2012-05-08 長尾健太郎氏の集中講義(1)

黒木玄 記

3次元双曲幾何とクラスター代数

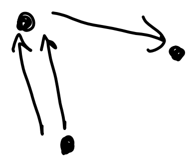
寺嶋郁二
山崎雅人との
共同研究に基づく

§1 クラスター代数
§2 Teichmüller理論
§3 3次元双曲幾何
§4 背景

$\boxed{\text{§1. クラスター代数}}$

← いろいろな組合せ論的性質が重要

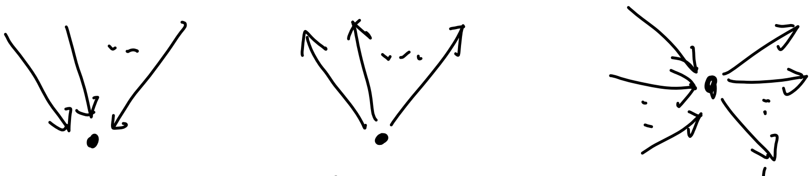
Q：箙(えびら, quiver)　(有向グラフのこと)



こんなもの

k は Q の頂点で sink または source であるものであるとする。

$\left(I := \{\text{Qの頂点}\} \right)$



sink　　source　　sinkでもsourceでもない

Qの各頂点に対して変数 x_i を対応させておく。

以下のような操作を考える。　これを $Q \mapsto Q'$ と書く。

Step 1　k を頂点に持つ矢印の向きを逆にする

Step 2　変数 x_k だけを次でとりかえる：　$\left(i \neq k \text{ のとき } x'_i = x_i \right)$

$$x'_k = \frac{\prod_j x_j^{\#j\to k} + \prod_j x_j^{\#k\to j}}{x_k}$$

今の場合は
$\#j\to k = 0$
または
$\#k\to j = 0.$

ここで $\#j\to k$ は j から k への矢印の本数.

このようにして頂点kにおける変異(mutation)

$$(Q, (x_i)_{i \in I}) \overset{\mu_k}{\rightsquigarrow} (Q', (x'_i)_{i \in I})$$ が定義される

(クラスター変換と呼ぶこともある)

$\boxed{\text{例}}$ Q が $\overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet}$ のとき

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & x_1 \to x_2 \arrow[dl, leftrightarrow, "\mu_1"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\mu_2"] & \\
\frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \arrow[d, leftrightarrow, "\mu_2"'] & & x_1 \leftarrow \frac{1+x_1}{x_2} \arrow[d, leftrightarrow, "\mu_1"] \\
\frac{1+x_2}{x_1} \to \frac{1+\frac{1+x_2}{x_1}}{x_2} = \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} & & \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \to \frac{1+x_1}{x_2} \arrow[dl, leftrightarrow, "\mu_2"] \\
 & \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \leftarrow \frac{1+x_2}{x_1} &
\end{tikzcd}$$

pentagon Identity

左右逆なだけで同じ

$$\frac{1+\frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}}{\frac{1+x_1}{x_2}} = \frac{\frac{(1+x_1)(1+x_2)}{x_1x_2}}{\frac{1+x_1}{x_2}} = \frac{1+x_2}{x_1}$$

かなりわりきれる!

この例を見るだけでは納得できないかもしれないが、クラスター変換は合成が制御可能な有理変換である!

$\boxed{\text{例}}$

$x_1 \Rightarrow x_2$

$\bullet \Leftarrow \bullet$ は $\bullet \leftleftarrows \bullet$ の意味

$\mu_1 \updownarrow$

$\frac{1+x_2^2}{x_1} \Leftarrow x_2$

$\mu_2 \updownarrow$

$\frac{1+x_2^2}{x_1} \Leftarrow \frac{1+\left(\frac{1+x_2^2}{x_1}\right)^2}{x_2} = \frac{(1+x_2^2)^2+x_1^2}{x_1^2x_2}$

$\mu_1 \updownarrow$

$\boxed{*} \Rightarrow \frac{(1+x_2^2)^2+x_1^2}{x_1^2x_2}$

$$* = \frac{1+\left(\frac{(1+x_2^2)^2+x_1^2}{x_1^2x_2}\right)^2}{\frac{1+x_2^2}{x_1}} = \frac{(1+x_2^2)^3+2(1+x_2^2)+x_1^4}{x_1^3x_2^2}$$

μ_1から出発すると分母は $x_1,\ x_1^2x_2,\ x_1^3x_2^2,\ \cdots$ になる.

