n)} \in \operatorname{Der} R$ ($a_{i,n} \in R$) に対して,

$$[A, \partial] = \sum_{i,n} \left(a_{i,n} \frac{\partial}{\partial u_i^{(n-1)}} - a_{i,n}' \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}} \right) = \sum_{i,n} (a_{i,n+1} - a_{i,n}') \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}.$$

よって, $[A, \partial] = 0$ と $a_{i,n+1} = a_{i,n}'$ ($i \in I$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) は同値であり, さらにこれは $a_{i,n} = a_{i,0}^{(n)}$ と同値である. よって, $\vec{a} = (a_{i,0})_{i\in I}$ と置くと $A = \partial_{\vec{a}}$. これで前半が示された.

前半の結果より, $\vec{a} = (a_i)_{i\in I}, \vec{b} = (b_i)_{i\in I} \in R^I$ に対して, $[\partial_{\vec{a}}, \partial_{\vec{b}}] = \partial_{\vec{c}}$ を満たす $\vec{c} \in R^I$ が唯一存在する. そして, $i \in I$ に対して,

$$c_i = \partial_{\vec{c}} u_i = [\partial_{\vec{a}}, \partial_{\vec{b}}] u_i = \partial_{\vec{a}} \partial_{\vec{b}} u_i - \partial_{\vec{b}} \partial_{\vec{a}} u_i = \partial_{\vec{a}} b_i - \partial_{\vec{b}} a_i.$$

すなわち, $\vec{c} = \partial_{\vec{a}}\vec{b} - \partial_{\vec{b}}\vec{a}$ である. これで後半も示された. □

記号の簡単のため, $\vec{a} \in R^I$ に対する $\mathrm{Lie}_{\partial_{\vec{a}}}$ を単に $\partial_{\vec{a}}$ と書くことにする.

Lemma 3.8 `[lemma:dveca=bardeltaveca]` 任意の $\vec{a} = (a_i)_{i\in I} =\in R^I$ に対して, $\bar{\Omega}^{\cdot}_R$ の cochain complex endmorphism として $\partial_{\vec{a}} = \bar{\delta}_{\vec{a}}$.

Proof. $\omega \in \Omega^{\cdot}_R$ に対して,

$$\partial_{\vec{a}} \int \omega\, dx = \sum_{i,n} \int a_i^{(n)} \frac{\partial \omega}{\partial u_i^{(n)}}\, dx = \sum_{i,n} \int a_i\, (-\partial)^n \frac{\partial \omega}{\partial u_i^{(n)}}\, dx$$
$$= \int \delta_{\vec{a}} \omega\, dx = \bar{\delta}_{\vec{a}} \int \omega\, dx. \quad \square$$

3.5 Poisson 構造

`[sec:Poisson-def]`

微分多項式係数の微分作用素 $A_{ij} = \sum_n a_{ij;n} \partial^n \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_R = R[\partial]$ $(i, j \in I)$ を任意に取る.

形式的汎函数の空間 $\bar{R} = \int R\, dx = R/\partial R$ に bracket 演算 $\{\ ,\ \} : \bar{R} \otimes \bar{R} \to \bar{R}$ (ここで $\otimes$ は $\mathbb{K}$ 上のテンソル積) を次のように定義する:

$$\{\bar{f}, \bar{g}\} = \sum_{i,j\in I} \int \frac{\delta f}{\delta u_i} \cdot A_{ij} \frac{\delta g}{\delta u_j}\, dx. \tag{3.1}$$

ここで $f, g \in R$. 各 f, g ごとに, $\delta f/\delta u_i$, $\delta g/\delta u_j$ は有限個の i, j を除いて 0 なので, この定義式の右辺は有限和になる. Lemma 3.5 より, $\delta f/\delta u_i$, $\delta g/\delta u_j$ はそれぞれ $\bar{f} = \int f\, dx$, $\bar{g} = \int g\, dx$ だけから決まる. よって, $\{\bar{f}, \bar{g}\}$ は well-defined である.

$P : \bar{\Omega}_R \to \mathrm{Der}_\partial R$ を次のように定める:

$$P\left(\overline{\sum_{j\in I} g_j\, \delta u_j}\right) = \partial_{A\vec{g}}, \qquad A\vec{g} := \left(\sum_{j\in I} A_{ij} g_j\right)_{i\in I}.$$

ここで, $g_j \in R$ であり, 有限個を除いて $g_j = 0$ である.

このとき, Lemma 3.8 より, $\bar{R}$ 上で $\partial_{A\vec{g}} = \bar{\delta}_{A\vec{g}}$ であることに注意すれば,

$$\{\bar{f}, \bar{g}\} = P(\delta\bar{g})\bar{f} \qquad (\bar{f}, \bar{g} \in \bar{R}).$$

Definition 3.9 (形式的汎函数の空間上の Poisson 構造) 上の $\{\ ,\ \}$ が Lie algebra の公理を満たすとき, 形式的汎函数の空間 $\bar{R}$ 上に Poisson 構造が定められたと言い, $\{\ ,\ \}$ を Poisson bracket と呼ぶ. $\square$

A_{ij} の核函数を $K_{ij} = K_{ij}(x_1, x_2)$ と書くことにする (Lemma 2.7):

$$K_{ij} = K_{ij}(x_1, x_2) = A_{ij,x_1} \delta(x_1 - x_2) = \sum_n a_{ij;n}(x_1) \delta^{(n)}(x_1 - x_2).$$

演算 $\{\ ,\ \} : R_{[2]} = R \otimes R \to \mathcal{B}_{[2]} = \mathcal{D}_{[2]} \delta(x_1 - x_2)$ を次のように定めることができる:

$$\{f(x_1), g(x_2)\} = \sum_{i,j\in I} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial u_i^{(m)}}(x_1) \cdot \partial_1^m \partial_2^n K_{ij}(x_1, x_2) \cdot \frac{\partial g}{\partial u_j^{(n)}}(x_2).$$

ここで $f, g \in R$ である. たとえば,

$$\{u_i(x_1), u_j(x_2)\} = K_{ij}(x_1, x_2) = \sum_n a_{ij;n}(x_1)\delta^{(n)}(x_1 - x_2),$$

$$\{u_i^{(m)}(x_1), u_j^{(n)}(x_2)\} = \partial_1^m \partial_2^n K(x_1, x_2).$$

$\{\ ,\ \} : R_{[2]} = R \otimes R \to \mathcal{B}_{[2]} = \mathcal{D}_{[2]}\delta(x_1 - x_2)$ は

Lemma 3.10 `[lemma:bracket-2to1]` 次が成立する:

$$\{\bar{f}, \bar{g}\} = \iint \{f(x_1), g(x_2)\}\, dx_1 dx_2 \qquad (f, g \in R).$$

Proof. 積分の定義から次の部分積分の公式が導かれる:

$$\iint f \cdot \partial_\nu \phi \, dx_1 dx_2 = -\iint \partial_\nu f \cdot \phi \, dx_1 dx_2 \qquad (\phi \in \mathcal{B}_{[2]},\ f \in R_{[2]},\ \nu = 1, 2).$$

よって,

$$\begin{aligned}
&\iint \{f(x_1), g(x_2)\}\, dx_1 dx_2 \\
&= \sum_{i,j \in I} \sum_{m,n=0}^{\infty} \iint \frac{\partial f}{\partial u_i^{(m)}}(x_1) \cdot \partial_1^m \partial_2^n K_{ij}(x_1, x_2) \cdot \frac{\partial g}{\partial u_j^{(n)}}(x_2)\, dx_1 dx_2 \\
&= \sum_{i,j \in I} \sum_{m,n=0}^{\infty} \iint (-\partial_1)^m \frac{\partial f}{\partial u_i^{(m)}}(x_1) \cdot K_{ij}(x_1, x_2) \cdot (-\partial_2)^n \frac{\partial g}{\partial u_j^{(n)}}(x_2)\, dx_1 dx_2 \\
&= \sum_{i,j \in I} \iint \frac{\delta f}{\delta u_i}(x_1) \cdot K_{ij}(x_1, x_2) \cdot \frac{\delta g}{\delta u_j}(x_2)\, dx_1 dx_2 \\
&= \sum_{i,j \in I} \int \frac{\delta f}{\delta u_i}(x_1) \cdot \left(\int K_{ij}(x_1, x_2) \frac{\delta g}{\delta u_j}(x_2)\, dx_2 \right) dx_1 \\
&= \sum_{i,j \in I} \int \frac{\delta f}{\delta u_i}(x_1) \cdot A_{ij,x_1} \frac{\delta g}{\delta u_j}(x_1)\, dx_1 = \{\bar{f}, \bar{g}\}. \quad \square
\end{aligned}$$