μ_2から出発すると分母は $x_2,\ x_1x_2^2,\ x_1^2x_2^3,\ \cdots$ になる.

出て来る有理式は Laurent 多項式になる

対応する root 系の正実 root が分母に出て来る.

§1-1 クラスター代数の定義

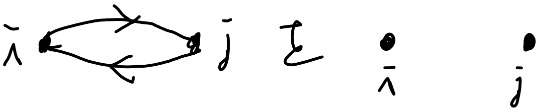
Q：箙（ただし, ループと長さ2の有向サイクルを持たない.）

Qの任意の頂点 k に対して, 以下の操作を考える.

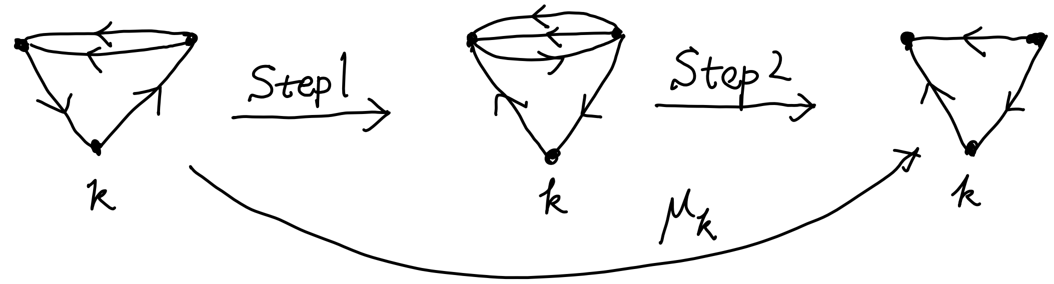
Step 1　新しい箙 $\mu_k^{pre}Q$ を以下で定める;

• 任意の $i \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} j$ に $i \xrightarrow{[\alpha\beta]} j$ を付け加える.

• kを頂点に持つ矢印をすべて逆向きにする

Step 2  にする。（長さ2の有向サイクルを消す。）

例



このようにして得られる箙を $\mu_k Q = Q'$ と書く

Step 3 （前と同じ）

$$x_i' = x_i \quad (i \neq k)$$

$$x_k' = \frac{\prod_j x_j^{\# j\to k} + \prod_j x_j^{\# k\to j}}{x_k}$$

（$\# j\to k$ はもとの箙Qでのjからkへの矢印の本数）

これで変異 $(Q, (x_i)_{i\in I}) \overset{\mu_k}{\rightsquigarrow} (Q', (x_i')_{i\in I})$ が定義される。

やはり、Laurent多項式のみが出て来る

$\boxed{\text{レポート問題}}$

① μ_kを2回くりかえすともとにもどることを確認せよ。

② 適当な箙から出発してmutationを色々計算してみよ。

ここで休憩（16:10〜16:20）

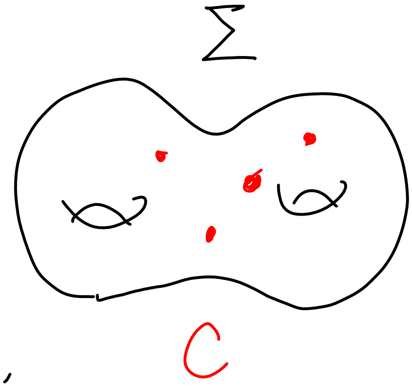
できれば今日中に①,②をやってみて、
μ_kを2回やってももどらないとか、通分がうまくゆかないとか
になったら質問に来て下さい。

§1-2 例 曲面の三角形分割に対するクラスター代数

Σ：(境界つき)向き付けられた(実)曲面

C⊂Σ：空でない有限部分集合

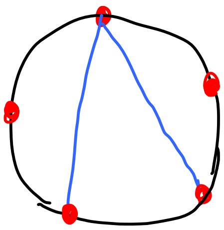
∂Σの各連結成分上にCの点が少なくともひとつ含まれると仮定する。



このとき τ が (Σ, C) の三角形分割 とは

Σの topological な意味での三角形分割で {頂点}=C となるもの。

例 ①

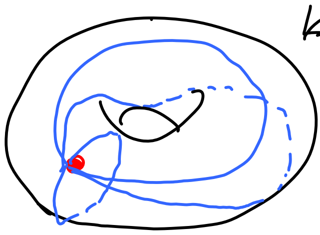


Σ = disk

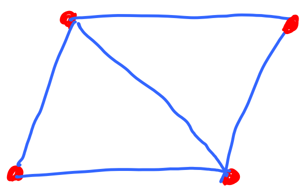
C = {∂Σ上の5点}

三角形分割の例

②



切りひらく ⟶



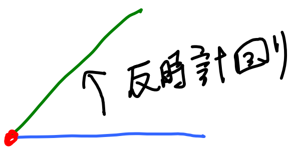
□

竹カンムリの上に洋服の服で「えびら」とよむ

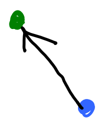
(Σ, C) とその三角形分割 τ に対して箙 Q_τ を次のように対応させる。