Remark 3.11 `[rem:bracket-1to2]` 形式的には, Lemma 3.10 の逆に bracket の定義 (3.1) から bracket の定義 (3.5) を以下のようにして導くことができる:

$$\begin{aligned}
&\{f(x_1), g(x_2)\} \\
&= \left\{ \int \delta(x - x_1) f(x)\, dx,\ \int \delta(x - x_2) g(x)\, dx \right\} \\
&= \sum_{i,j,m,n} \int (-\partial)^m \left(\delta(x - x_1) \frac{\partial f}{\partial u_i^{(m)}}(x) \right) \cdot A_{ij} (-\partial)^n \left(\delta(x - x_2) \frac{\partial g}{\partial u_j^{(n)}}(x) \right) dx \\
&= \sum_{i,j,m,n} \int \delta(x - x_1) \frac{\partial f}{\partial u_i^{(m)}}(x) \cdot \partial^m \partial_2^n A_{ij} \delta(x - x_2) \cdot \frac{\partial g}{\partial u_j^{(n)}}(x_2)\, dx \\
&= \sum_{i,j,m,n} \frac{\partial f}{\partial u_i^{(m)}}(x_1) \cdot \partial_1^m \partial_2^n A_{ij,x_1} \delta(x_1 - x_2) \cdot \frac{\partial g}{\partial u_j^{(n)}}(x_2) \\
&= \sum_{i,j,m,n} \frac{\partial f}{\partial u_i^{(m)}}(x_1) \cdot \partial_1^m \partial_2^n K_{ij}(x_1, x_2) \cdot \frac{\partial g}{\partial u_j^{(n)}}(x_2). \quad \square
\end{aligned}$$

Remark 3.12 [rem:bracket-f-barg] $\{\ ,\ \} : R \otimes \bar{R} \to R_{x_1}$ と $\{\ ,\ \} : \bar{R} \otimes \bar{R} \to R_{x_2}$ を次のように定義することができる:

$$\{f(x_1), \bar{g}\} = \int \{f(x_1), g(x_2)\}\, dx_2 = \sum_{i,j \in I} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial u_i^{(m)}}(x_1) \cdot \partial_1^m A_{ij,x_1} \frac{\delta g}{\delta u_j}(x_1),$$

$$\{\bar{f}, g(x_2)\} = \int \{f(x_1), g(x_2)\}\, dx_1 = \sum_{i,j \in I} \sum_{n=0}^{\infty} \partial_2^n A^*_{ij,x_2} \frac{\delta f}{\delta u_i}(x_2) \cdot \frac{\partial g}{\partial u_j^{(n)}}(x_2).$$

ここで, $f, g \in R$. □

4 擬微分作用素の空間上の Poisson 構造

[sec:Poisson-pdo]
以下, (R, ∂) は $\mathbb{K}$ 上の微分環であるとする.

4.1 擬微分作用素環

[sec:do-pdo]

Definition 4.1 (擬微分作用素環) [def:pdo] R 加群として $\mathcal{E} = \mathcal{E}_R$ を次のように定める:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_R = R((\partial^{-1})) = \left\{ A = \sum_{-\infty < i \le n} a_i \partial^i \;\middle|\; n \in \mathbb{Z},\, a_i \in R\ (i \le N) \right\}.$$

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_R$ の filtration $\mathcal{E}_{\le n} = \mathcal{E}_{R, \le n}$ $(n \in \mathbb{Z})$ を次のように定める:

$$\mathcal{E}_{\le n} = \mathcal{E}_{R, \le n} = \left\{ A = \sum_{-\infty < i \le n} a_i \partial^i \;\middle|\; a_i \in R\ (i \le n) \right\}.$$

$\mathcal{E}_{\le n}$ $(n \in \mathbb{Z})$ を原点の基本開近傍系とする線型位相を ∂^{-1}-adic topology と呼ぶ. $\mathcal{E}$ に ∂^{-1}-adic topology に関して連続な結合代数の構造を次の条件によって一意に定めることができる:

$$(f\partial^m)(g\partial^n) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} f g^{(i)} \partial^{m-i+n}.$$

ここで, $f, g \in R$, $m, n \in \mathbb{Z}$ である. 二項係数 $\binom{m}{i}$ は m が負の場合にも well-defined であることに注意せよ.

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_R$ を微分環 R に付随する擬微分作用素環と呼び, $\mathcal{E}_{\le n} = \mathcal{E}_{R, \le n}$ の元を高々 n 階の擬微分作用素と呼ぶ. 微分作用素環 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_R$ は自然に $\mathcal{E} = \mathcal{E}_R$ の部分代数とみなせる. $\mathcal{D}_{\le n} = \mathcal{D}_{R, \le n} = \mathcal{D}_R \cap \mathcal{E}_{\le n}$ と置くと, $\mathcal{D}_n$ の元は高々 n 階の微分作用素である. □

Definition 4.2 (非整数巾に拡張された擬微分作用素環) [def:epdo] 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して, 直積左 R 加群 $\prod_{\mu \in \mathbb{K}} R\partial^\mu$ の左 R 部分加群 $\mathcal{F}_{\le \alpha} = \mathcal{F}_{R, \le \alpha}$ を次のように定める:

$$\mathcal{F}_{\le \alpha} = \mathcal{F}_{R, \le \alpha} = \mathcal{E}_{\le 0} \partial^\alpha = \left\{ A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \partial^{\alpha - i} \;\middle|\; a_i \in R\ (i = 0, 1, 2, \dots) \right\}.$$

$\mathcal{F}_{\le\alpha}$ には自然に ∂^{-1}-adic topology が定まる. 任意の $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ に対して, ∂^{-1}-adic topology に関して連続な積写像 $\mathcal{F}_{\le\alpha}\times\mathcal{F}_{\le\beta}\to\mathcal{F}_{\le\alpha+\beta}$ を次の条件によって一意的に定めることができる:

$$(f\partial^\mu)(g\partial^\nu)=\sum_{i=0}^\infty\binom{\mu}{i}fg^{(i)}\partial^{\mu-i+\nu}.$$

ここで, $f,g\in R$, $\mu\in\alpha-\mathbb{Z}_{\ge 0}$, $\nu\in\beta-\mathbb{Z}_{\ge 0}$ である. 二項係数 $\binom{\mu}{i}$ は任意の $\mu\in\mathbb{K}$ に対して well-defined であることに注意せよ. この積は結合法則を満たし,

$$\mathcal{F}=\mathcal{F}_R:=\sum_{\alpha\in\mathbb{K}}\mathcal{F}_{\le\alpha}\subset\prod_{\mu\in\mathbb{K}}R\partial^\mu$$

に結合代数の構造を定める. $\mathcal{F}=\mathcal{F}_R$ を微分環 R に付随する非整数巾に拡張された擬微分作用素環と呼び, $\mathcal{F}=\mathcal{F}_R$ の元を一般化された擬微分作用素環と呼ぶ[2]. 微分作用素環 $\mathcal{D}$ と擬微分作用素環 $\mathcal{E}$ は自然に $\mathcal{F}$ の部分代数とみなせ, $n\in\mathbb{Z}$ ならば $\mathcal{E}_{\le n}=\mathcal{F}_{\le n}$ である. □