$$(\Sigma, C),\ \tau \longrightarrow Q_\tau$$

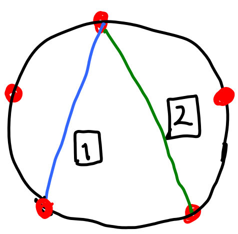
{内部に含まれる辺} $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ {頂点}



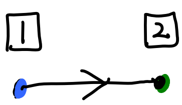
$\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$

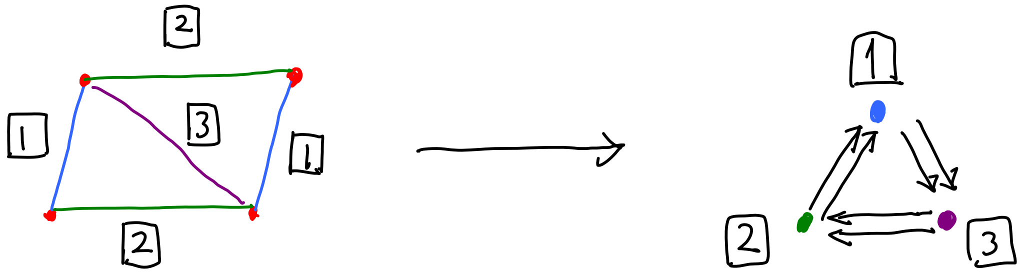


例 ①



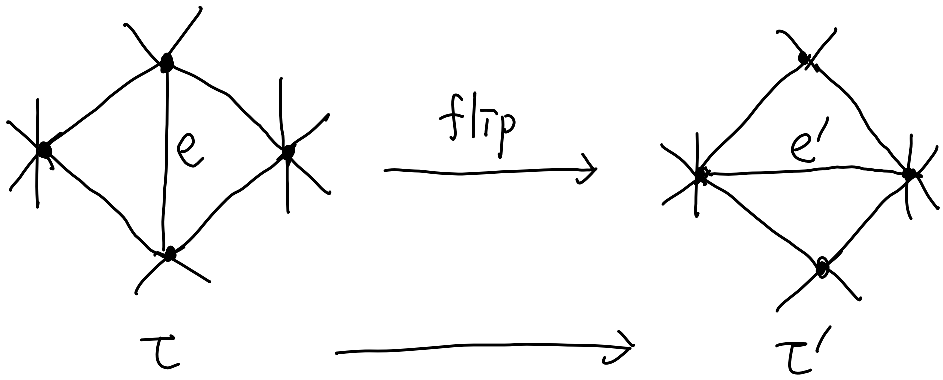
⟶



② 

□

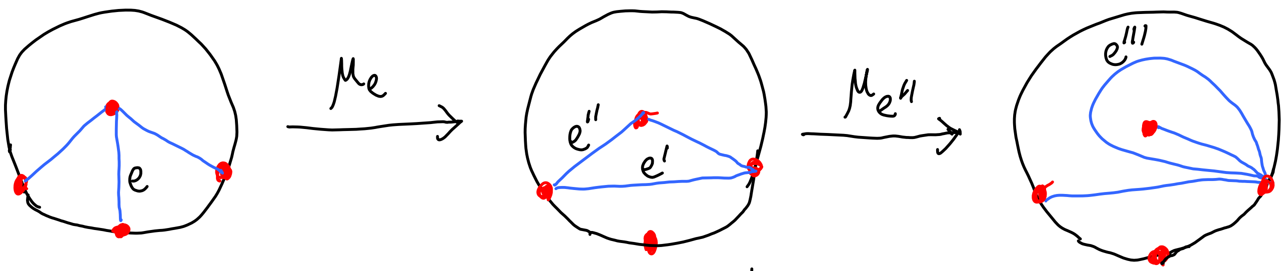
フリップ τ：三角形分割, e：τの辺



事実 $Q_{\tau'} = \mu_e(Q_\tau)$, ((τの辺e)=(Qの頂点)) □

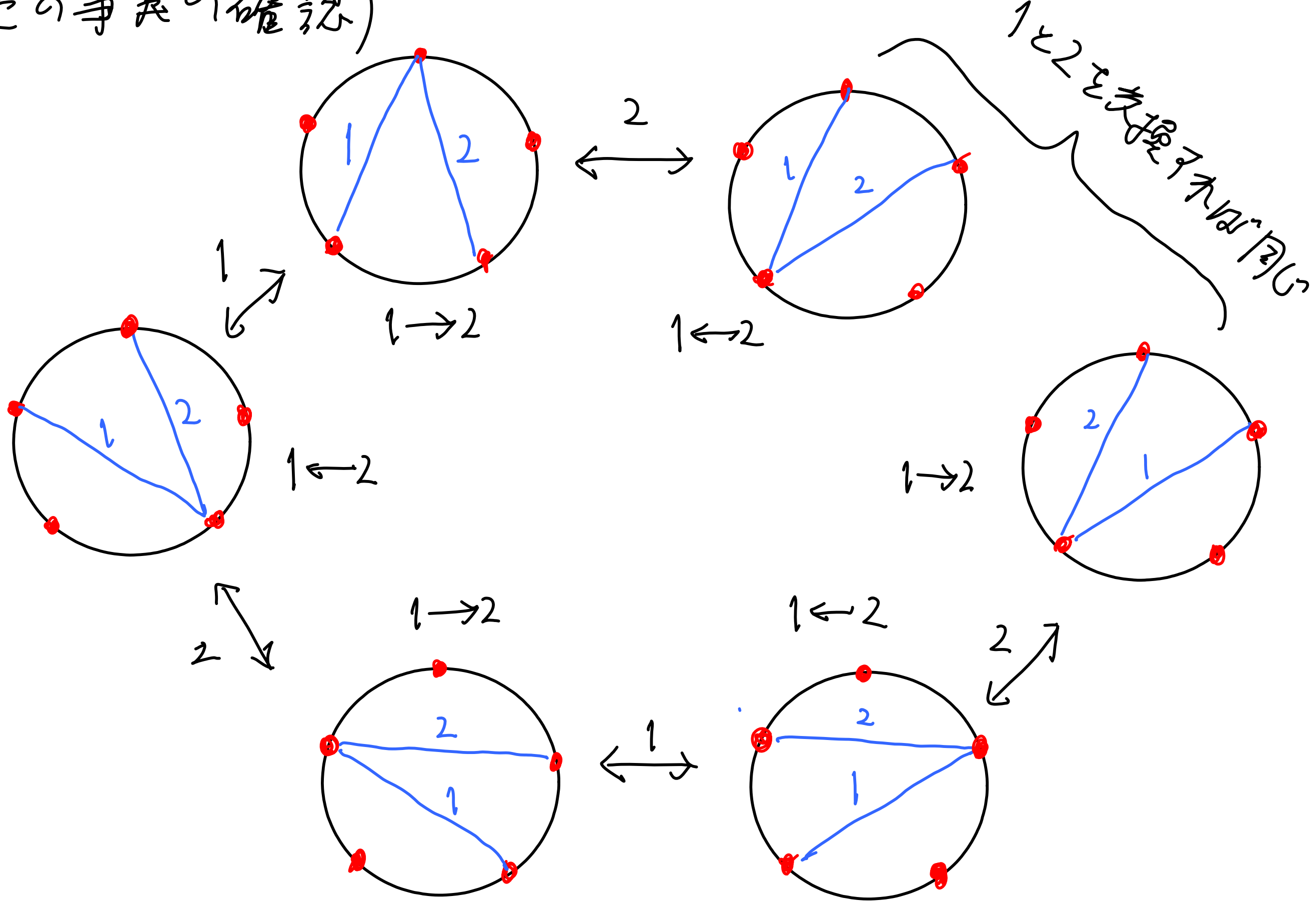
レポート この事実を確認せよ。 □

注

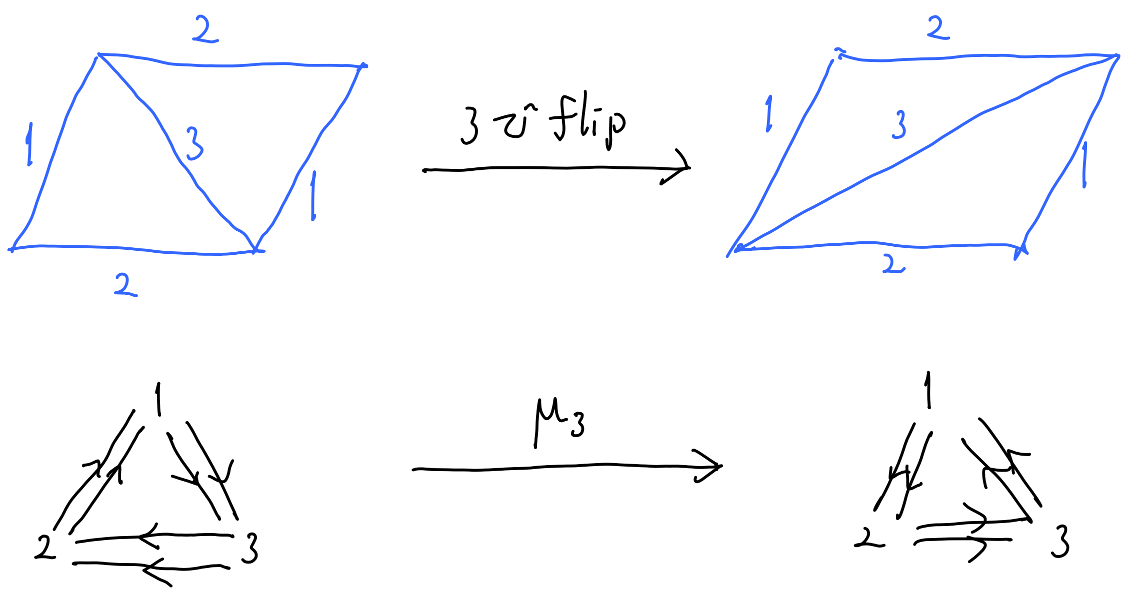


このようなflipもゆるされることに注意せよ。 □

例 (上の事実の確認)



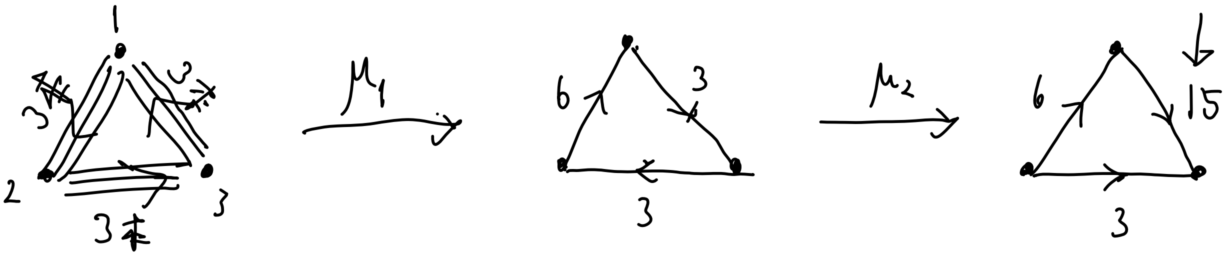
②



OK

注 local $\mathbb{P}^2$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$ には次が対応 :

total space



$\boxed{\text{注}}$ Q_τ の構成では τのグラフとしての構造 + Σの向きのみを使った。

$$[\varphi] \in MCG(\Sigma, C) := \pi_0(\underbrace{Aut^+(\Sigma, C)}_{\{\varphi : \Sigma \xrightarrow{\sim} \Sigma,\ \text{向きを保つ},\ \varphi(C) = C\}})$$

(mapping class group)

とする

このとき φは三角形分割を三角形分割にうつす。

そして

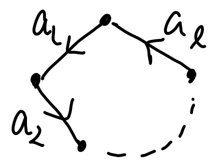
$$\begin{tikzcd} \tau \arrow[r, squiggly, "\varphi"] \arrow[d, mapsto] & \varphi(\tau) \arrow[d, mapsto] \\ Q_\tau \arrow[r, equal] & Q_{\varphi(\tau)} \end{tikzcd}$$

が成立している □

§1.3. おまけ. ポテンシャル付き箙とその変異

箙Qのポテンシャル W とは Qの中の向き付きサイクルの線型結合.

$$W = \sum \circledast\, a_1 a_2 \cdots a_\ell$$

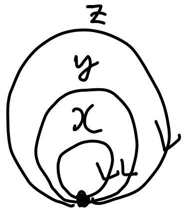


$$\left(\begin{aligned} & a_i \cdots a_\ell a_1 \cdots a_{i-1} \\ & = a_1 \cdots a_{i-1} a_i \cdots a_\ell \end{aligned} \right)$$