Remark 4.3 [rem:associativity-F] 以下のようにして, $\mathcal{F}=\mathcal{F}_R$ の積の結合律が示される. $\mathcal{F}=\mathcal{F}_R$ の積の定義より, $f,g,h\in R$, $\mu,\nu,\lambda\in\mathbb{K}$ に対して,

$$\begin{aligned}(f\partial^\mu)\big((g\partial^\nu)(h\partial^\lambda)\big)&=\sum_{n=0}^\infty\sum_{m=0}^n\left[\sum_{i=m}^n\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{n-i}\binom{i}{m}\right]fg^{(m)}h^{(n-m)}\partial^{\mu+\nu+\lambda-n},\\ \big((f\partial^\mu)(g\partial^\nu)\big)(h\partial^\lambda)&=\sum_{n=0}^\infty\sum_{m=0}^n\binom{\mu}{m}\binom{\mu+\nu-m}{n-m}fg^{(m)}h^{(n-m)}\partial^{\mu+\nu+\lambda-n}.\end{aligned}$$

よって, 任意の微分環 R に対して $\mathcal{F}=\mathcal{F}_R$ の積が結合律を満たすことは二項係数に関する次の公式と同値である:

$$\sum_{i=m}^n\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{n-i}\binom{i}{m}=\binom{\mu}{m}\binom{\mu+\nu-m}{n-m}.$$

ここで, $\mu,\nu\in\mathbb{K}$, $m,n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$, $m\le n$ である. 公式の両辺は μ,ν の多項式なので $\mu,\nu\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ の場合に制限された公式と同値である. そして, その制限された場合の公式は, $(R,\partial)=(\mathbb{K}[x],\partial/\partial x)$ に対する $\mathcal{D}=\mathcal{D}_R$ の積が結合律を満たすことと同値である (Remark 1.7. この議論は佐藤・野海 [14] の 12 頁の命題 1.1 の証明にある. [14] には擬微分作用素環 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_R$ に関する詳しい解説がある. □

4.2 Adler trace

[sec:int-tr]
(R,∂) は $\mathbb{K}$ 微分環であるとし, 形式的に $\partial/\partial x=\partial$ と考える.

Definition 4.4 [def:commutator-res] $A,B\in\mathcal{F}$ の交換子を $[A,B]=AB-BA$ と定める. 一般化された擬微分作用素 $A=\sum a_\mu\partial^\mu\in\mathcal{F}$ に対して, $\operatorname{Res}_\partial A=a_{-1}\in R$ と置く. □

[2] これは仮の呼び方. 実際には fractional とは限らないが, fractional pseudo differential operator (fpdo) とでも呼ぶべきか?

Lemma 4.5 `[lemma:commutator-res]` 以下が成立する:

(1) $[\mathcal{F}_{\le\alpha}, \mathcal{F}_{\le\beta}] \subset \mathcal{F}_{\le\alpha+\beta-1} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{K})$.
(2) $[\mathcal{E}_{\le m}, \mathcal{E}_{\le n}] \subset \mathcal{E}_{\le m+n-1} \quad (m, n \in \mathbb{Z})$.
(3) $[\mathcal{D}_{\le m}, \mathcal{D}_{\le n}] \subset \mathcal{D}_{\le m+n-1} \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$.
(4) $\mathrm{Res}_\partial[\mathcal{F}, \mathcal{F}] \subset \partial R$.
(5) $\mathrm{Res}_\partial[\mathcal{E}, \mathcal{E}] \subset \partial R$.

Proof. (2) と (3) は (1) より, (5) は (4) よりただちに導かれるので, (1) と (4) のみを示せば良い. $f, g \in R$, $\mu, \nu \in \mathbb{K}$ とすると, $\mathcal{F}$ の積の定義より,

$$[f\partial^\mu,\, g\partial^\nu] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\binom{\mu}{k} f g^{(k)} - \binom{\nu}{k} f^{(k)} g \right) \partial^{\mu+\nu-k} \in \mathcal{F}_{\le\mu+\nu-1}.$$