矢印 a でポテンシャル W を微分できる:

$$\partial_a (a_1 a_2 \cdots a_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} \delta_{a a_i} a_{i+1} \cdots a_\ell a_1 \cdots a_{i-1}.$$

$\boxed{\text{例}}$

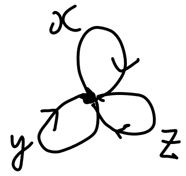


←Q, $W = xyz - xzy$ に対して

$$\partial_x W = yz - zy, \quad \partial_y W = zx - xz, \quad \partial_z W = xy - yx,$$ □

箙Qから path algebra $\mathbb{C}Q$ が自然に定まる

$J_{Q,W} := \mathbb{C}Q / (\partial_a W)_{a:\text{edge}}$ を Jacobi algebra と呼ぶ.

例 

$\leftarrow Q$, $W = xyz - xzy$ のとき,

$$J_{Q,W} = \mathbb{C}\langle x,y,z\rangle \Big/ \begin{pmatrix} xy-yx \\ zx-xz \\ xy-yx \end{pmatrix} \simeq \mathbb{C}[x,y,z], \text{ 多項式環.}$$

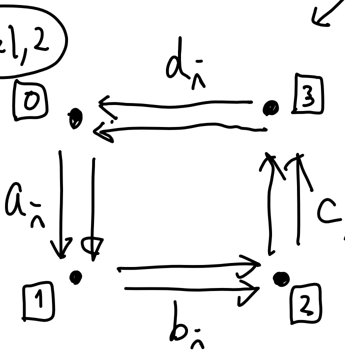
$$\therefore \ \operatorname{mod} J_{Q,W} \cong \operatorname{Coh} \mathbb{C}^3. \qquad \square$$

ポテンシャルの変異

この例は local $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$

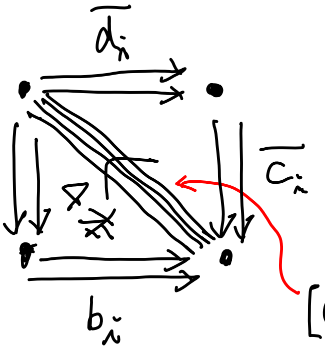
total space

例 $i=1,2$

Q: 

$$W = a_1b_1c_2d_2 - a_1b_2c_2d_1 - a_2b_1c_1d_2 + a_2b_2c_1d_1$$

$\downarrow \mu_{\boxed{2}}$

Q': 

$[c_id_j]$ と書く.

$$W = a_1b_1[c_2d_2] - a_1b_1[c_2d_1] - a_2b_1[c_1d_2] + a_2b_2[c_1d_1] + \sum_i\sum_j [c_id_j]\overline{d_j}\,\overline{c_i}.$$

各頂点 $\boxed{k}$ ごとに projective $J_{Q,W}$-module P_k が定まる

$$J_{Q,W} = \bigoplus_{k=0}^{3} P_k. \quad (\text{projective generator})$$

P_0, P_1, P_2, P_3

$\downarrow \mu_3$

$$P_3' = \operatorname{Ker}(P_2^{\oplus 2} \to P_3)$$

$$\operatorname{Cone}(P_3 \to P_0^{\oplus 2})$$

$\leftarrow$ derived cat で考える

この2つが quantum dilog の $+$ と $-$ に対応している

$P' := P_0 \oplus P_1 \oplus P_2 \oplus P_3'$ とおくと,

$\operatorname{End}(P') \cong J_{Q',W'}$ となる

さらに $D\mathrm{Hom}(P', -) : D^b(\mathrm{mod}\, J_{Q,W}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{mod}\, J_{Q',W'})$ となる！
同値

このようなことを知っていれば $(Q,W) \overset{\mu_k}{\longmapsto} (Q',W')$ が自然に思えてくる

categorical な構成を知っていると (Q,W) の mutation は自然。

$\boxed{\text{レポート問題}}$ $\mathrm{End}(P') \cong J_{Q',W'}$ を確認せよ

一般に，$(Q,W) \rightsquigarrow \Gamma_{Q,W}$: dg alg $\rightsquigarrow \mathcal{D}_{Q,W}$: derived cat.

$$(Q,W) \overset{\mu_k}{\longmapsto} (Q',W') \Longrightarrow \mathcal{D}_{Q,W} \cong \mathcal{D}_{Q',W'}.$$

$\square$

$\boxed{\text{レポートは 6/8(金)まで}}$