よって, (1) が成立する. ある $k = 1, 2, \dots$ で $\mu + \nu - k = -1$ を満たすものが存在すると仮定する. このとき, $\binom{\nu}{k} = (-1)^k \binom{\mu}{k}$ であるから,

$$\mathrm{Res}_\partial[f\partial^\mu,\, g\partial^\nu] = \binom{\mu}{k} \bigl(f g^{(k)} - (-1)^k f^{(k)} g \bigr).$$

ところが,

$$\partial \Bigl(\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i f^{(i)} g^{(k-1-i)} \Bigr) = f g^{(k)} - (-1)^k f^{(k)} g.$$

これで, (4) も成立することがわかった. □

Definition 4.6 (Adler trace) `[def:adler-trace]` 線型写像 $\mathrm{trace} : \mathcal{F} \to \bar{R}$ を次のように定める:

$$\mathrm{trace}\, A := \int (\mathrm{Res}_\partial A)\, dx \qquad (A \in \mathcal{F}).$$

Lemma 4.5 (4) より,

$$\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA) \qquad (A, B \in \mathcal{F})$$

が成立していることがすぐにわかる. この trace を Adler trace と呼ぶ ([1]). □

4.3　一次の Poisson 構造

`[sec:linear-Poisson-pdo]`

4.4　二次の Poisson 構造

`[sec:quadratic-Poisson-pdo]`

5 接続の空間上の Poisson 構造

[sec:Poisson-connection]

参考文献

[1] Adler, M.: On a trace functional for formal pseudo differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries type equations, Invent. Math. 50 (1978/79), no. 3, 219–248

[2] Dickey, L. A.: Soliton equations and Hamiltonian systems, Advanced Series in Mathematical Physics, 12, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1991, x+310 pp.

[3] Dickey, L. A.: Field-theoretical (multi-time) Lagrange-Hamilton formalism and integrable equations, Lectures on integrable systems (Sophia-Antipolis, 1991), 103–161, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1994

[4] Gelfand, I. M. and Dikii, L. A.: Asymptotic properties of the resolvent of Sturm-Liouville equations, and the algebra of Korteweg-de Vries equations, Russian Math. Surveys 30 (1975), no. 5, 77–113

[5] Gelfand, I. M. and Dikii, L. A.: A Lie algebra structure in the formal calculus of variations, Funct. Anal. Appl. 10 (1976), no. 1, 16–22

[6] Gelfand, I. M. and Dikii, L. A.: Fractional powers of operators and Hamiltonian systems, Funct. Anal. Appl. 10 (1976), no. 4, 259–273 (1977)

[7] Gelfand, I. M. and Dikii, L. A.: The resolvent and Hamiltonian systems, Funct. Anal. Appl. 11 (1977), no. 2, 93–105

[8] Gelfand, I. M. and Dikii, L. A.: The calculus of jets and nonlinear Hamiltonian systems, Funct. Anal. Appl. 12 (1978), no. 2, 81–94

[9] Gelfand, I. M. and Dorfman, I. Ya.: Hamiltonian operators and algebraic structures associated with them, Funct. Anal. Appl. 13 (1979), no. 4, 248–262

[10] Gelfand, I. M. and Dorfman, I. Ya.: Schouten bracket and Hamiltonian operators, Funct. Anal. Appl. 14 (1980), no. 3, 223–226

[11] Gelfand, I. M. and Dorfman, I. Ya.: Hamiltonian operators and infinite-dimensional Lie algebras, Funct. Anal. Appl. 15 (1981), no. 3, 173–187

[12] Gelfand, I. M. and Manin, Ju. I., and Šubin, M. A.: Poisson brackets and the kernel of the variational derivative in the formal calculus of variation, Funct. Anal. Appl. 10 (1976), no. 4, 274–278 (1977).

[13] Matsumura, Hideyuki: Commutative ring theory, Translated from the Japanese by M. Reid, Second edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1989. xiv+320 pp.

[14] 佐藤幹夫, 野海正俊: ソリトン方程式と普遍グラスマン多様体, 上智大学講究録, No. 18, 上智大学数学教室, 1984 年 6 月

[15] 松村英之: 可換環論, 共立出版株式会社, 1980, 2000, vi+372 pp.